MATEKING.HU

Feladatgyűjtemény

MATEMATIKA VILLAMOS NJE tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 11. 16.

Tartalomjegyzék

Halmazok, rendezett párok, leképezések..... **2**

Matematikai logika, ítéletkalkulus..... **6**

Gráfelméleti alapok..... **8**

Gráfok izomorfiája és síkbarajzolhatósága..... **11**

Gráfok bejárása és gráfalgoritmusok..... **24**

Kromatikus szám, klikk, perfekt gráfok..... **34**

Gráfparaméterek, párosítások..... **44**

Hálózatok, maximális folyam, minimális vágás..... **53**

Irányított gráfok, gráfalgoritmusok irányított gráfokban..... **64**

Legkisebb négyzetek módszere, legjobb lineáris közelítés..... **68**

Páros gráfok, párosítások..... **72**

Menger tételei, többszörös összefüggőség..... **74**

Mátrixok..... **75**

Vektortér, lineáris függetlenség, bázis..... **78**

Lineáris egyenletrendszerek..... **83**

Determináns, adjungált, kvadratikus alakok..... **90**

Sajátérték, sajátvektor, sajátfelbontás..... **94**

Lineáris leképezések..... **98**

Halmazok, rendezett párok, leképezések

Adottak az A és B halmazok:

$A=\{1,2,3,4,7,8\} \quad B=\{1,3,4,5,6\}$

Határozzuk meg...

a két halmaz metszetét!

a két halmaz unióját!

$B \setminus A$-t!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A halmaz legyen a $[2,6]$ zárt intervallum, a B halmaz pedig az $]1,4[$ nyílt intervallum.

Határozzuk meg ezeket:

$A \cap B \quad A \cup B \quad A \setminus B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy osztályban 12-en utálják a matekot és 18-an a fizikát. Összesen 20-an vannak, akik a kettő közül legalább az egyiket utálják. Hányan utálják mindkettőt?

b) Egy osztályba 20 tanuló jár. Az osztály összes tanulója közül 9-en szeretik a matekot és közülük 5 lány. Tudjuk még, hogy 5 fiú nem szereti a matekot. Hány lány jár az osztályba?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy osztályba 20-an járnak. Közülük 16-an vannak, akik a matekot és a fizikát is utálják. Hányan vannak, akik legalább az egyik tantárgyat szeretik?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adottak a G és H halmazok:

$G=\{1,2,3,4,6,12\} \quad H=\{1,2,4,8,16\}$

Határozzuk meg a $G \cap H$ és $G \setminus H$ halmazokat!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adjuk meg az $A \cap B$ és $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy városban 60 étterem, 56 bár és 36 reggeliző hely üzemel. Olyan, ami étterem és bár is egyben 16 darab van, ami reggelizőként és bárként is üzemel, olyanból 20 darab van, és ami reggeliző és étterem is, olyan 11 darab van. 4 olyan hely van, ami reggelizőként, étteremként és bárként egyszerre működik. Hány olyan bár működik a városban, ami nem étterem és nem reggeliző hely?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van három halmaz, $A=\{2,3,5,7,11\}$, $B=\{x\in Z^{+}|1\leq x^2\leq 24\}$ és C pedig a 15 pozitív osztóinak halmaza. Ábároljuk ezeket a halmazokat és adjuk meg elemeinek felsorolásával az $A\cup B\cap C$ és az $A\cap B\setminus C$ halmazokat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egyenlő-e ez a két halmaz?

$A=\{4;6;5;7\}\quad B=\{7,6,5,4\}$

b) Soroljuk fel az $A=\{x,y,z\}$ halmaz összes részhalmazát.

c) Hány elemű lesz B-nek a hatványhalmaza?

$B=\{5,6,7,8\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Igaz-e a következő?

$(A\Delta B)\Delta A=A$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bizonyítsuk be, hogy

a) $(A\cup\overline{B})\cap B=A\cap B$

b) $(A\setminus(B\setminus A)=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$

c) $A\Delta((B\cup A)\Delta A)\Delta B=(A\cap B)\Delta(A\setminus B)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Hogyha A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cap B = A \cup B$, akkor vajon igaz-e, hogy $A \Delta B = A \setminus B$?

b) Hogyha A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \Delta B = B$, akkor vajon igaz-e, hogy $(A \cup B) \Delta (A \cap B) = B \setminus A$?

c) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B halmazokra teljesül, hogy:

$$(A \cup \overline{B}) \cap B \subseteq (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$$

d) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B és C halmazokra teljesül, hogy:

$$(A \cup B) \setminus (C \cap (B \setminus A)) = A \cup (B \setminus C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az $A = \{1,2\}$ és $B = \{a,b,c\}$ halmazok Descartes-szorzatát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy biztosítóhoz az egyik hónapban 24 autós biztosítási kárigény érkezett, és ezek közül 8-an más kárigényt is benyújtottak. Lakásbiztosításra 7 igény érkezett, és egyéb igény 17. 30 olyan ügyfél volt, aki csak egy igényt nyújtott be, 1-1 olyan ügyfél volt, aki a lakáson kívül még pontosan egy kárigényt nyújtott be és nem volt olyan, aki mindhármat. Készítsünk ábrát, és állapítsuk meg, hogy hányan vannak, akik pontosan két kárigényt nyújtottak be!

b) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai egyesület közül legalább az egyikben. Az atlétikai egyesületnek 36 tanuló tagja, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda egyesületnek is tagja.

1) Ábrázoljuk az egyesületekben sportoló diákok megoszlását halmazokkal.

2) Hányan sportolnak a kosárlabda egyesületben?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étteremben legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $A = \{x \in R | \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5-x}\}$ és $B = \{x \in R | \log_{\frac{1}{2}} (2x-4) > -2\}$.

Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Jelölje A az $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$ egyenlőtlenség egész megoldásainak halmazát, B pedig az $|x+3| < 4$ egyenlőtlenség egész megoldásainak halmazát. Elemei felsorolásával adja meg az $A \cup B$, az $A \cap B$, és az $A \setminus B$ halmazt!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Matematikai logika, ítéletkalkulus

Van itt ez az állítás: "Minden mamut sárga."

Válasszuk ki innen azokat, amik az állítás tagadása:

Egyik mamut sem sárga.

Van olyan mamut, ami sárga.

Van olyan mamut, ami nem sárga.

A legtöbb mamut nem sárga.

Nem minden mamut sárga.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Dontsük el az alábbi állításokról, hogy igazak, vagy hamisak.

a) Esik az eső és a mamut piros.

b) Esik az eső vagy a mamut piros.

c) Ha esik az eső, akkor a mamut piros.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Készítsük el az alábbi állítások igazságtábláit.

a) $\neg A \wedge \neg B$

b) $A \wedge \neg B$

c) $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$

d) $\neg A \Rightarrow (A \wedge B)$

e) $\neg A \wedge (A \vee B)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Van itt két láda. Az egyikben arany van, a másik üres, a ládákon lévő feliratok pedig lehetnek igazak vagy hamisak is. Anélkül, hogy hozzárénénk a ládákhoz, meg tudjuk-e mondani, hogy melyikben van az arany?

A ládák feliratai: "Ha a másik ládában van az arany, akkor mindkét ládában hamis felirat van." és "Az arany nem ebben a ládában van."

b) Ezúttal már három láda van. Az egyikben arany van, a másik kettő üres, a ládákon lévő feliratok pedig lehetnek igazak vagy hamisak is.

A ládák feliratai:

"A másodikon ládán a felirat igaz."

"Az arany ebben a ládában van és az első ládán a felirat hamis."

"Az arany olyan ládában van, amin a felirat hamis."

c) Most pedig tegyünk egy kört a lovagok és lókötők szigetén. Ezen a szigeten kétféle ember él, akik külsejük alapján teljesen egyformák. Csak éppen a lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak. Találkozunk két szigetlakóval.

X azt mondja: "Ha Y lovag, akkor én lókötő vagyok.". Y nem mond semmit. Milyen típusú X és Y?

d) Egy másik alkalommal három szigetlakóval találkozunk, akik ezt mondják:

X: "Y lókötő és Z lovag."

Y: "Lókötő vagyok és Z lovag."

Milyen típusú X, Y és Z?

e) Végü legy újabb esetben ismét három szigetlakóval találkozunk, akik ezt mondják:

X: Y lovag.

Y: X lókötő és Z lovag.

Milyen típusú X, Y és Z?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Tagadjuk a következő állítást:

"Az áldozat a szobában van, és ha nem találják meg, akkor holnap is ott lesz."

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mi a teljes diszjunktív normálformája?

a) $A \Rightarrow (B \wedge C)$

b) $(A \Leftrightarrow B) \wedge \neg A$

c) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \vee B)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfelméleti alapok

Oldjuk meg az alábbi gráfos feladatokat:

a) Egy tárgyalás elején minden résztvevő mindenkivel kezet fog. Így összesen minden résztvevő 4 másikkal fog kezet. Hányan vesznek részt a tárgyaláson és hány kézfogás volt összesen?

b) Egy iskolai versenyen Anna, Bence, Cecil, Dávid, Elemér, Fanni, Gábor, és Hanna játszanak egymással. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik.

Anna már játszott Bencével, Gáborral és Hannával.

Bence már játszott Annával, Cecillel és Gáborral.

Cecil csak Bencével, Dávid pedig csak Elemérrel játszott.

Rajzoljuk fel azt a gráfot, ami a jelenlegi állást tartalmazza! Hány játszma van még hátra?

c) Egy ötpontú teljes gráf csúcsai A, B, C, D, E.

Mekkora a B csúcs fokszáma?

Ha a gráfból két élt törlünk, milyen lehetséges értékek adódhatnak B fokszámára?

Mekkora lesz a két él törlése után a csúcsok fokszámainak összege?

Hány élt kell törölni ahhoz, hogy minden csúcs fokszáma 3 legyen?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismerettségek kölcsönösek). Az első öt személy válasza: 5, 4, 3, 2, 1. Ábrázoljuk a gráffal a társaság ismerettségi viszonyait! Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban?

b) Rajzoljunk egy olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0, 1, 2, 2, 3, 4.

c) Egy irodában összesen 11-en dolgoznak. Egy adott napon a 11 ember ennyi kollégájával találkozott: 0, 1, 2, 2, 2, 5, 0, 0, 4, 4, 2.

Ábrázoljuk a találkozásoknak egy lehetséges gráfját. Hány találkozás volt összesen?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg a könisbergi-hidak rejtélyét.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan gráf, amelyben a pontok fokszáma:

a) 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6

b) 2, 2, 4, 4, 5, 7, 7, 7

c) 3, 3, 4, 4, 5, 7, 7, 7

d) 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl. Szemléltessük gráffal a lejátszott mérkőzéseket!

b) Egy iskola asztali tenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

Rajzold le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!

Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Öt különböző számjegyet leírtunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak, vagy hamisak!

a) Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

b) Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az ábrán egy 3x3-as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A1, A2, ..., C3) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.

a) Rajzoljuk fel a kirakós játék gráfját, és határozzuk meg a fokszámok összegét!

b) Igazoljuk, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan kör, amely páratlan sok élből áll!

c) A teljesen kirakott képen jelöljünk meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakós játék általuk alkotott részlete már ne legyen összefüggő!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Rajzolj egy olyan 5 pontú gráfot, melyben a pontok fokszáma: 4, 3, 3, 2, 2

b) Rajzolj egy olyan 6 pontú gráfot, melyben a pontok fokszáma: 0, 1, 2, 2, 3, 4.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan fa, amelyben a pontok fokszáma:

a) 1, 1, 2, 2, 3, 4?

b) 1, 2, 2, 2, 3, 4?

c) 1, 1, 1, 1, 1, 5?

d) 1, 1, 1, 2, 2, 3?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan gráf, amelyben a pontok fokszáma: 6, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok fokszáma 7, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok fokszáma 7, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal, ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

a) Lehetséges, hogy fagráfot kapunk?

b) Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfok izomorfiája és síkbarajzolhatósága

a) Egy 24 csúcsú G egyszerű gráfban 12 csúcs foka 5, a másik 12 csúcs foka pedig 16. Összefüggő-e a G gráf komplementere?

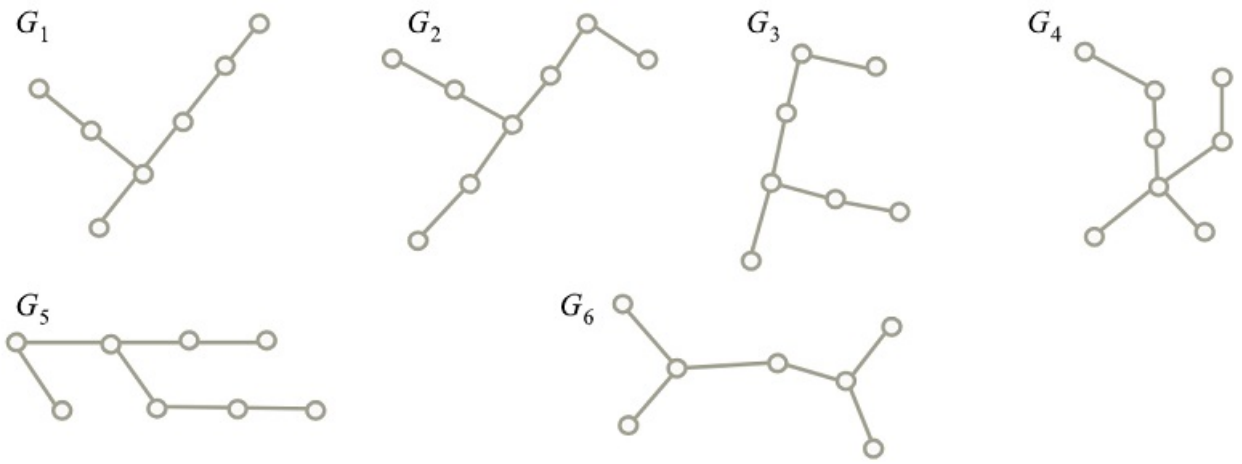
b) Egy összefüggő egyszerű gráfnak 40 csúcsa és 42 éle van. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban 3 különböző kör. Két kör akkor különböző, ha van legalább egy olyan él, amelyiket az egyik kör tartalmazza, de a másik nem.

c) Egy összefüggő egyszerű gráfnak 1000 csúcsa és 1000 éle van. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban 3 különböző feszítőfa. Két feszítőfa akkor különböző, ha van legalább egy olyan él, amelyiket az egyik feszítőfa tartalmazza, de a másik nem.

