



MATEKING.HU

Feladatgyűjtemény

TÖBBVÁLTOZÓS MATEMATIKA MATE
tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 10. 02.

Tartalomjegyzék

Differenciálegyenletek.....	2
Izoklinák.....	8
Laplace transzformáció.....	9
Mátrixok, vektorok, vektorterek.....	12
Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze.....	18
Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések.....	23
Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík.....	30
Kétváltozós függvények.....	32
Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság.....	37
Kettős és hármas integrál.....	42

Differenciálegyenletek

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y' = \sqrt{y}(x + e^x)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $y' = 2xy - x^2y'$

b) $y' + y^2 = e^x(1 + y^2) - 1$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $(x^2 + y^2) dx = xy dy$

b) $x^2y' = x^2 + xy + y^2$

c) $(x^4 + 5y^4) dx = 4xy^3 dy$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $(4x^3y^3 + e^x) dx + (3x^4y^2 + 3y^2) dy = 0$

b) $(2xe^y + 4x^3) dx + (x^2e^y - \sin y) dy = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $(3xy + 2) dx + x^2 dy = 0$

b) $(y^3 - x) dx + 3y^2 dy = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $(y + \cos^3 x) dx + \sin x \cos x dy = 0$

b) $\left(y \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\right) dx + \frac{\sin x}{\cos x} dy = 0$

c) $4xy dx + (x^2 + 1) dy = 0$

d) $4xy^{\frac{1}{2}} dx + (x^2 + 1) y^{-\frac{1}{2}} dy = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $y' + y \tan x = e^x \cos x$

b) $xy' + y = x^3$

c) $y' + 4x^3 y = x^3 e^{x^4}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$\cos^8 x \cdot y' + \frac{\cos^9 x}{\sin x} y = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $y' + 4y = \cos x$

b) $y' + 2y = 4x^2 + 12$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $y' - 2y = \cos 4x + e^{3x}$

b) $y' - 4x = x + e^{3x} + e^{4x}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $2y'' - 9y' + 4y = 0$

b) $y'' - 12y' + 36y = 0$

c) $y'' - 4y' + 13y = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

$$y'' - 10y' + 16y = 4x^2 + 12$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

a) $y'' + 4y' - 12y = 4x + e^{2x}$

b) $y'' - 4y' + 13y = 4x + e^{2x}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y'(e^x + 1) = e^x y$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y'' - 5y' + 6y = 2 \sin(2x)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y''(x^2 + 1) = 2xy'$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát!

$$\sin^7 x \cdot y' - \frac{\sin^8 x}{\cos x} y = 1 \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1736$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y'' - 6y' + 9y = 2 \cosh(3x)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet az $y' = z$ helyettesítéssel.

$$y''(e^x + 1) = e^x y'$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát!

$$\cos^8 x \cdot y' + \frac{\cos^9 x}{\sin x} y = 1 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1000$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát!

$$y' + (\sin x)y = \sin x \quad y(0) = 3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y' = \frac{\sinh^6(2y)}{\cosh(2y)} \sqrt[5]{3 + 8x}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát!

$$y' + \frac{2}{x}y = 3x^2 \quad y(1) = 4$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y'' - y' - 6y = 4 \cosh(3x)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y^{(3)} + 3y'' + 2y' = x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y' = (2y + 1)^6 \ln 3x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y' = \frac{x}{y} e^{2x^2+3y} \quad y > 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y' + 2xy = 4x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$xy' - y = e^x (x^2 + x^3)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y'' - y = x^2 - x + 1 + e^x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát!

$$y'' + y = -4 \cos x + x \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet.

$$y' (x^2 + 1) = 2xy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet:

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (Elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{e^{-2y^2} \cosh(2x)}{y}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet.

$$y'' - 4y' + 5y = 13 \sin 2x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Izoklinák

a) Adjuk meg az $y' = x^2 + y^2 - 8$ differenciálegyenlet $K = 0$ izoklináját!

b) Adjuk meg az $y' = \sqrt{x^2 + y^2} - 3$ [differenciálegyenlet](#) $K = 0$ izoklináját!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg az $y' = \sqrt{x^2 + y^2} - 4$ differenciálegyenlet $K = 0$ izoklináját és nézzük meg, hogy a $(4, 0)$ pontjában, van-e a megoldásfüggvénynek szélsőértéke.

