

## Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések

Számítsuk ki az alábbi [mátrixok](#) determinánsait.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi [mátrix](#) determinánsát.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -5 \\ -4 & -1 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi [mátrixok](#) determinánsait.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az alábbi mátrixnak milyen  $p$  paraméter esetén létezik inverze, milyen  $p$  paraméterre lesz a determinánsa éppen 0, illetve milyen  $p$  paraméterre lesz az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  egyenletrendszernek végtelen sok megoldása.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Sajátvektora-e az  $A$  mátrixnak az  $\underline{u}$  és a  $\underline{v}$  vektor?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Számoljuk ki az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Itt van egy nagyszerű [mátrix](#), ezzel a három vektorral:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

És a feladatunk az, hogy derítsük ki, ezek közül a [vektorok](#) közül melyik sajátvektora az  $A$  mátrixnak. A sajátvektorhoz pedig számoljuk majd ki a sajátértékeket is.

b) Számoljuk ki az  $A$  [mátrix](#) sajátértékeit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

Itt van egy nagyszerű [mátrix](#), ezzel a három vektorral:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nézzük meg, hogy ezek közül a [vektorok](#) közül melyik sajátvektor, és a sajátvektorokhoz számoljuk ki a hozzájuk tartozó sajátértékeket is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

a) Itt ez a [mátrix](#), és számoljuk ki a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Itt jön aztán ez a 3x3-as [mátrix](#). Számoljuk ki a sajátértékeit, sajátvektorait és a saját [vektorok](#) által generált sajátalttereket.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

a) Itt ez a [mátrix](#), és számoljuk ki a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Itt jön aztán ez a 3x3-as [mátrix](#). Számoljuk ki a sajátértékeit, sajátvektorait és a sajátvektorok által generált sajátaltalereket.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A megoldásunk során a Gauss-transzformációt használjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A megoldásunk során a Gauss-transzformációt használjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A bázis transzformáció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A Gauss elimináció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Van itt ez a [mátrix](#).

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki, hogy mennyi  $A^{10}$ .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vannak itt ezek a [mátrixok](#), döntsük el, hogy milyen definitiek.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az  $A$  mátrixhoz és  $\underline{x}$  vektorhoz tartozó kvadratikus alakokat.

$$a) A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

c) Adott a  $Q(\underline{x})$  kvadratikus alak, határozzuk meg ebből az  $A$  mátrixot.

$$Q(\underline{x}) = 5x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 7x_1x_3 - 6x_2x_3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el az alábbi kvadratikus alakok definittségét.

$$a) Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$$

$$b) Q(\underline{x}) = -5x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az  $x$  tengelyre való tükrözés mátrixát  $\mathbb{R}^2$ -ben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Tükrözzük az x tengelyre a  $\underline{v}$  vektort, ha

a)  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  és a bázis [vektorok](#):  $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  és  $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  és a bázis [vektorok](#):  $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  és  $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

a)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix}$   $a, b \in \mathbb{R}$

b)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix}$   $a, b \in \mathbb{R}$

c)  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \cdot b \\ c \end{pmatrix}$   $a, b, c \in \mathbb{R}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix}$   $a, b, c \in \mathbb{R}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját:

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix}$   $a, b, c \in \mathbb{R}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát, adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját.

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg a  $\mathbb{R}^2$ -ben az x tengelyre tükrözés, az origó középpontú  $\alpha$ -szögű forgatás, és az origóra tükrözés mátrixait.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík transzformációi közül melyek dimenzió tartó transzformációk?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [mátrixok](#) közül melyek hasonlóak.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)