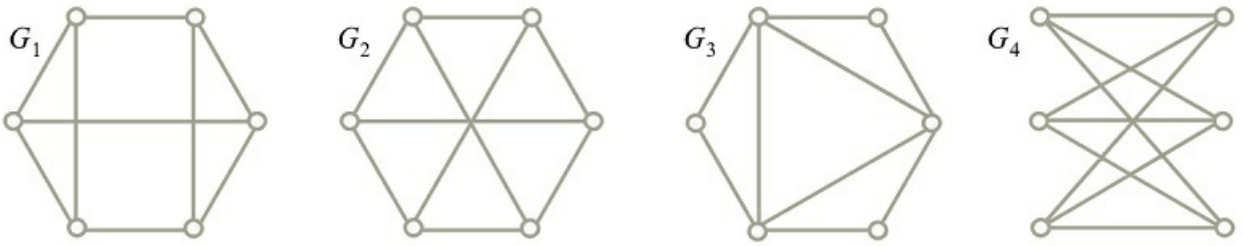
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbáljuk meg kitalálni, hogy mely gráfok izomorfak egymással.

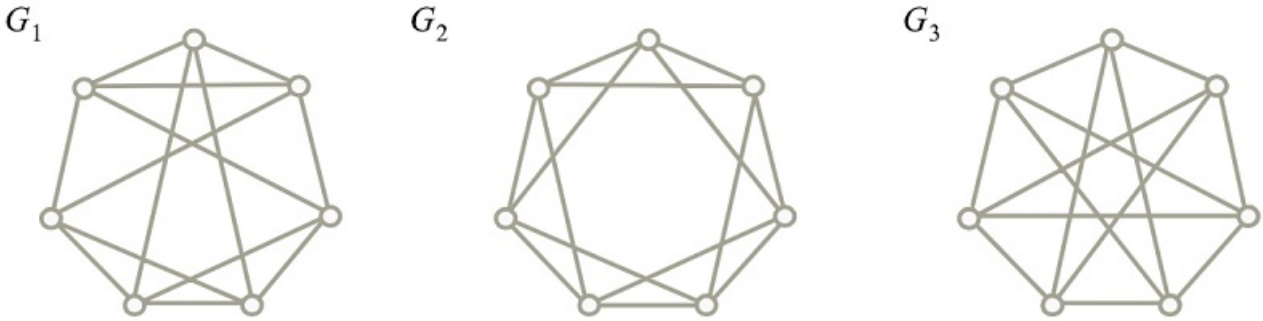
a)



b)

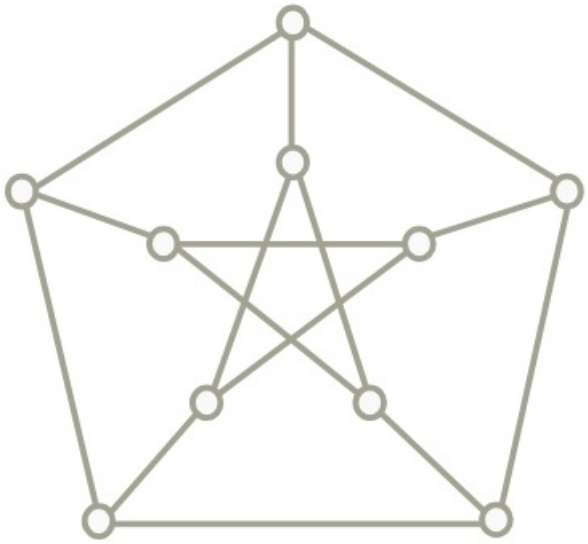


c)



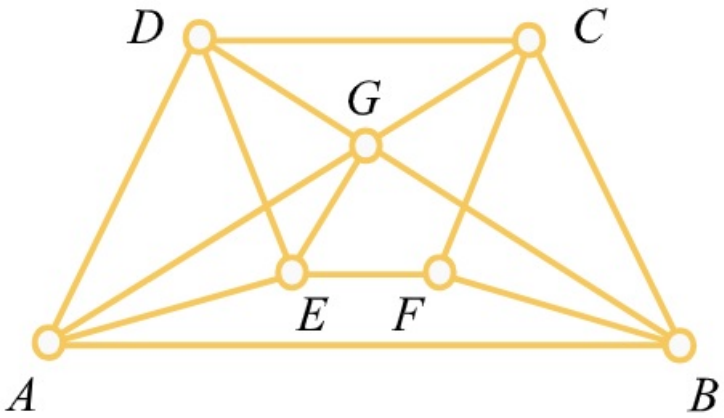
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nézzük meg, hogy síkbarajzolható-e.

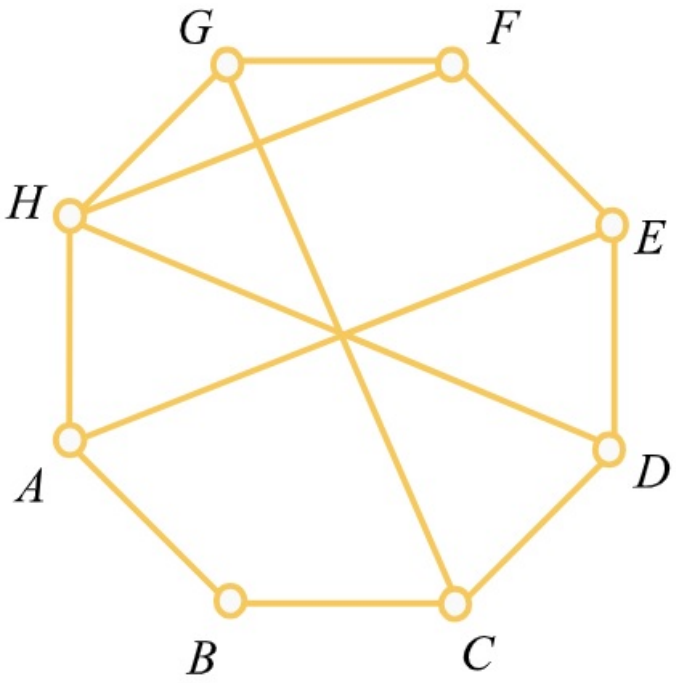


Megnézem a kapcsolódó epizódot

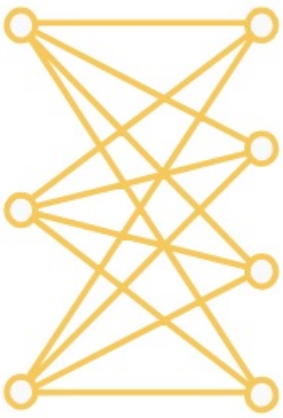
a) Döntsük el, hogy síkbarajzolható-e. Ha igen, rajzoljuk síkba.



b) Döntsük el, hogy síkbarajzolható-e. Ha igen, rajzoljuk síkba.



c) Legalább hány élt kell törölnünk ebből a gráfból, hogy a megmaradt gráf síkbarajzolható legyen?



Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy 100 pontú gráfról tudjuk, hogy 50 csúcs mindegyikének a foka legfeljebb 7 a másik 50 csúcs foka pedig legalább 56. Hány éle van ennek a gráfnak?

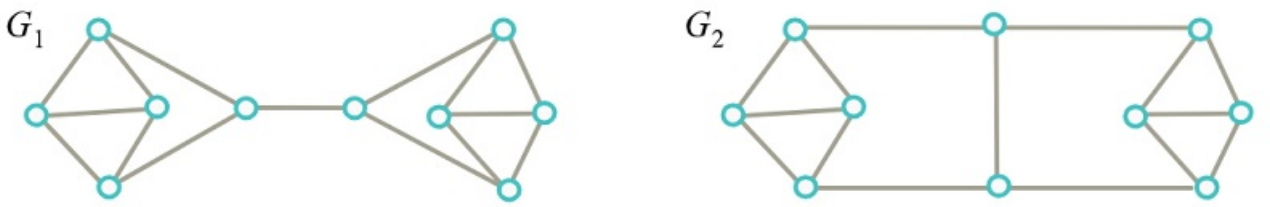
b) Egy konferencián 60-an vesznek részt. A résztvevők közül 20-an már legalább 27 emberrel kezetfogtak, a többiek pedig még csak legfeljebb 4 emberrel. Hány kézfogás történt eddig?

c) Bizonyítsuk be, hogy egy G gráf és a komplementere közül legalább az egyik összefügő.

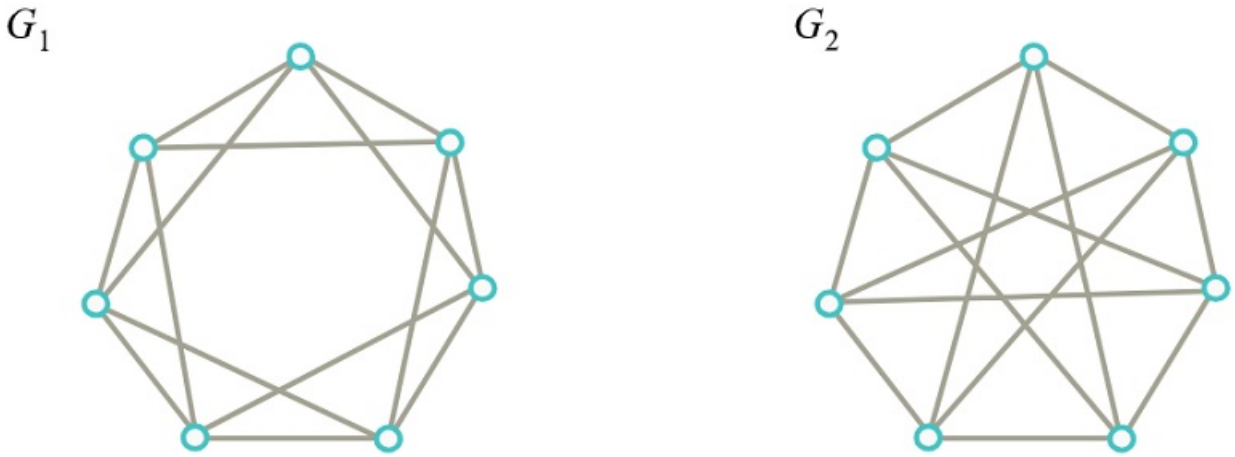
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

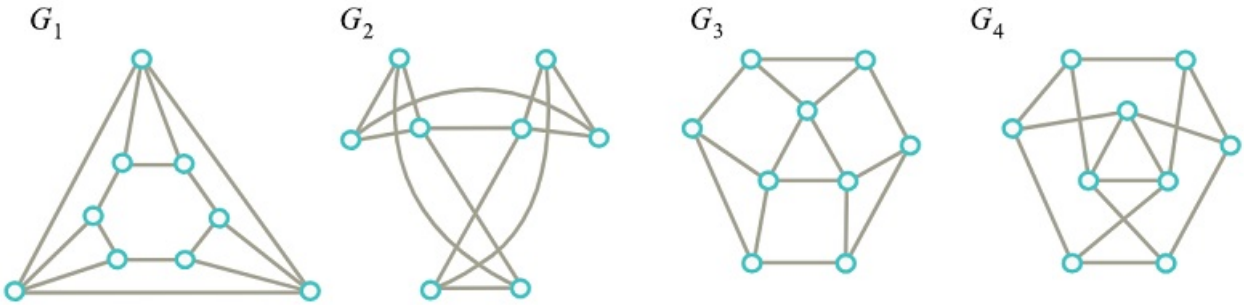
a)



b)



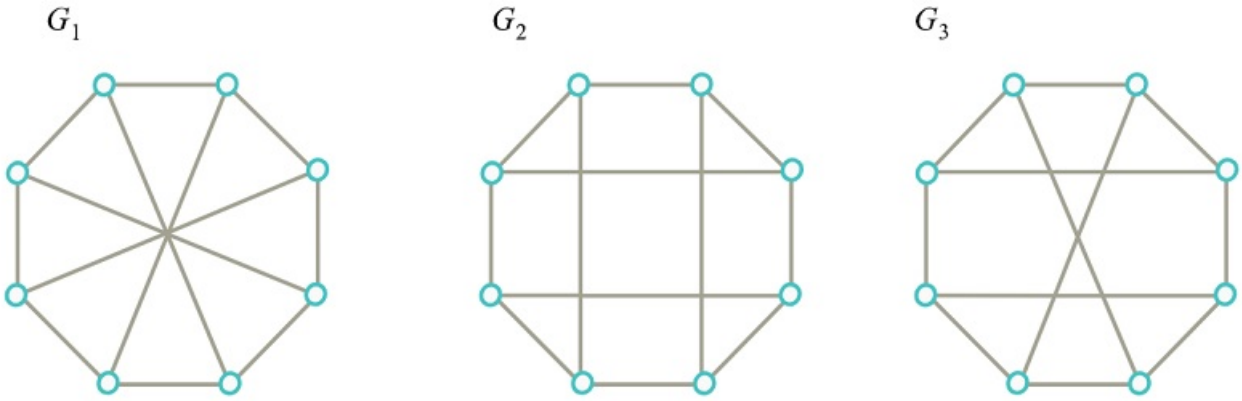
c)