b) Adjuk meg az $y' = x^2 + y^2 - 8$ differenciálegyenlet $K = 0$ izoklináját és vizsgáljuk meg a $(2, -2)$ pontjának lokális tulajdonságait.

c) Adott a következő [differenciálegyenlet](#)

$$y' = xy^3 - y^2 + 2$$

Van-e lokális szélsőértéke a megoldásgörbéjének az $(1, -1)$ pontban?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Laplace transzformáció

Mi a Laplace transzformáltja az alábbi függvényeknek?

a) $f(x) = 4\sin(3x) + e^{5x} - 7x^4$

b) $g(x) = \sin(3x)e^{5x}$

c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{e^{3x}}$

d) $g(x) = 2x \cos x (\sin x + 5)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adottak az alábbi Laplace transzformáltak, mik lehettek az eredeti függvények?

a) $F(s) = \frac{s}{s^2+16}$

b) $F(s) = \frac{1}{(s-7)^4}$

c) $F(s) = \frac{7s}{s^2-6s+13}$

d) $G(s) = \frac{7s}{s^2-6s+8}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y' + 2y = 5e^{3x} + 4 \quad y(0) = 3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y' + y = 12 \cos(3x)e^{2x} \quad y(0) = 4$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y'' - 7y' + 12y = 2e^{2x} \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = 9$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x} \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 6$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a [differenciálegyenlet](#)-rendszert a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$x' = x + 4y \quad x(0) = 2$$

$$y' = 2x - y \quad y(0) = -2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a [differenciálegyenlet](#)-rendszert a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$x' = 2y + 3x \quad x(0) = 1$$

$$y' = -2x + 3y + 4e^t \quad y(0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y'' - 7y' + 12y = 2 \sin 2x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a [differenciálegyenlet](#)-rendszert a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$x' = 5x - y \quad x(0) = -1$$

$$y' = 3x + y \quad y(0) = 2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a [differenciálegyenlet](#)-rendszert a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$x' = -8y \quad x(0) = 1$$

$$y' = 2x \quad y(0) = -2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y'' - 2y' + y = x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a [differenciálegyenlet](#)-rendszert a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$x' = -3x + 4y \quad x(0) = 1$$

$$y' = -x + y \quad y(0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y'' = -y \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a [differenciálegyenlet](#)-rendszert a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$x' = -8y \quad x(0) = 1$$

$$y' = 2x \quad y(0) = -2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Végezzük el az inverz Laplace-transzformációt.

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2-2s}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a nagyszerű [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y'' + y' - 2y = 30 \cos x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y' - y = 5 \sin 2x \quad y(0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a [Laplace transzformáció](#) segítségével.

$$y' - 5y = e^{5x} - 5x + 6 \quad y(0) = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mátrixok, vektorok, vektorterek

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az alábbi [mátrixok](#) transzponált mátrixait!

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi két vektor által bezárt szöget.

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt néhány vektor, és végezzük el velük a következő műveleteket.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \langle 2 \ 5 \ 7 \rangle$$

a) $A \cdot \underline{b}$

b) $A \cdot C$

c) $A \cdot C^*$

d) $\underline{b}^* \cdot \underline{d}$

e) $\underline{b} \cdot \underline{d}^*$

f) A^2

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Írjuk föl a $P(7, 8, 9)$ ponton átmenő és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ irányvektorú egyenes egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Írjuk föl a $P(3, 5)$ ponton átmenő és a $4x + y = 6$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes síkbeli egyenletét.

b) Írjuk föl a $P(3, 5, 7)$ ponton átmenő és az $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-1}{9}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík térbeli egyenletét.

c) Írjuk föl a $P(1, 1)$ és $Q(3, 5)$ ponton átmenő egyenes síkbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Írjuk föl a $P(1, 4, 1)$ a $Q(3, 5, 7)$ és az $R(6, 5, 2)$ pontokon átmenő sík térbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi [vektorok](#) vektoriális szorzatát.

$$a) \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = ?$$

b) Írjuk föl a $P(1, 1)$ és $Q(3, 5)$ ponton átmenő egyenes síkbeli egyenletét.

c) Írjuk föl a $P(1, 4, 1)$ a $Q(3, 5, 7)$ és az $R(6, 5, 2)$ pontokon átmenő sík térbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektorteret alkotnak-e?

a) [Komplex számok](#)

b) Másodfokú polinomok

c) Legfeljebb másodfokú polinomok

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [vektorok](#) lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [vektorok](#) lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Töltsük ki az alábbi táblázatot.

vektorok száma	megadható-e ennyi vektor úgy, hogy független legyen R^3 -ban	megadható-e ennyi vektor, hogy generátor-rendszer legyen R^3 -ban
1		
2		
3		
4		
5		

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ [vektorok](#). Az alábbi állítások közül melyik igaz?