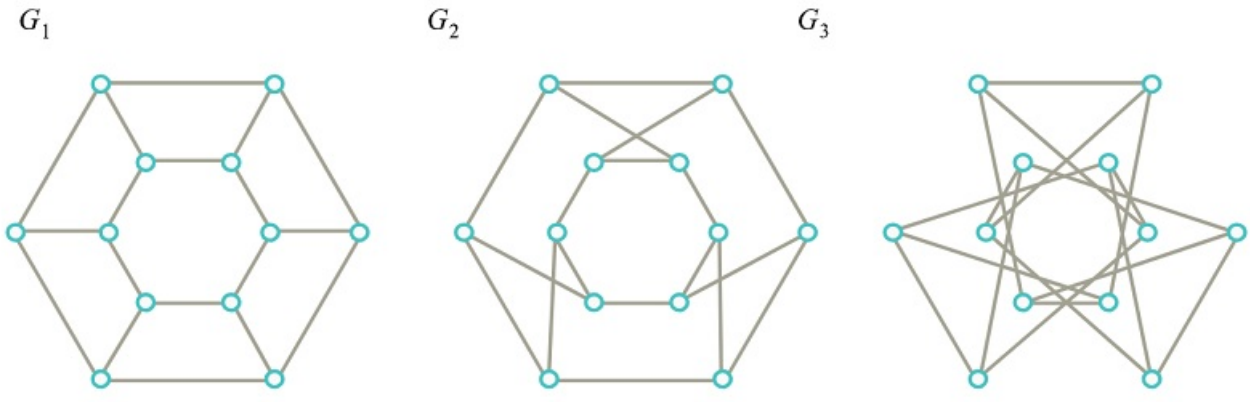
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

a)



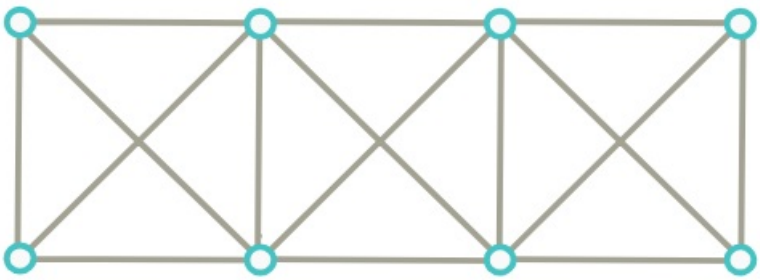
b)



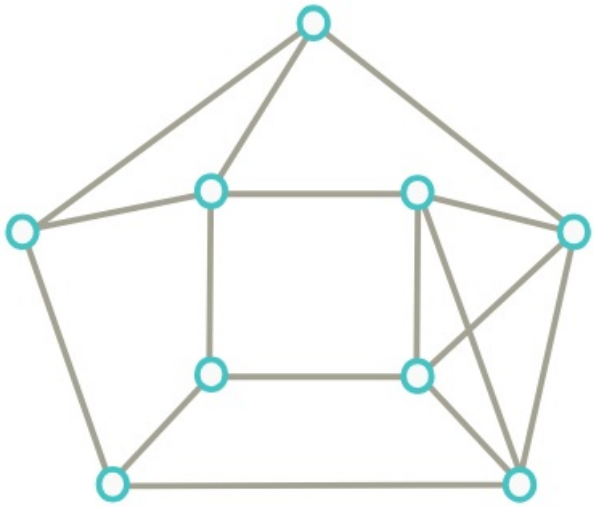
Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

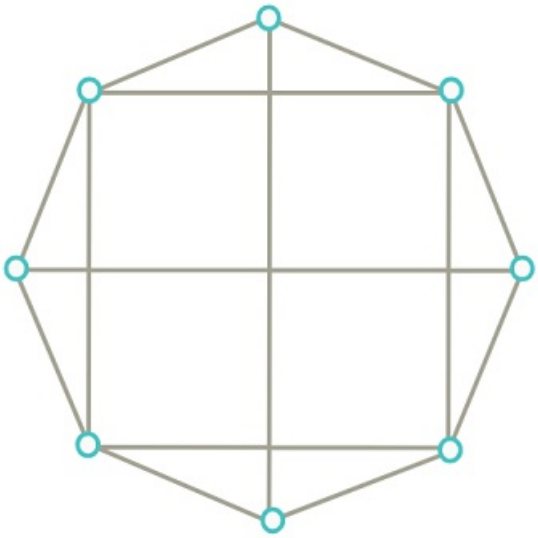
a) Maximálisan hány élt lehet hozzávenni az alábbi gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk?

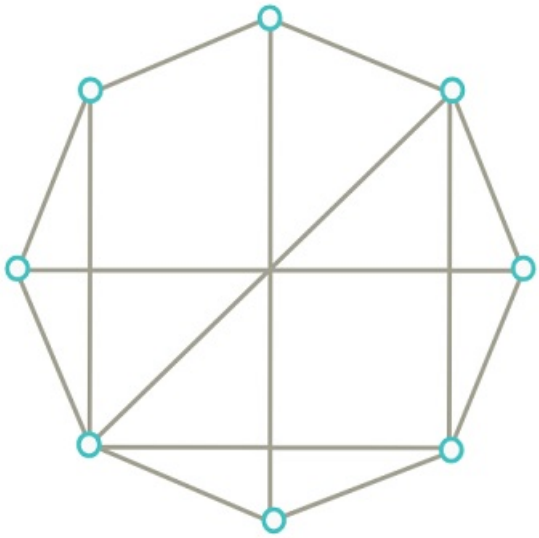


b) Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek, ha nem, akkor bizonyítsuk be ezt.

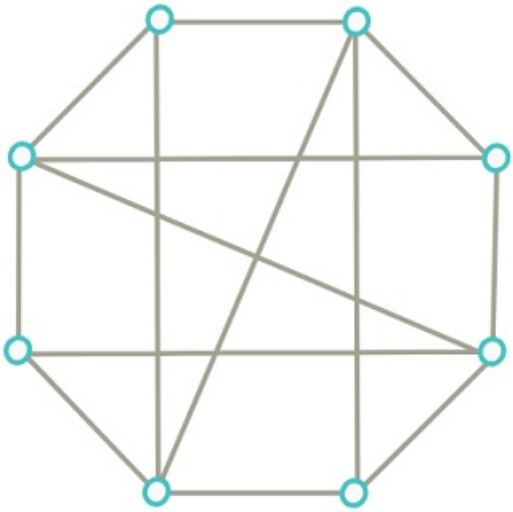


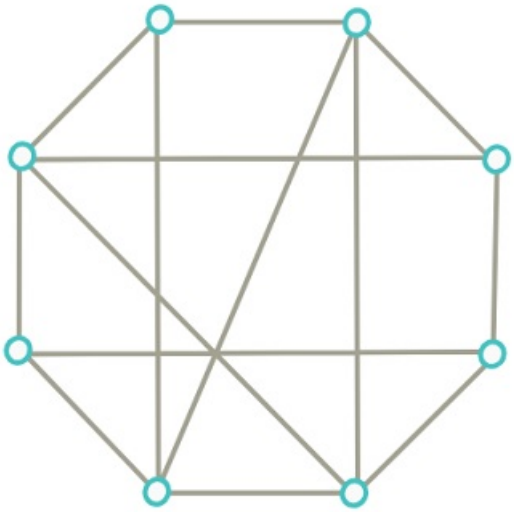
c) Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



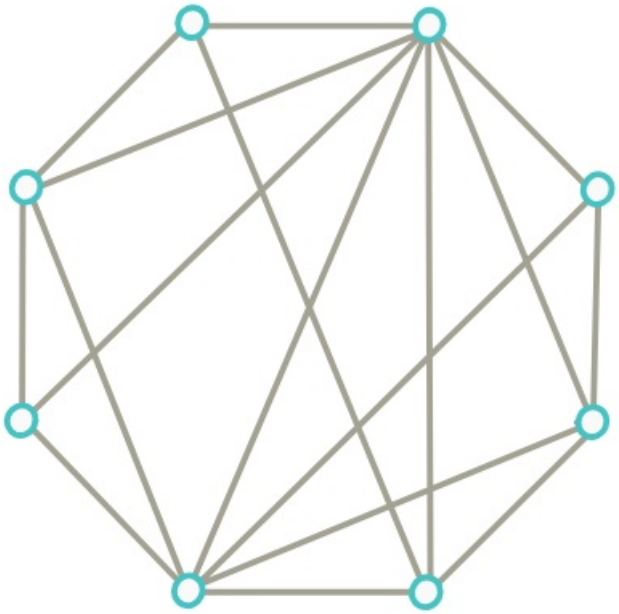


d) Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?





e) Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráfban van olyan csúcs, melynek foka legfeljebb 5.

b) Legyen G egy 13 pontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G és a komplementere közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.

c) Létezik-e olyan 4, 5, illetve 6 csúcsú gráf, amely izomorf a saját komplementerével?

d) Az 1000 csúcsú G gráf nem tartalmaz kört, a komponenseinek száma 8. Hány éle van G-nek?

e) Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 7-szer, a másik 44-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Hány csúcsa van egy síkbarajzolható 3-reguláris gráfnak, ha a síkbarajzolás során 20 tartomány keletkezik?

b) Egy versenyre 6 különböző országból érkeztek versenyzők. Bizonyítsuk be, hogy van köztük két olyan versenyző, akiknek az országa nem határos egymással.

c) Egy versenyre különböző országból érkeztek versenyzők. Legfeljebb hány országból indulhattak a versenyzők, ha bármelyik két versenyző szomszédos országból érkezett?

d) Egy 20 csúcsú, 3 komponensű gráfnak 18 éle van. Mutassuk meg, hogy a komponensek közül pontosan kettő fa.

e) Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élt úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.

f) Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van olyan csúcs, melyet a gráfból elhagyva (az összes rá illeszkedő éllel együtt) összefüggő gráfot kapunk.

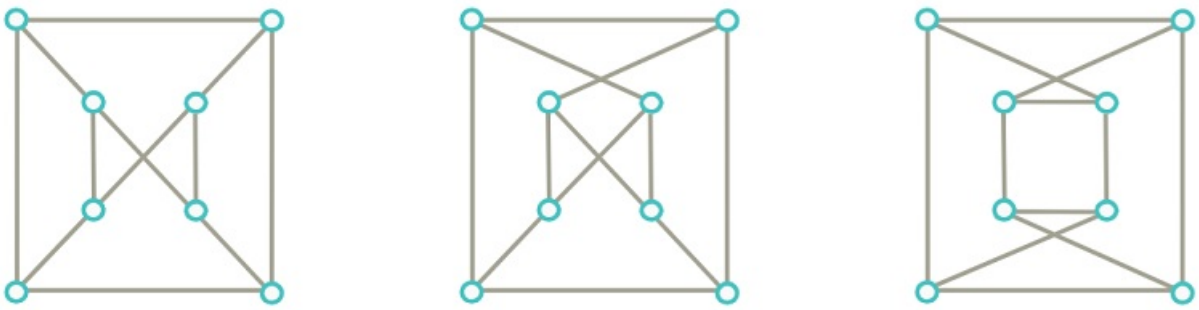
g) Rajzoljuk le az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát. (Az izomorfakat csak egyszer)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

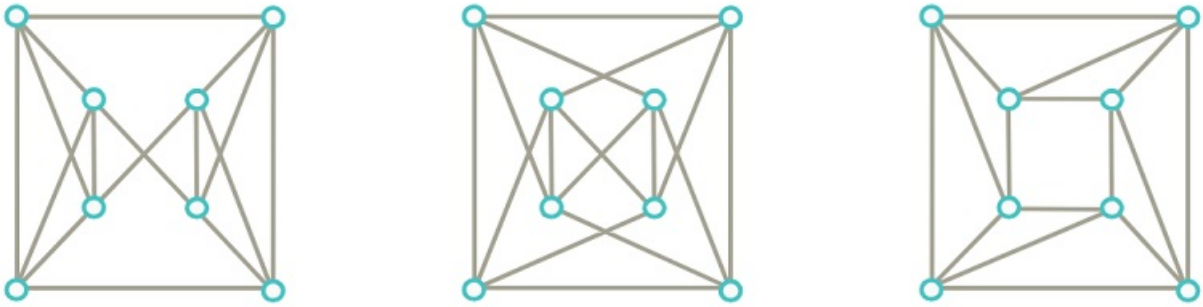
a)

G_1 G_2 G_3



b)

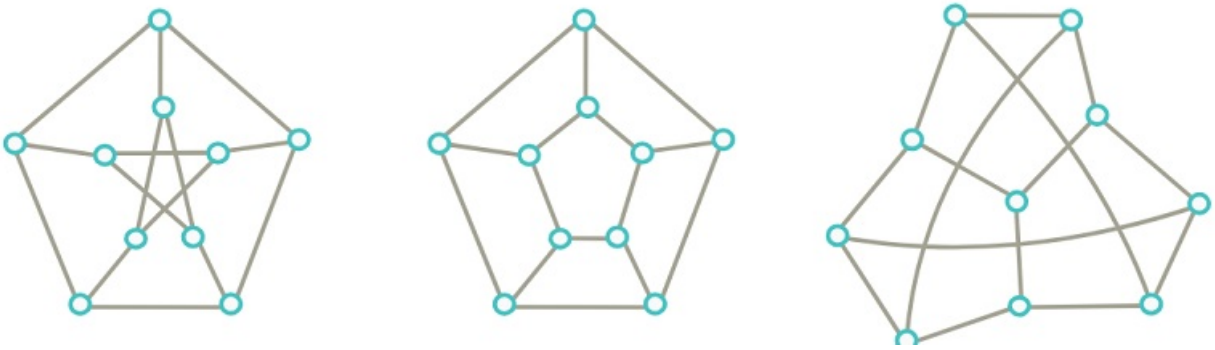
G_1 G_2 G_3



Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

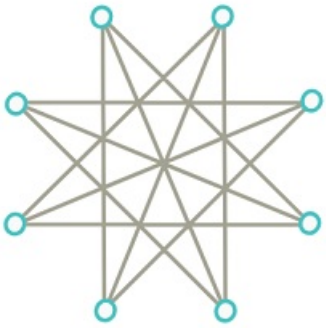
G_1 G_2 G_3



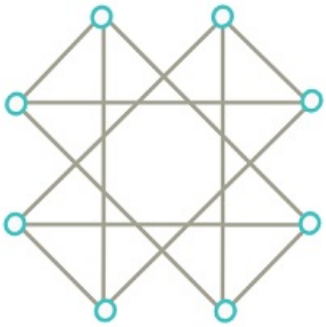
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

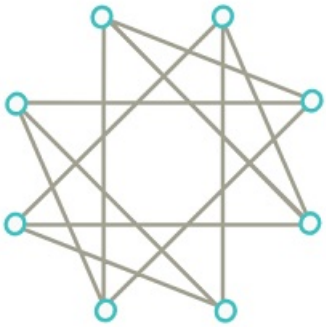
G_1



G_2



G_3

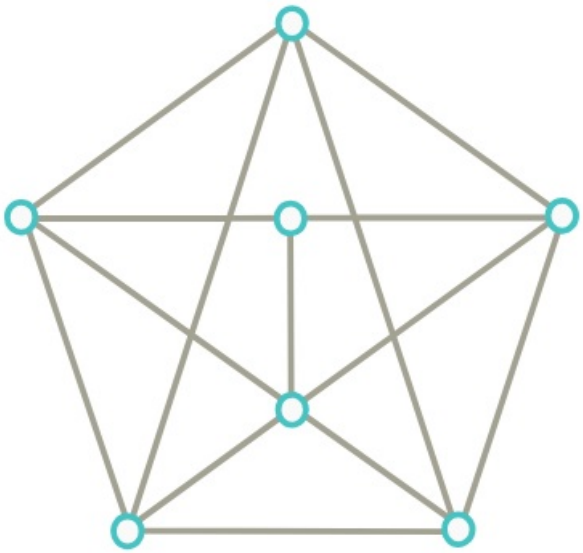


Megnézem a kapcsolódó epizódot

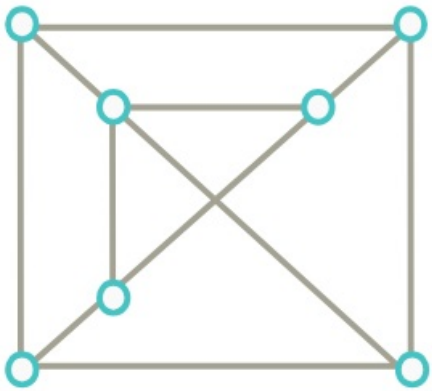
Döntsük el, hogy síkbarajzolható-e.

Ha igen, rajzoljuk síkba.

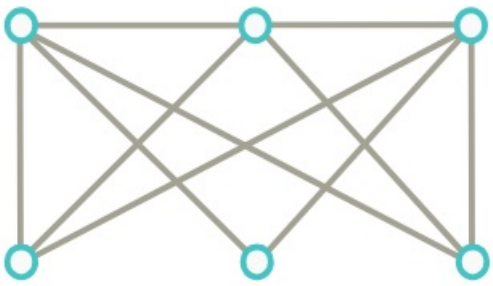
a)



b)



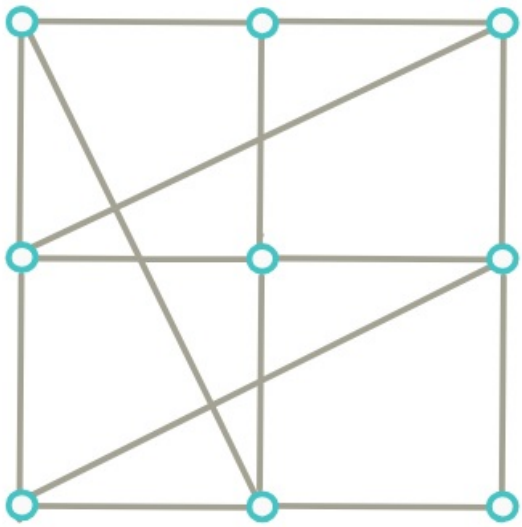
c)



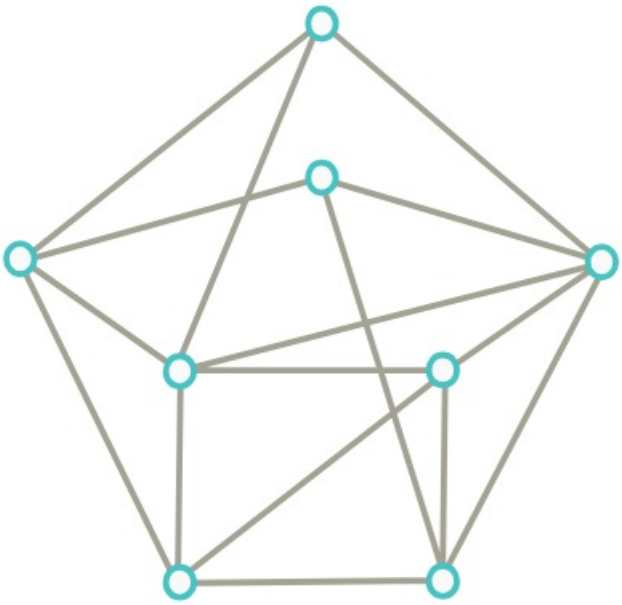
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi gráfok síkbarajzolhatók-e.

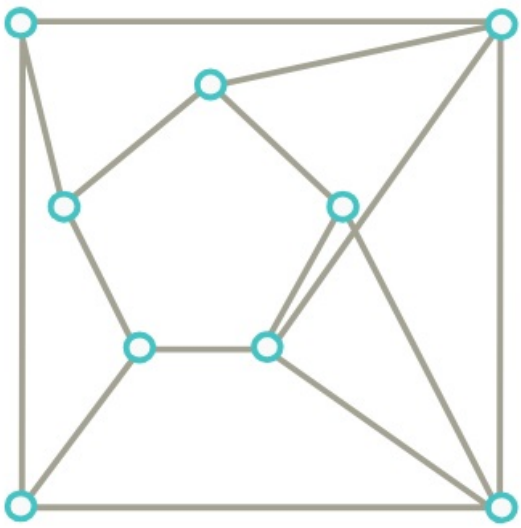
a)



b)



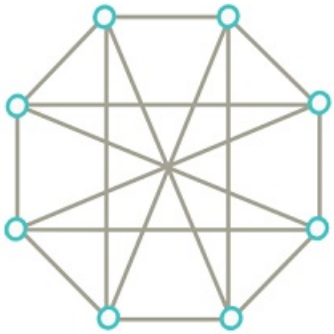
c)



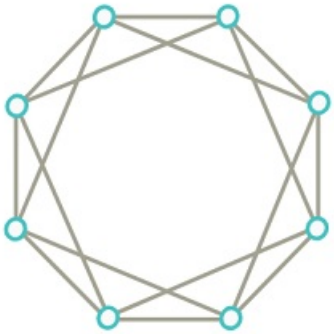
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

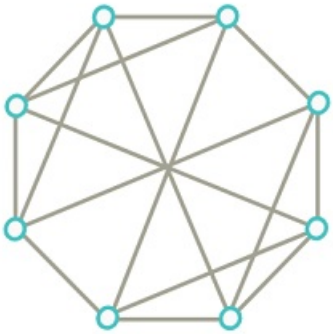
G_1



G_2



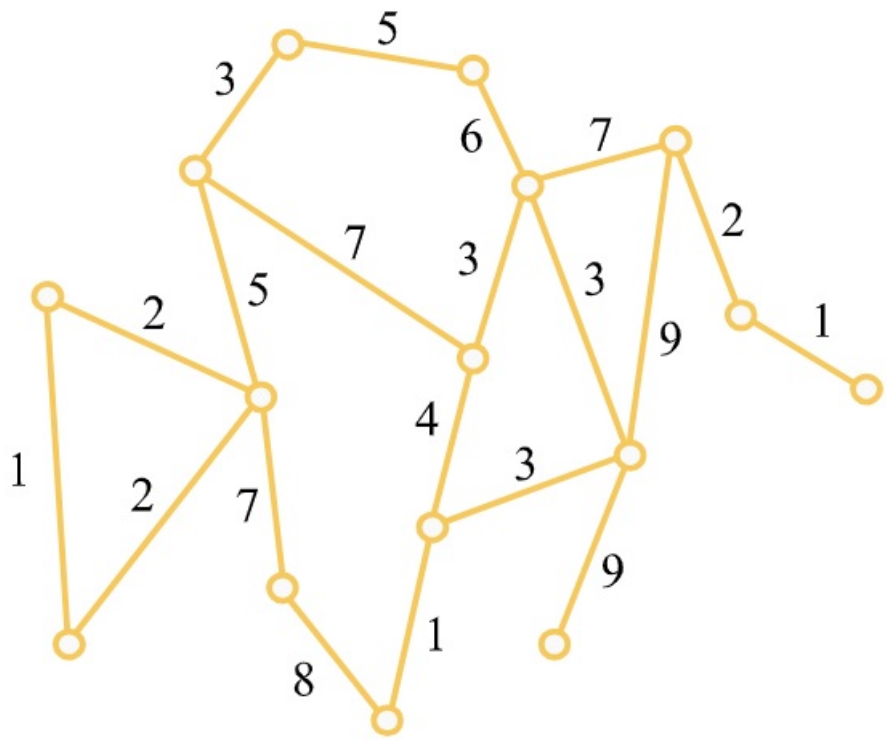
G_3



Megnézem a kapcsolódó epizódot

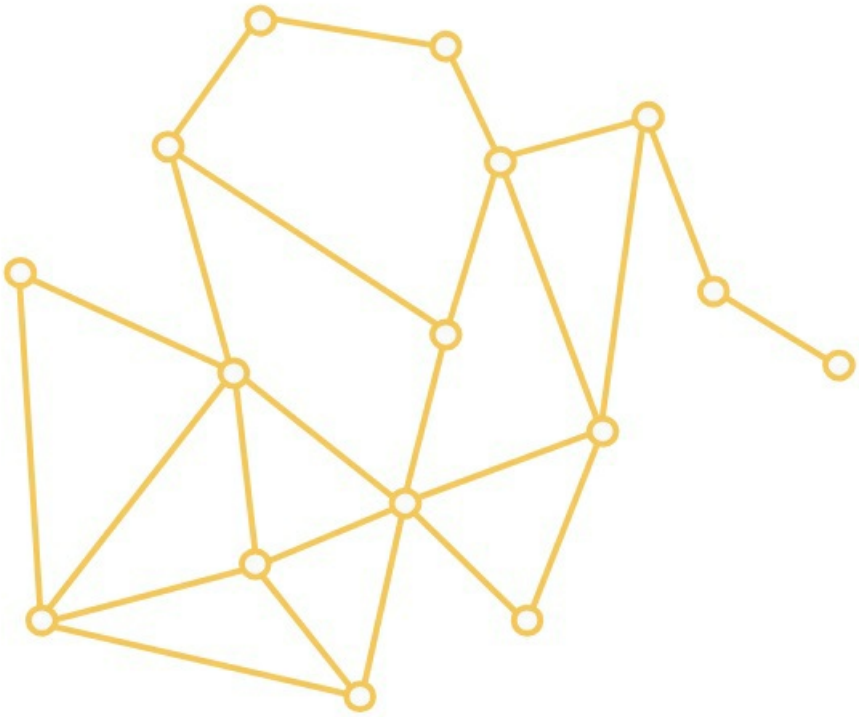
Gráfok bejárása és gráfalgoritmusok

Adjuk meg ennek a gráfnak a minimális súlyú feszítőfáját a Kruskal-algoritmus segítségével.



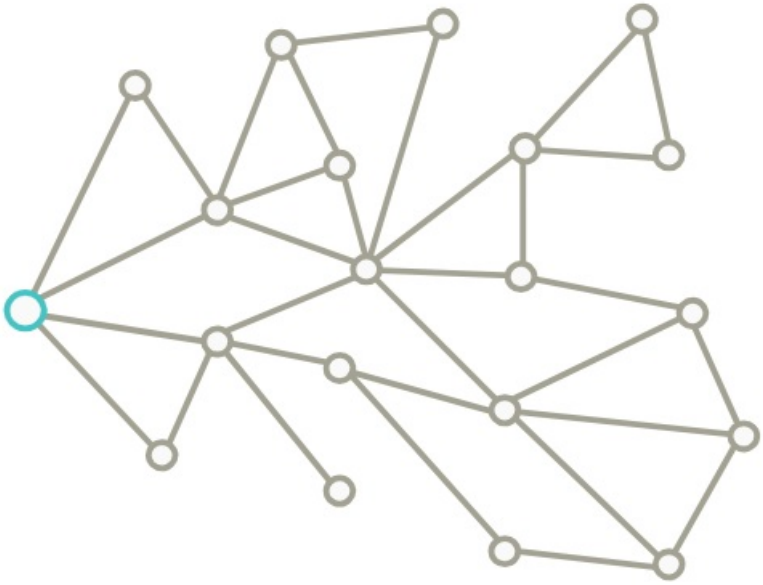
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Térképezzük föl az alábbi gráfot a szélességi bejárás (BFS) segítségével.