- a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ is lineárisan független.
- b) Ha $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.
- c) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}, \underline{c} - \underline{a}$ is lineárisan független.
- d) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ is lineárisan független.
- e) Ha $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.
- f) Ha $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e $\mathbb{R}^3$ -nak, ha igen, adjunk meg egy bázist W -ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e $\mathbb{R}^4$ -nek, ha igen, adjunk meg egy bázist W -ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ a = b \\ \text{és} \\ c = 3d \end{array} \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ -beli [vektorok](#). Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ is lineárisan független.
- b) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggő, akkor $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ is lineárisan összefüggő.
- c) Ha $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.
- d) Ha $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vizsgáljuk meg, hogy $W \subset V$ halmaz altére-e V -ben. Ha igen, adjunk meg a dimenzióját és egy bázisát.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az alábbi bázist alakítsuk át ortogonális bázissá a Gram-Schmidt-ortogonalizáció segítségével.

$$\underline{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert bázis transzformációval.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1 + x_4 = 5$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss eliminációval.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1 + x_4 = 5$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a bázis transzformáció segítségével.

a)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

b)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a Gauss elimináció segítségével.

a)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

b)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert bázis transzformáció segítségével.

$$2x_1 - x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$

$$8x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Gauss elimináció segítségével.

$$2x_1 - x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$

$$8x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az α és β paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? A feladatot a bázis transzformáció segítségével oldjuk meg.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az α és β paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? A feladatot a Gauss elimináció segítségével oldjuk meg.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az α , β és γ paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? (Oldjuk meg bázis transzformációval)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \beta$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_2 + 4x_3 + \gamma x_4 = 4$$

$$3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = \alpha$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az α , β és γ paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? (Oldjuk meg a Gauss elimináció segítségével)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \beta$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_2 + 4x_3 + \gamma x_4 = 4$$

$$3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = \alpha$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bázis transzformáció segítségével számítsuk ki a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló vektorrendszer rangját, illetve állapítsuk meg, hogy előállítható-e segítségükkel az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss elimináció segítségével számítsuk ki a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló vektorrendszer rangját, illetve állapítsuk meg, hogy előállítható-e segítségével az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ független [vektorok](#), és

$$\underline{v}_1 = \underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_2 = \underline{a}_1 + \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_3 = 3\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

Mekkora a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorrendszer rangja, illetve előállítható-e velük a $\underline{b} = \underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$ vektor?

Számításainkat a bázis transzformáció segítségével végezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ független [vektorok](#), és

$$\underline{v}_1 = \underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_2 = \underline{a}_1 + \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_3 = 3\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

Mekkora a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorrendszer rangja, illetve előállítható-e velük a $\underline{b} = \underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$ vektor?

Számításainkat a Gauss elimináció segítségével végezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az alábbi [mátrix](#) inverzét a bázis transzformáció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az alábbi [mátrix](#) inverzét a Gauss elimináció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az alábbi [mátrix](#) inverzeit a bázis transzformáció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az alábbi [mátrix](#) inverzeit a Gauss elimináció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések

Számítsuk ki az alábbi [mátrixok](#) determinánsait.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi [mátrix](#) determinánsát.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -5 \\ -4 & -1 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi [mátrixok](#) determinánsait.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az alábbi mátrixnak milyen p paraméter esetén létezik inverze, milyen p paraméterre lesz a determinánsa éppen 0, illetve milyen p paraméterre lesz az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Sajátvektora-e az A mátrixnak az $\underline{u}$ és a $\underline{v}$ vektor?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Számoljuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ [mátrix](#) sajátértékeit és sajátvektorait.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Itt van egy nagyszerű [mátrix](#), ezzel a három vektorral:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