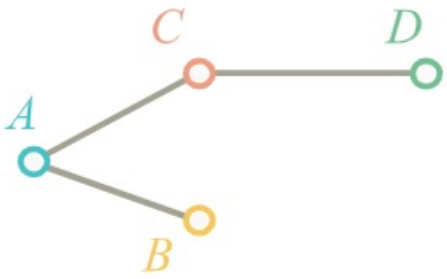
Megnézem a kapcsolódó epizódot

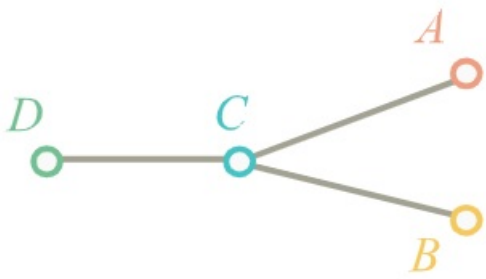
Térképezzük föl az alábbi gráfot a mélységi bejárás (DFS) segítségével.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

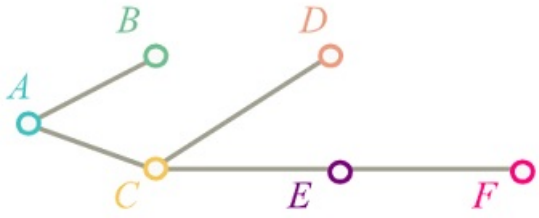
a) Íme, egy gráf két különböző kezdőpontjából készített BFS fája:

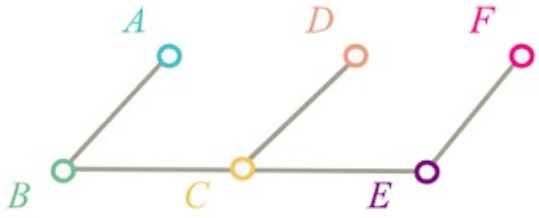




Adjuk meg az eredeti gráfot.

b) Egy gráfban minden csúcs fokszáma páros, és két különböző kezdőpont alapján készített BFS fája:

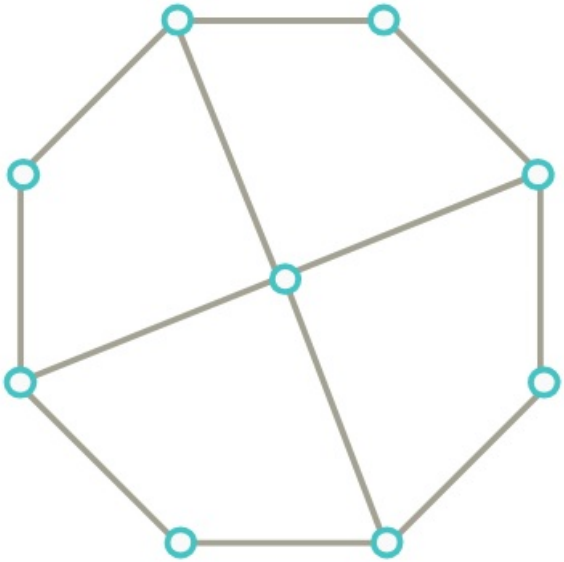




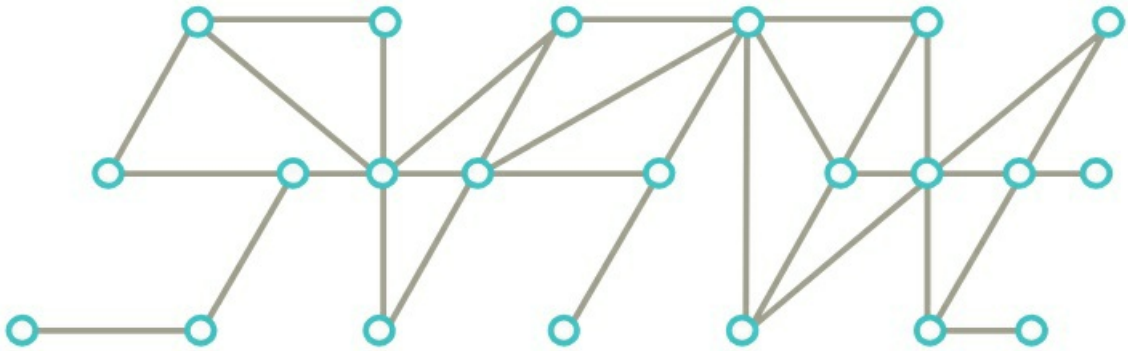
Adjuk meg az eredeti gráfot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Létezik-e az alábbi gráfban Hamilton kör?



b) Létezik-e az alábbi gráfban Hamilton út?



Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bizonyítsuk be, hogy minden 4-nél nagyobb n számra van olyan n csúcsú G gráf, hogy G-ben és a komplementerben is van Hamilton kör.

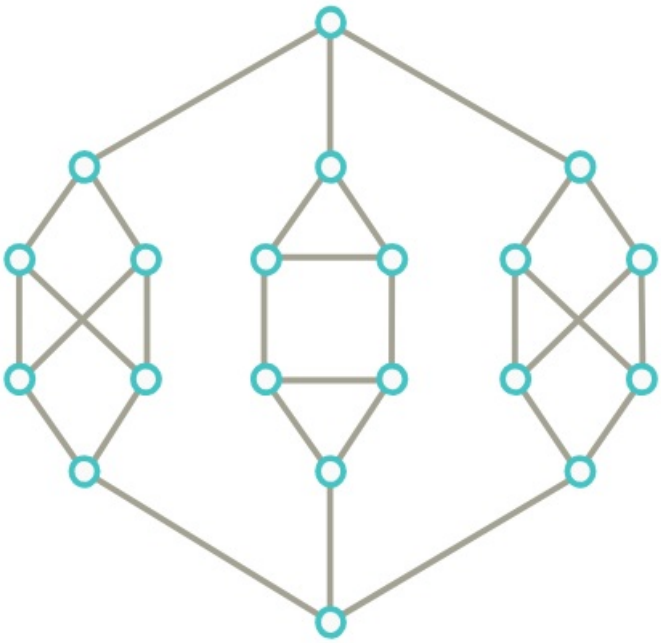
b) Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban két nem szomszédos csúcs foka 49, az összes többi csúcs foka legalább 50. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban Hamilton út.

c) Mit mondhatunk arról a 101 pontú gráfról, amiben minden csúcs foka legalább 50. Van-e a gráfban Hamilton út?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

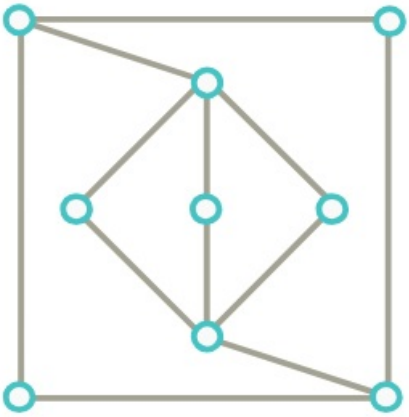
a) Derítsük ki, hogy van-e az alábbi gráfban Hamilton kör. Ha nincs, akkor minimum hány újabb élt kell hozzávennünk ahhoz, hogy legyen?



b) Derítsük ki, hogy van-e az alábbi gráfban Hamilton kör. Ha nincs, akkor minimum hány újabb élt kell hozzávennünk ahhoz, hogy legyen?



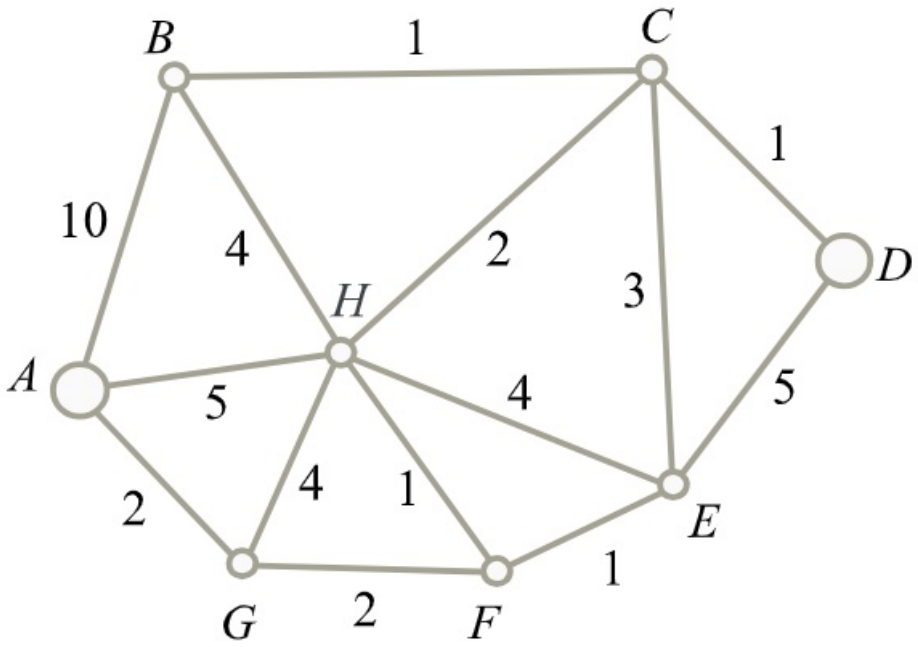
c) Minimum hány élt kell behúznunk ebben a gráfban, hogy legyen benne Hamilton kör?



d) Adott egy 100 csúcsú egyszerű gráf, amiben két szomszédos csúcs foka 49, az összes többi csúcs foka pedig legalább 50. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban Hamilton út.

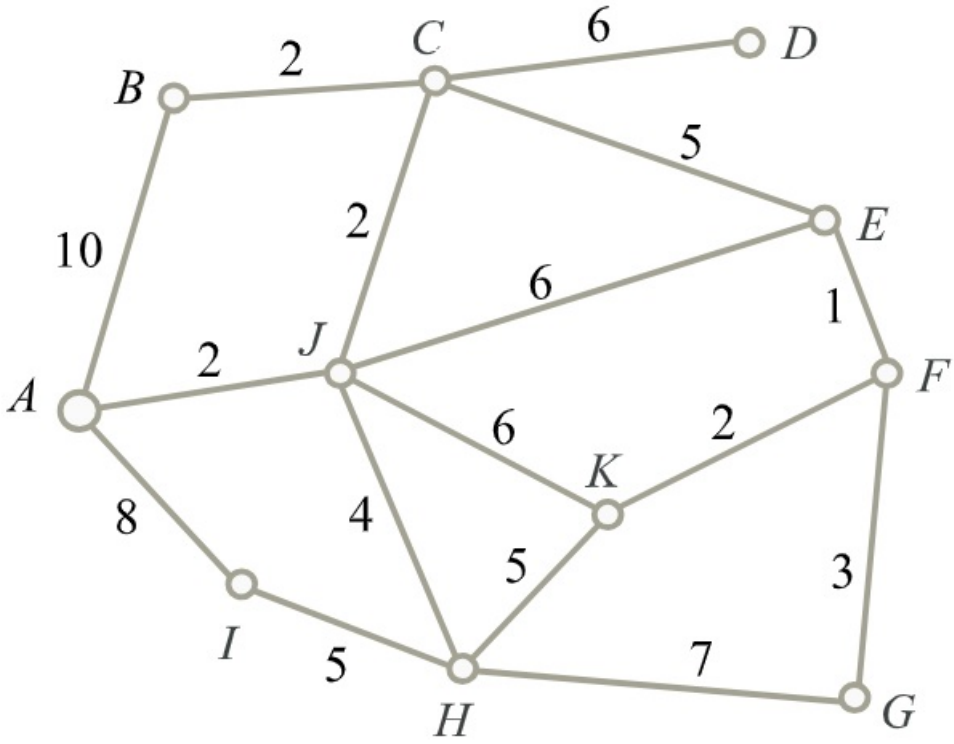
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi gráfban az A és D csúcsok távolságát.



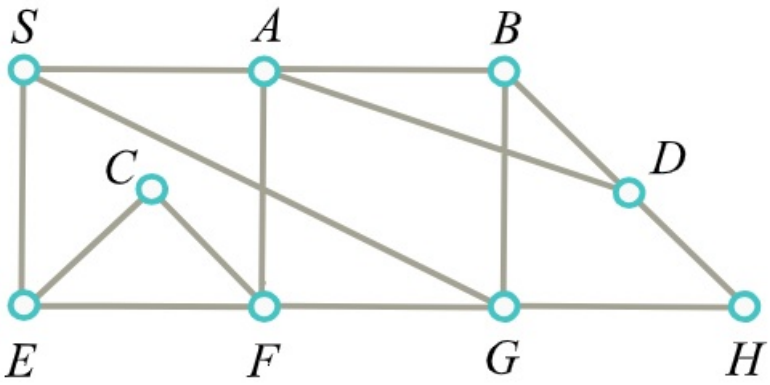
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Térképezzük föl az alábbi gráfot a Dijkstra algoritmus segítségével.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) A BFS algoritmus az alábbi ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, _ , _ , _ , H, _ , F, C, _ . Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS fát.

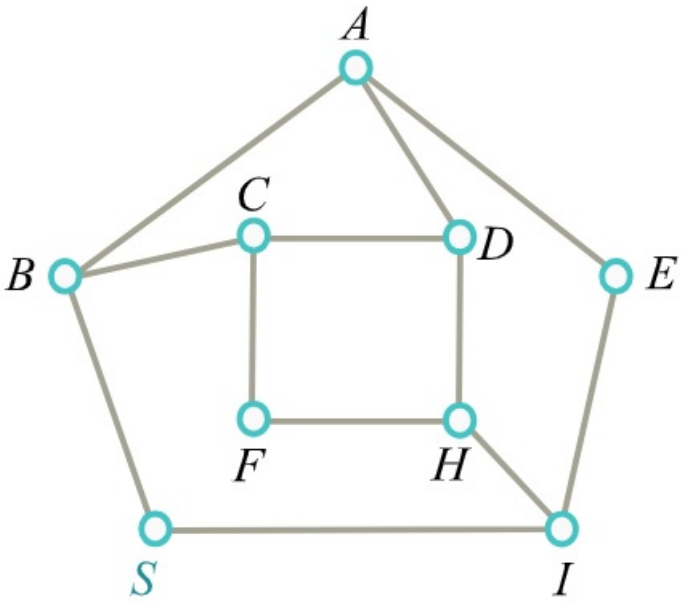


b) Az ábrán látható gráf egyik élét elhagytuk. Az él elhagyása előtt S-ből indított BFS algoritmus a gráf csúcsait az alábbi sorrendben járta be:

i) S, B, I, C, A, F, H, E, D

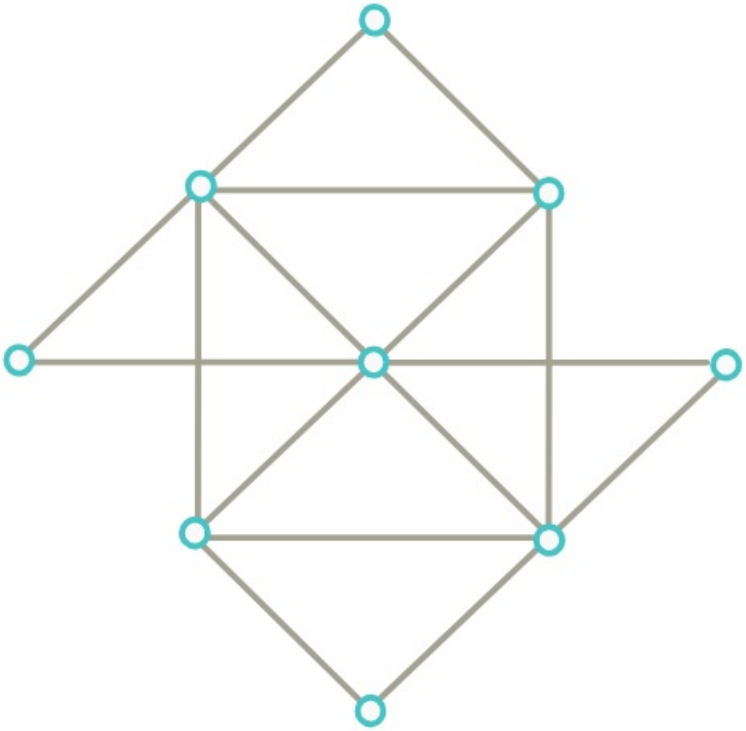
ii) S, I, B, E, D, H, C, A, F

Megállapítható-e egyértelműen, hogy melyik élt hagytuk el? Ha igen, akkor adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát is.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

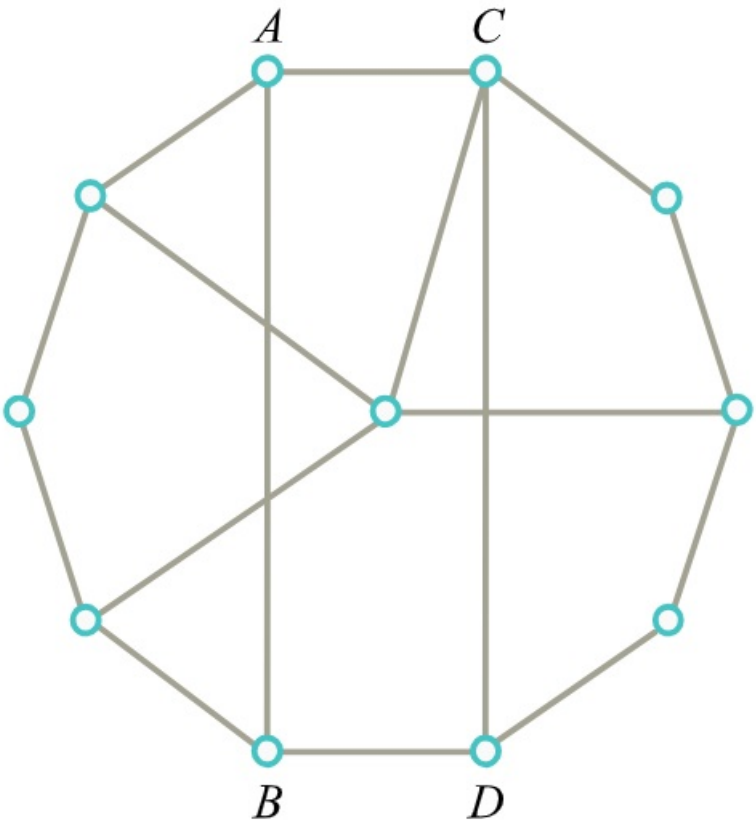
a) Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton köre, illetve Hamilton útja.



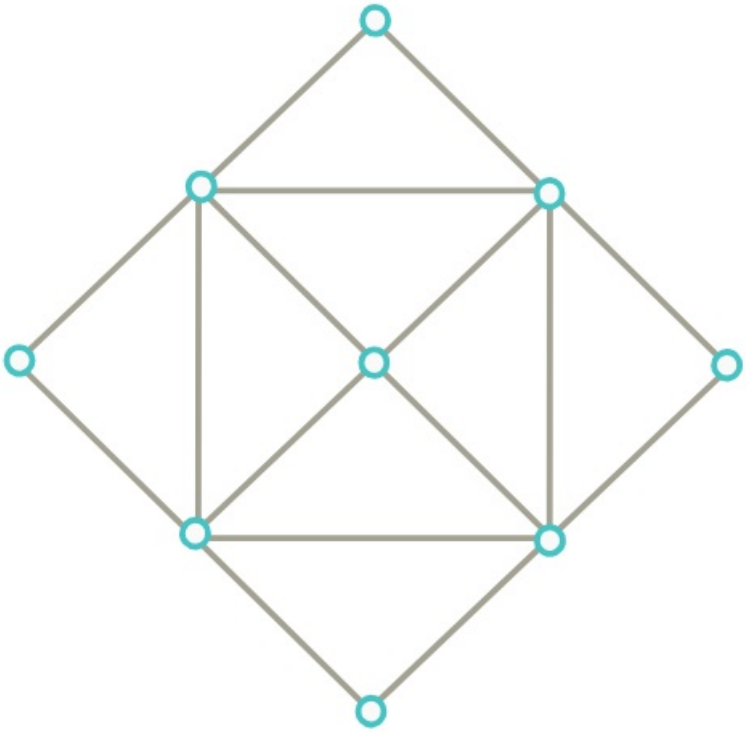
b) Van-e az alábbi gráfban olyan Hamilton kör...

i) ami nem tartalmazza az {A,B} élt?

ii) ami nem tartalmazza a {C,D} élt?

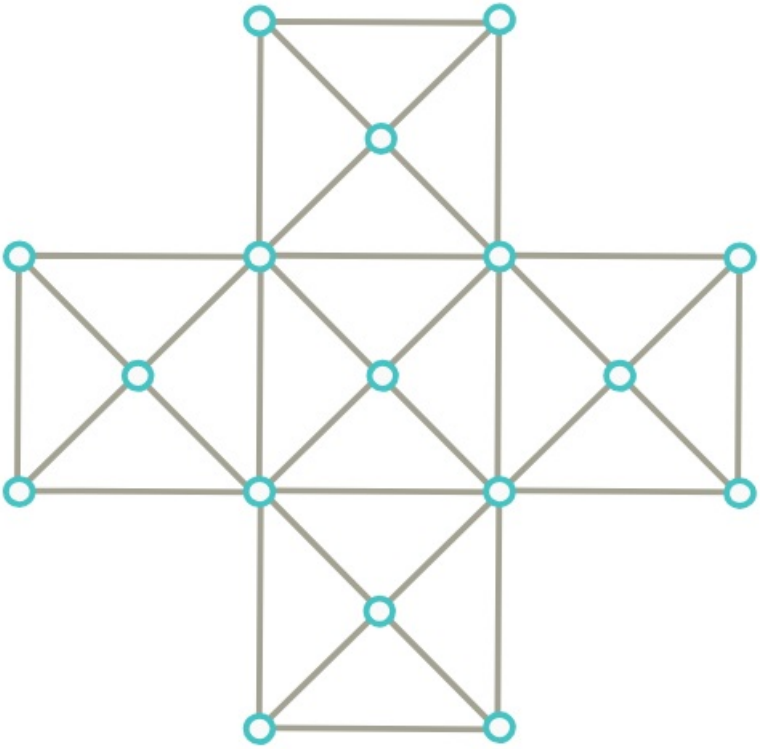


c) Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton köre, illetve Hamilton útja.



d) 1001 pontú gráf minden csúcsa legalább 501 fokú, kivéve egyetlen csúcsot, aminek a fokszáma 500. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban van Hamilton kör.

e) Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton köre, illetve Hamilton útja.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G)=\{1,2,\ldots,10\}$. Az $x,y\in V(G), x\neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y|\leq 2$.

Van-e G-nek olyan feszítőfája, hogy összes éle olyan, amelyre $|x-y|=2$ teljesül?

b) A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G)=\{1,2,\ldots,10\}$. Az $x,y\in V(G), x\neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y|=2$ vagy $|x-y|=3$.

Van-e G-ben Hamilton út, illetve Hamilton kör?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy 100 csúcsú G összefüggő gráf éleit az 1 és 2 súlyokkal súlyoztuk úgy, hogy az 1 súlyú élek részgráfja (vagyis az a gráf, melynek csúcsai azonosak G csúcsaival, de annak csak az 1 súlyú éleit tartalmazza) 7 komponensből áll.

Határozzuk meg G egy minimális összsúlyú feszítőfájának súlyát.

b) Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 101 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kromatikus szám, klikk, perfekt gráfok

a) Színezzük ki a Svájccal határos országokat úgy, hogy két szomszédos ország nem lehet egyforma színű.

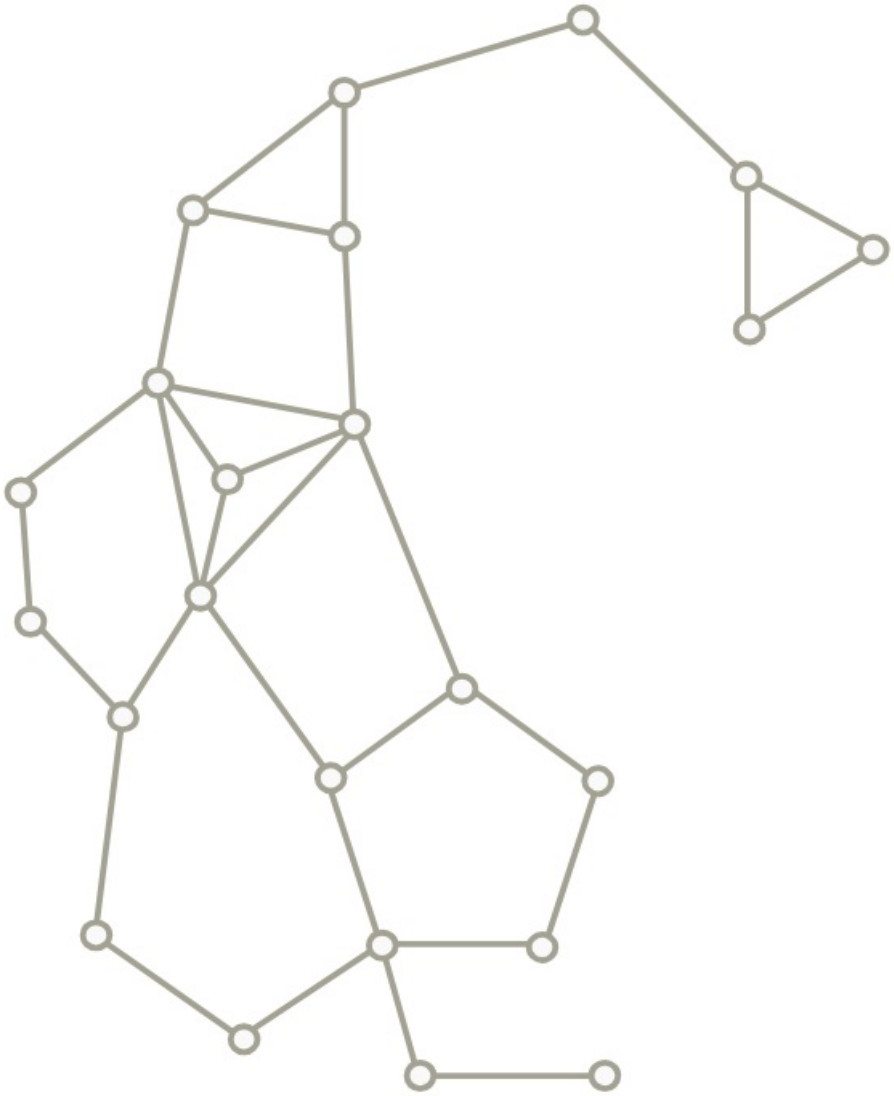


b) Színezzük ki a Luxemburggal határos országokat úgy, hogy két szomszédos ország nem lehet egyforma színű.



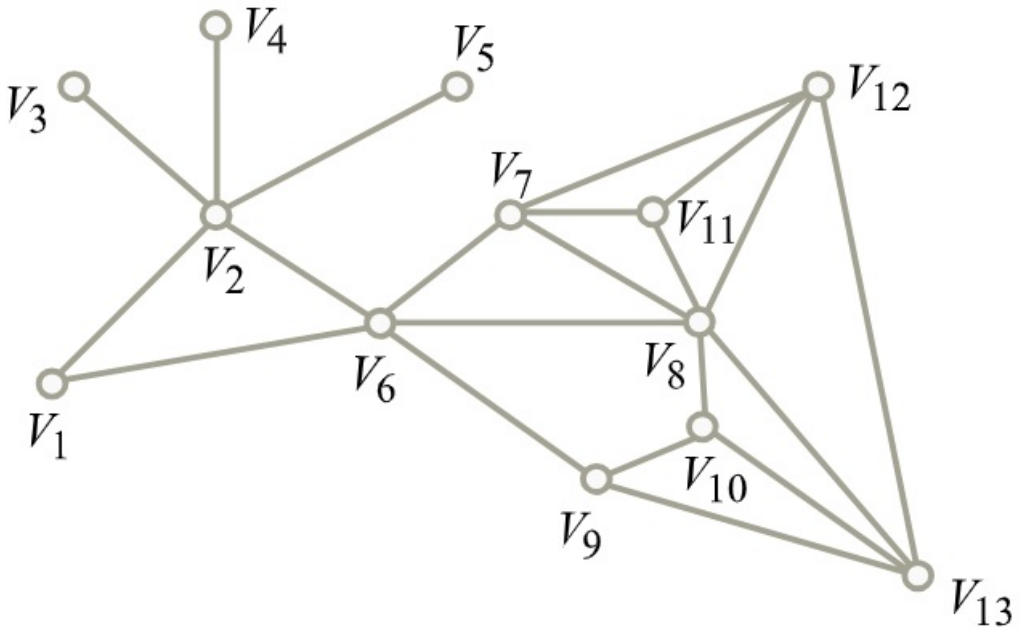
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mennyi az alábbi gráf kromatikus száma?