És a feladatunk az, hogy derítsük ki, ezek közül a [vektorok](#) közül melyik sajátvektora az A mátrixnak. A sajátvektorhoz pedig számoljuk majd ki a sajátértékeket is.

b) Számoljuk ki az A [mátrix](#) sajátértékeit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

Itt van egy nagyszerű [mátrix](#), ezzel a három vektorral:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nézzük meg, hogy ezek közül a [vektorok](#) közül melyik sajátvektor, és a sajátvektorokhoz számoljuk ki a hozzájuk tartozó sajátértékeket is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Itt ez a [mátrix](#), és számoljuk ki a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Itt jön aztán ez a 3x3-as [mátrix](#). Számoljuk ki a sajátértékeit, sajátvektorait és a saját [vektorok](#) által generált sajátaltérket.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Itt ez a [mátrix](#), és számoljuk ki a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Itt jön aztán ez a 3x3-as [mátrix](#). Számoljuk ki a sajátértékeit, sajátvektorait és a sajátvektorok által generált sajátaltérket.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A megoldásunk során a Gauss-transzformációt használjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A megoldásunk során a Gauss-transzformációt használjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázis transzformáció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss elimináció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt ez a [mátrix](#).

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki, hogy mennyi A^{10} .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vannak itt ezek a [mátrixok](#), döntsük el, hogy milyen definitiek.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az A mátrixhoz és $\underline{x}$ vektorhoz tartozó kvadratikus alakokat.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

c) Adott a $Q(\underline{x})$ kvadratikus alak, határozzuk meg ebből az A mátrixot.

$$Q(\underline{x}) = 5x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 7x_1x_3 - 6x_2x_3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el az alábbi kvadratikus alakok definittségét.

$$\text{a) } Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$$

$$\text{b) } Q(\underline{x}) = -5x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az x tengelyre való tükrözés mátrixát R^2 -ben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Tükrözzük az x tengelyre a $\underline{v}$ vektort, ha

a) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a bázis [vektorok](#): $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a bázis [vektorok](#): $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

a) $R^2 \rightarrow R^2 \quad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix} \quad a, b \in R$

b) $R^2 \rightarrow R^2 \quad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix} \quad a, b \in R$

c) $R^3 \rightarrow R^3 \quad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \cdot b \\ c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in R$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

$R^3 \rightarrow R^3 \quad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in R$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját:

$R^3 \rightarrow R^3 \quad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in R$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát, adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját.

$$R^3 \rightarrow R^3 \quad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} \quad a, b, c \in R$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg a R^2 -ben az x tengelyre tükrözés, az origó középpontú α -szögű forgatás, és az origóra tükrözés mátrixait.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík transzformációi közül melyek dimenzió tartó transzformációk?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [mátrixok](#) közül melyek hasonlóak.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintő sík

a) Adjuk meg az $f(x, y) = x^5 + y^6 + xy^3 - x^3y^4 + 12$ függvény x és y szerinti deriváltjait.

b) Adjuk meg az $f(x, y) = x^4 + y^2 + 2xy^6 - x^3y^4$ függvény másodrendű deriváltjait.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg az $f(x, y) = x^4 + 4x^2y^3 + y^2$ függvény deriváltvektorát vagy gradiensét.

b) Számoljuk ki ennek a kétváltozós függvénynek a gradiensét vagy deriváltvektorát a $P(2, 3)$ pontban:

$$f(x, y) = 3x^4 - y^3 + x^3y^2.$$

c) Van itt ez a háromváltozós függvény:

$$f(x, y, z) = x^4 - y^3 + z^2 + x \cdot z^3$$

Számoljuk ki a deriváltvektorát a $P(3, 2, 4)$ pontban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Számoljuk ki a $\underline{v} = (3, 4)$ iránymenti deriváltját a $P(2, 1)$ pontban ennek a függvénynek:

$$f(x, y) = x^4 + xy^3 + y^5$$

b) Számoljuk ki a $\underline{v} = (2, 2, 1)$ iránymenti deriváltját a $P(3, 5, 4)$ pontban ennek a függvénynek:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + x \cdot z^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Számoljuk ki a $P = (0, 1)$ pontban milyen irányban emelkedik a legmeredekebben az $f(x, y) = y^4 \cdot e^x - \ln y$ függvény felülete és mekkora ez az emelkedés.

b) Az f függvény által megadott felületre a $P = (3, 6)$ pontban függőlegesen cseppentünk egy vízcseppet. Milyen irányban indul el a vízcsepp a felületen?

$$f(x, y) = x^4 \cdot e^{2x-y} + y^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Számoljuk ki az $f(x, y) = x^4 - x^2y^3 + \ln x$ függvény iránymenti deriváltját a $\underline{v} = (3, 4)$ irány szerint az $(1, 2)$ pontban.

b) Milyen irányban emelkedik a legmeredekebben, és melyik irányban lesz éppen nulla az iránymenti deriváltja a $P(2, 5)$ pontban ennek a függvénynek:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + 8y^2}$$

c) Számoljuk ki az iránymenti deriváltját ennek a függvénynek is a $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ pontban a $\underline{v} = (1, 2)$ irány szerint.

$$f(x, y) = \tan(2x + 3y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg az $f(x, y) = x^3 - x^2y^4 + 4y^3$ függvény $(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

b) Milyen α paraméter esetén halad át a $P(0, 1, 1)$ pontban az $f(x, y) = \ln(\alpha \cdot x + y^2) + ye^x$ függvényhez húzott érintő az $R(1, 0, 1)$ ponton?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg az $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ függvény $P(1, 2)$ ponthoz tartozó x szerinti, y szerinti és z szerinti szintvonalait.

b) Adjuk meg az $f(x, y) = x^2 \cdot y^3 + x \cdot \ln y + y^5$ függvény $P(4, 1)$ ponthoz tartozó x szerinti, y szerinti és z szerinti szintvonalait.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg az $e^x + y^2 = x^3 + \ln y$ implicit függvény deriváltját!

b) Deriváljuk x és y szerint:

$$x^3 + e^y + \ln z = z^2 + e^x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az alábbi kétváltozós függvények x és y szerinti deriváltjait.

a) $f(x, y) = x^4 + e^y + \ln y + \sin x + \cos y + \tan y$

b) $f(x, y) = x^y$

c) $f(x, y) = \ln y \cdot (x^3 + y^4) + e^x \cdot (x^2 + y^2)$

d) $f(x, y) = \ln(x^4 + y^3) + e^{xy^2} + \sqrt[5]{x^6 + e^y}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós függvények

Deriváljuk a következő függvényeket.

a) $f(x, y) = x^5 + y^6 + xy^3 - x^3y^4 + 12$

b) $f(x, y) = x^4 + y^2 + 2xy^6 - x^3y^4$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvények lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

b) $f(x, y) = e^{x-2} - x + \ln(y^2 + 1)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvények feltételes szélsőértékhelyeit.

a) $f(x, y) = xy + 12$, a feltétel: $x^2 + y^2 = 8$

b) $f(x, y) = 12 - x^2 - y^2$, a feltétel: $x - y - 4 = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvények feltételes szélsőértékhelyeit.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4 \rightarrow \min.$, a feltétel: $3x - y = 2$

b) $f(x, y) = x + y + 4 \rightarrow \min.$, a feltétel: $x^2 + y^2 = 8$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 5$, adjuk meg a szintvonalakat $c = 0$, $c = 5$, $c = 10$ és $c = 15$ esetben, utána pedig keressük meg a szélsőértékeket, és vizsgáljuk meg a konvexitást.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük meg a szintvonalak segítségével a következő függvények feltételes szélsőérték helyeit.

a) $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 \rightarrow \min.$, a feltétel: $x - y = 2$

b) $f(x, y) = 10xy \rightarrow \max.$, a feltétel: $x + y = 2$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg az $f(x, y) = x^3 - x^2y^4 + 4y^3$ függvény $(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

b) Milyen α paraméter esetén halad át a $P(0, 1, 1)$ pontban az $f(x, y) = \ln(\alpha \cdot x + y^2) + ye^x$ függvényhez húzott érintő az $R(1, 0, 1)$ ponton?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Számoljuk ki a $\underline{v} = (3, 4)$ iránymenti deriváltját a $P(2, 1)$ pontban ennek a függvénynek:

$$f(x, y) = x^4 + xy^3 + y^5$$

b) Számoljuk ki a $\underline{v} = (2, 2, 1)$ iránymenti deriváltját a $P(3, 5, 4)$ pontban ennek a függvénynek:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + x \cdot z^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg az $e^x + y^2 = x^3 + \ln y$ implicit függvény deriváltját!