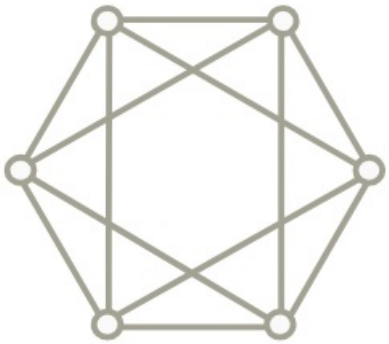
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hány szín kell ennek a gráfnak a színezéséhez?

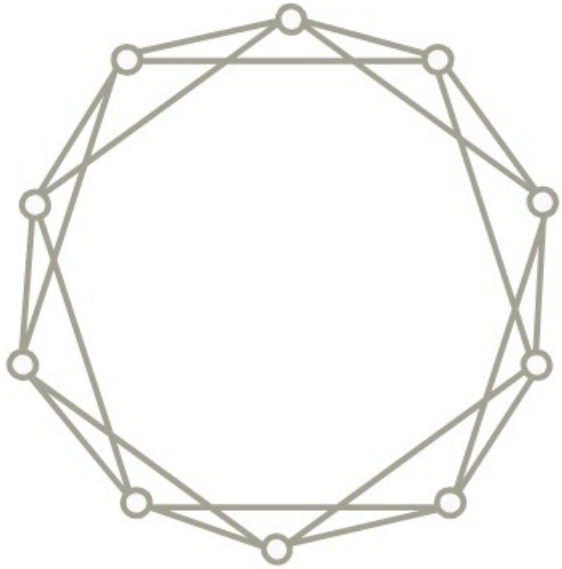


Megnézem a kapcsolódó epizódot

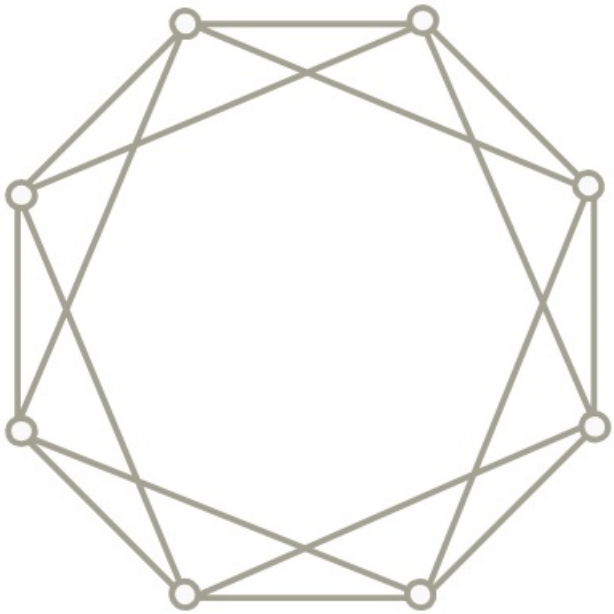
a) Mekkora a kromatikus száma ennek a gráfnak?



b) Mekkora a kromatikus száma ennek a gráfnak?



c) Mekkora a kromatikus száma ennek a gráfnak?

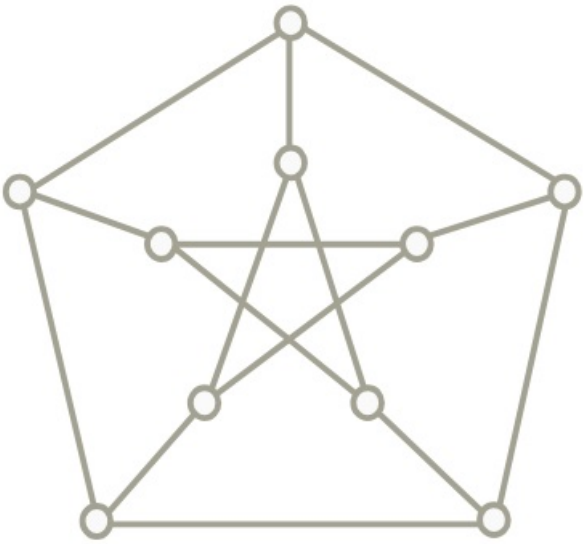


d) Egy G gráfban 1000 darab csúcstól eltekintve minden pont foka legfeljebb 999. Bizonyítsuk be, hogy a gráf kromatikus száma legfeljebb 1000.

e) Egy G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ és két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a különbségük legalább 6. Mekkora ennek a gráfnak a kromatikus száma?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Mennyi a Petersen gráf élkromatikus száma?



b) Egy 1001 csúcsú gráf úgy keletkezik, hogy egy 1000 csúcsot tartalmazó kör minden pontját összekötjük az 1001-edik csúccsal. Mekkora ennek a gráfnak az élkromatikus száma?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy 2000 csúcsú G gráf két darab egyenként 1000 csúcsot tartalmazó körből készítettünk, úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával.

Mekkora az így keletkező G gráf kromatikus száma és élkromatikus száma?

b) Számoljuk ki a Petersen gráf kromatikus számát.

c) Egy G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ és két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a számok távolsága legalább 5. Mekkora ennek a gráfnak a kromatikus száma?

d) Egy másik gráf csúcshalmaza szintén a $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. A gráf $x, y \in V(G)$ csúcsai pontosan akkor legyenek szomszédosak, ha $|x - y| = 4$ vagy $|x - y| = 6$. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

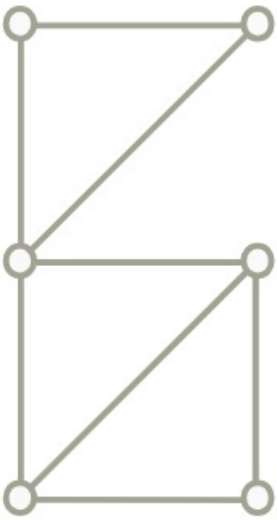
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallum gráfok-e.

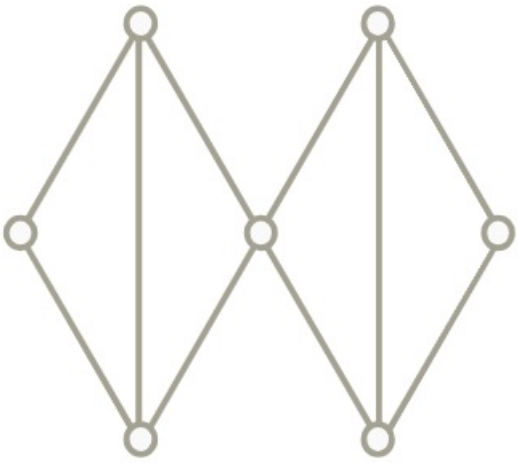
a)



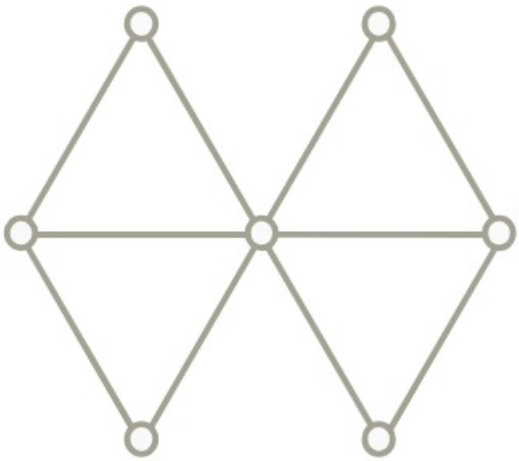
b)



c)



d)



Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G)=\{1,2,3,\ldots,30\}$. Az $x,y\in V(G)$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y\,|=3$ vagy $|x-y\,|=5$. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát és $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

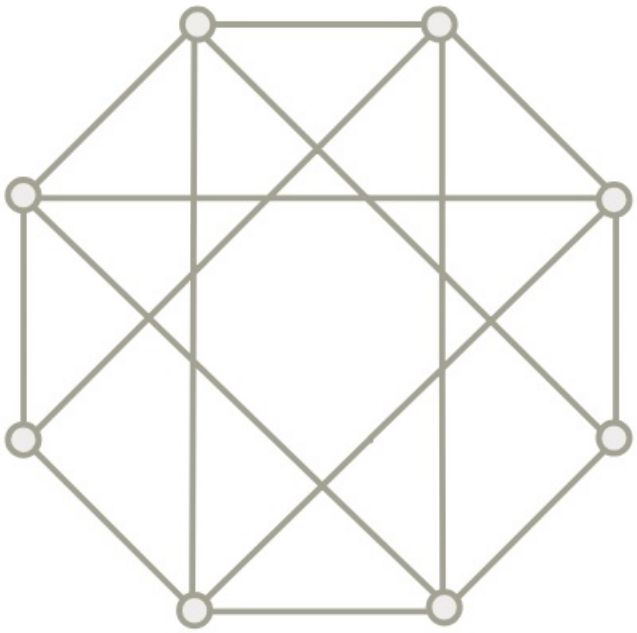
b) Egy 20 csúcsú fában 11 csúcs foka 1 és a maradék 9 csúcs foka is azonos. Határozzuk meg a fa élkromatikus számát.

c) Egy 1000 csúcsú gráfot úgy kaptunk, hogy vettünk két 500 pontú utat, és az egyik út minden pontját összekötöttük a másik út minden pontjával. Mekkora az így kelektező gráfnak a kromatikus száma és az élkromatikus száma?

d) Egy 1001 csúcsú G gráfot két körből, egy 500 pontú és egy 501 pontú körből készítünk úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötjük a másik kör minden csúcsával. Mekkora az így keletkező gráf kromatikus száma és élkromatikus száma?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi gráf kromatikus és élkromatikus számát.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 1000 csúcsú teljes gráfból elhagyjuk egy Hamilton-kör éleit. Mekkora lesz az így kapott gráf kromatikus száma?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A G gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $10 \mid x \cdot y$.

Határozzuk meg G kromatikus számát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 6 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 100 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 50 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A G gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, \ldots, 1000\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $(x, y) \geq 10$. Határozzuk meg G kromatikus számát.

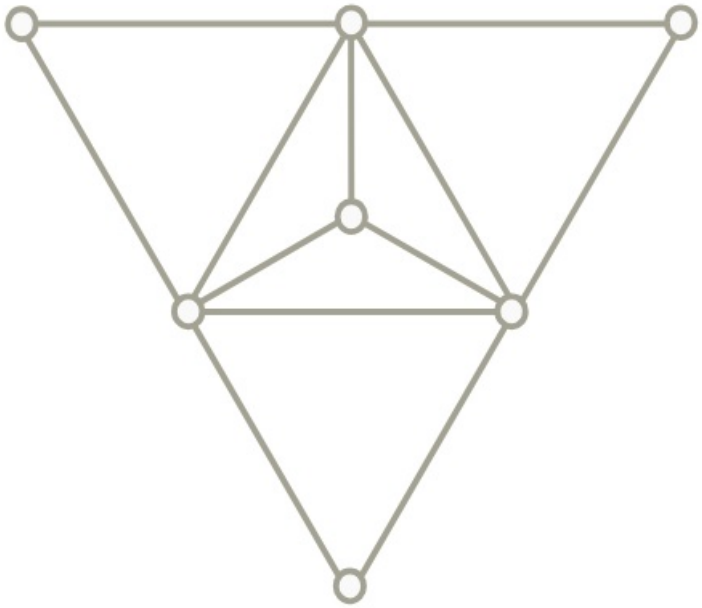
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg egy 6 csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

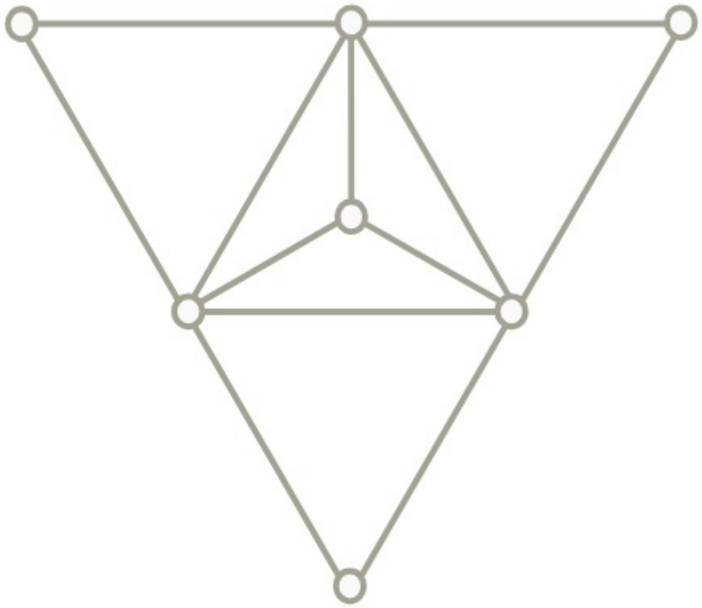
Gráfparaméterek, párosítások

Adjuk meg az alábbi gráfban a maximális független ponthalmaz és minimális lefogó ponthalmaz számát.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

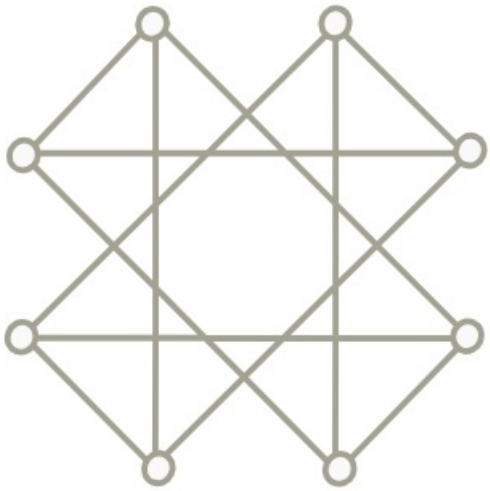
Adjuk meg az alábbi gráf maximális független élhalmazának és minimális lefogó élhalmazának számát.