b) Deriváljuk x és y szerint:

$$x^3 + e^y + \ln z = z^2 + e^x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy üzemben kétféle terméket állítanak elő. Ha az A típusú eladási ára $\$x$ a B típusúé $\$y$, akkor az alkalmazott ártól függően az A típusból $f(x, y) = 29 - 3x + y$, a B típusból pedig $g(x, y) = 16 + x - 4y$, az eladható heti mennyiség 1000 darabban van megadva. Milyen eladási árakat kell alkalmazni, hogy a profit maximális legyen, ha az A típusú termék előállítás költsége $\$2/\text{darab}$ míg a B típusúé $\$1/\text{darab}$?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőérték helyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = -x^3 + 30xy - 30y^2 + 10$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőérték helyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = 2x^2y + 2xy - 3y^2 + 10$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - 4x^2 - y^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = xy^2 - y^2 - 2 \ln(xy)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = -8x + y + \frac{1}{x^2y}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = 6xy - 3x^2y - y^3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = 2x^3 + y^2 + 6xy + 4$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = 2x + 2y + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y) \quad x, y > 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Írjuk föl az érintősík egyenletét a $P(2, 5, f(2, 5))$ pontban!

$$f(x, y) = 4x^3y^2 - xy - y^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Írjuk föl az érintősík egyenletét a $P(1, -1, f(1, -1))$ pontban!

$$f(x, y) = 6xy - 3x^2y - y^3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Írjuk föl annak az érintősíknak az egyenletét, amely párhuzamos az $z = 3x + 2y - 7$ síkkal és az $f(x, y) = 2x^3y - y^2 + 3x$ függvényt érinti!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Milyen α paraméter esetén halad át a $P(0, 2, 1)$ pontban, az $f(x, y) = e^{\alpha x} + y \cdot \ln(xy^2 + 1)$ függvényhez húzott érintő az $R(1, 3, 1)$ ponton?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Milyen α paraméter esetén halad át a $P(1, 0, f(1, 0))$ pontban, az $f(x, y) = \alpha \cdot x^2 \cdot e^y + y \cdot \ln(xy^2 + \alpha)$ függvényhez húzott érintő az $R(0, 1, 2)$ ponton?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az $f(x, y) = 2x \ln(x^2 - xy^2 - 4)$ függvény totális deriváltját a $P(5, 2)$ pontban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az első- és másodrendű deriváltjait!

$$f(x, y) = yx^5 - 2xy^3 + 4x - 5$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az első- és másodrendű deriváltjait!

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y + e^{2x}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az $f(x, y) = \arctan(y^x)$ gradiensét a $P_0(1, 2)$ pontban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az $f(x, y) = \sin(\ln(y^x))$ gradiensét a $P_0(3, 1)$ pontban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az $f(x, y) = \cos \ln(x^y)$ gradiensét a $P_0(7, 1)$ pontban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$g(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Keressük a következő függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság

Végezzük el az alábbi feladatokat.

a) Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

és igazoljuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} 3x + 4y = 10$$

b) Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = x^2 + x + y^2 + 7$$

és igazoljuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x^2 + x + y^2 + 7 = 13$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x + 5y}{x - 3y} = ?$$

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{2x^2 + xy + y^2} = ?$$

c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^2 + (y-2)^2} = ?$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = ?$$

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{12xy}{x^2 + y^4} = ?$$

c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{12xy}{x^4 + y^4} = ?$$

d)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^6 + y^6} = ?$$

e)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = ?$$

f)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + x^2y^4} = ?$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = x^5 + y^6 + xy^3 - x^3y^4 + 12$$

Adjuk meg az x és y szerinti parciális deriváltjait.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

Differenciálható-e az $R(1, 2)$ pontban?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = x \cdot \cos y$$

és igazoljuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \cos y = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

és igazoljuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = 2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5$$

és igazoljuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x^2 + 3y^2 + 5 = 18$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

és igazoljuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

és igazoljuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

és igazoljuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} x^2 + y^2 = 25$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

Differenciálható-e az $R(1, 2)$ pontban?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = x^2 y$$

Differenciálható-e az $R(2, 3)$ pontban?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = xy^2$$

Differenciálható-e az $R(1, 0)$ pontban?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt van ez a függvény

$$f(x, y) = xy^2$$

Differenciálható-e az $R(2, 1)$ pontban?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kettős és hármas integrál

Határozzuk meg az alábbi [kettős integrál](#) értékét:

a)

$$\int_1^2 \int_0^1 x^2 + xy^4 + y^3 \, dx dy$$

b) Határozzuk meg az alábbi kettősintegrál értékét, ahol D az $y = 2 - x$ egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott derékszögű háromszög!

$$\iint_D x^2 + 4y^3 \, dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Határozzuk meg az alábbi kettősintegrál értékét, ahol D az $y = 2 - x$ és $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ által közrefogott tartomány!

$$\iint_D x + 4y \, dy dx$$

b) Határozzuk meg az alábbi kettősintegrál értékét, ahol D az $y = \sqrt{x}$ és $y = x^2$ által közrefogott tartomány!

$$\iint_D xy \, dy dx$$

c) Határozzuk meg az alábbi kettősintegrál értékét, ahol D az $y = \sqrt{x}$ és $y = x^2$ által közrefogott tartomány!

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}} \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Végezzük el az alábbi intergálásokat.

a)

$$\int_0^1 \int_1^2 x e^{xy} dx dy$$

b)

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \cos y^2 dy dx$$

c)

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{1+y^3} dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 5 - x^2 - y^2 dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a $D : x^2 + y^2 \leq 9$ tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 4$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ felületek által határolt térrész térfogatát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Végezzük el az alábbi intergálásokat.

a)

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_1^2 (x + y + z) dx dy dz$$

b)

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^2 1 dx dy dz$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_0^5 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-2}^2 1 \, dx dy dz$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk az origó középpontú $R = 5$ sugarú gömbön ezt a függvényt:

$$f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D: \sqrt{x^2 + y^2} < z \quad \& \quad x^2 + y^2 + z^2 < 4$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$$

$$D: \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} \quad \& \quad x^2 + y^2 + z^2 < 9$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 3x - 2y^3 + 2 \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(xy + 2)^2} \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_0^1 \int_0^2 (y + e^{3x} - 1) \, dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{6y}{(2x + 3y^2 + 1)^2} \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_0^1 \int_0^2 (x^2 - 1) \cdot e^{-3y} \, dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozzuk meg az alábbi kettősintegrál értékét, ahol T az A(0,0), B(6,0), C(3,4), és a D(1,4) pontok által meghatározott trapéz!

$$\iint_T y^2 \, dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozzuk meg az alábbi kettősintegrál értékét, ahol T az A(0,0), B(5,0), C(4,6), és a D(3,6) pontok által meghatározott trapéz!

$$\iint_T e^{6x+y} \, dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozzuk meg az alábbi kettősintegrál értékét, ahol T az A(2,0), B(4,0), C(0,4), és a D(6,4) pontok által meghatározott trapéz!

$$\iint_T x + y^2 \, dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_0^{16} \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^2 \sqrt[5]{1+x^3} \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25 \quad 0 \leq x \quad 0 \leq y$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25 \quad x \leq y \quad -\sqrt{3}x \leq y$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y) = xy \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25 \quad 3x^2 \leq y^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y) = xy$$

$$D: x^2 - 4x + y^2 \leq 21$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 2 - x^2 - y^2$ felületek által határolt térrész térfogatát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a következő függvényt:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x^2 + y^2 \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a következő függvényt:

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \, dy dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a következő függvényt:

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$D: \sqrt{x^2 + y^2} < z \quad \& \quad 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y, z) = z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D: 12 \leq x^2 + y^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \quad \& \quad 0 \leq z$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráljuk a D tartományon a következő függvényt:

$$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$D: 12 \leq x^2 + y^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \quad \& \quad 0 \leq z$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi integrált.

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját azon a véges tartományon, amelyet az adott egyenletű görbék zárnak közre.

$$f(x, y) = 2x \cos y \quad y = x^2 \quad y + x = 6 \quad y = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vázoljuk fel az integrálási tartományt, majd számítsuk ki a megadott függvény kettős integrálját!

$$f(x, y) = \frac{8y}{x^3} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4 \quad \sqrt{x} \leq yx\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az $f(x, y) = e^y + x$ kettős integrálját azon a tartományon, melyet az x tengely, az $x = 4$ egyenes és az $y = \ln x$ függvények határolnak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)