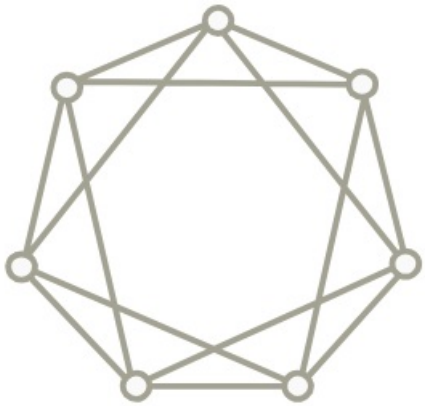
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi gráfokban a gráfparamétereket.

a)

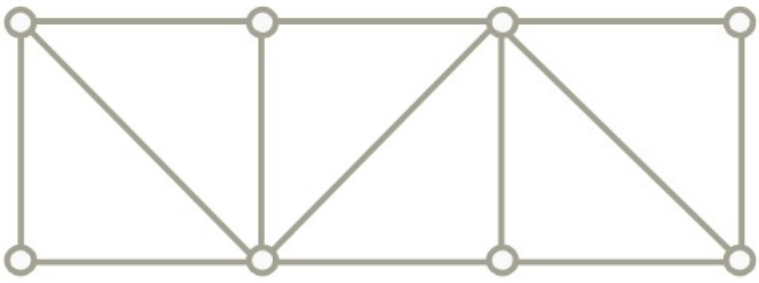


b)



Megnézem a kapcsolódó epizódot

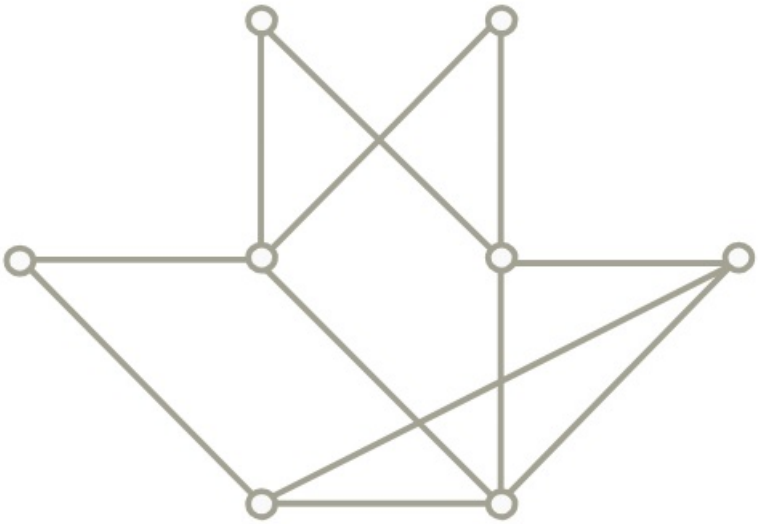
Próbáljuk megtalálni ebben a gráfban a maximális párosítást.



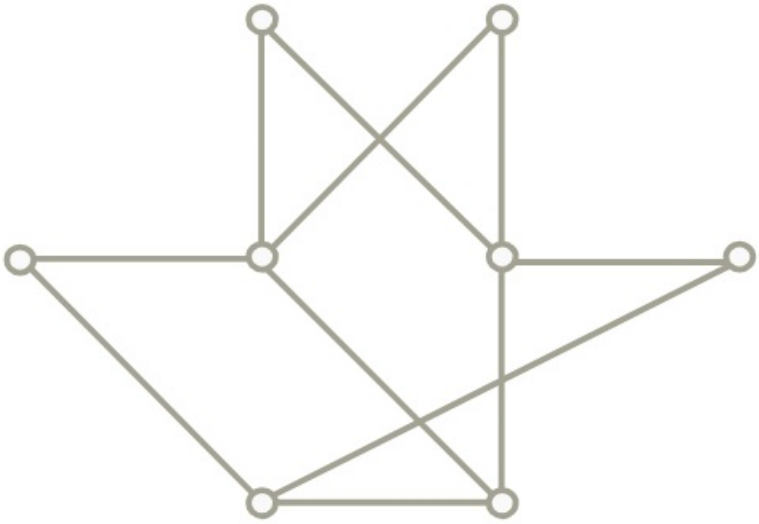
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbáljuk megtalálni az alábbi gráfokban a maximális párosításokat.

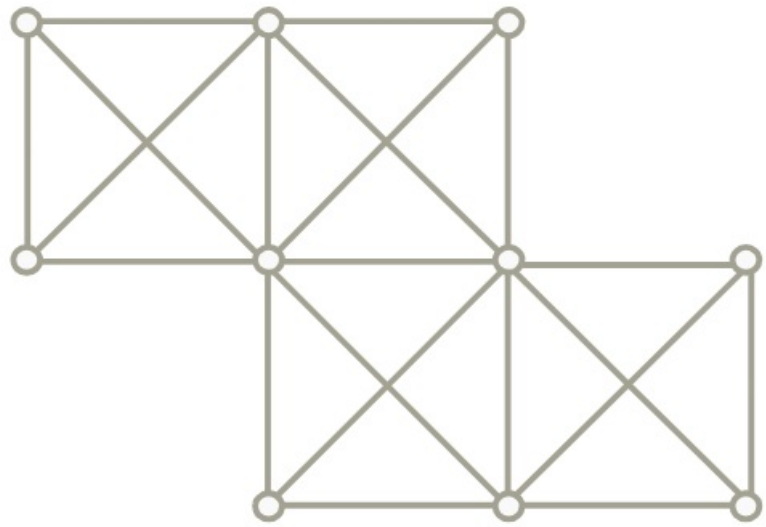
a)



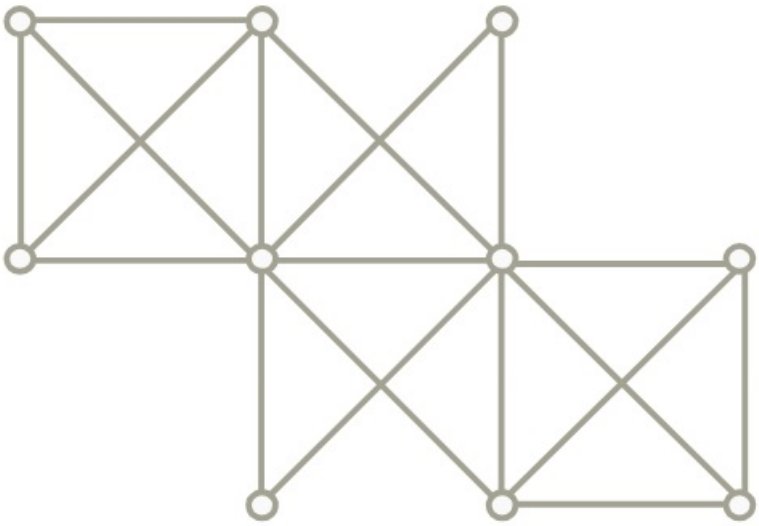
b)



c)

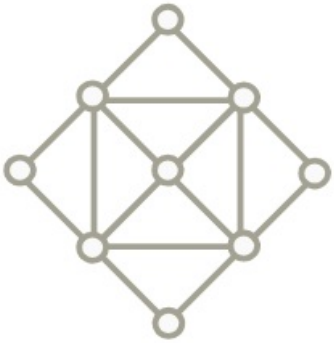


d)

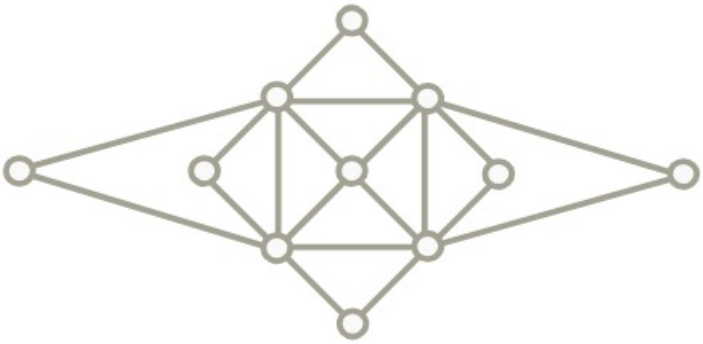


Megnézem a kapcsolódó epizódot

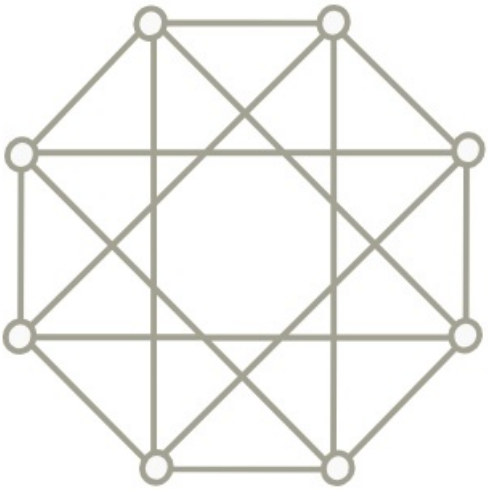
a) Adjuk meg a gráfparamétereit.



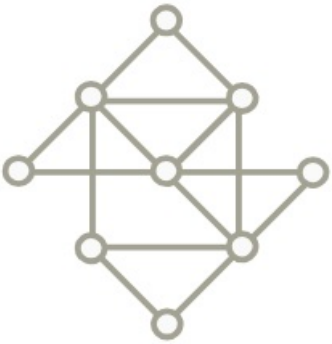
b) Adjuk meg a gráfparamétereit.



c) Adjuk meg a gráfparamétereit.



d) Adjuk meg a gráfparamétereit.



e) Egy gráfban $2n$ darab pont van, és minden pont foka legalább$n$. Legalább hány elemű egy lefogó élhalmaz a gráfban?

f) Egy 1001 pontú G egyszerű gráfban $\tau(G) = 1000$. Bizonyítsuk be, hogy G teljes gráf.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfra:

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$$

b) Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfra:

$$2\nu(G) \geq \tau(G)$$

c) Vajon minden G egyszerű gráfban teljesül-e, hogy

$$|E(G)| \leq \Delta(G) \cdot \tau(G)$$

d) Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfra:

$$\alpha(G)\,(\Delta(G)+1) \geq n$$

e) Bizonyítsuk be, hogy bármely G egyszerű gráfban:

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n+1$$

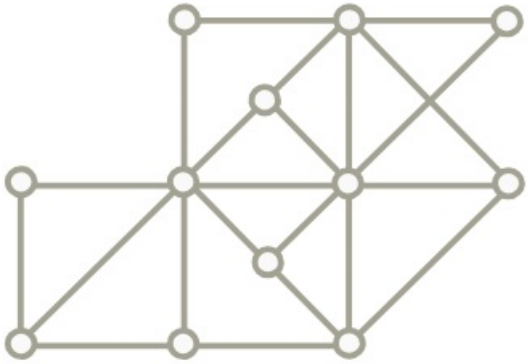
f) Bizonyítsuk be, hogy bármely G egyszerű gráfban:

$$\binom{\chi(G)}{2} \leq |E(G)|$$

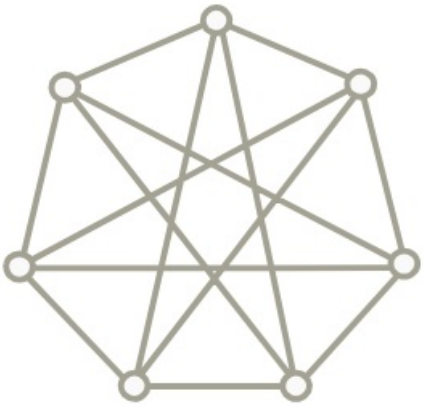
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi gráfoknak a gráfparamétereit.

a)

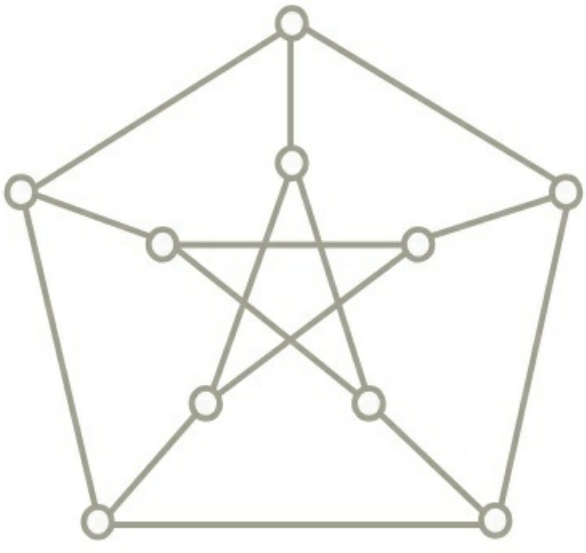


b)



Megnézem a kapcsolódó epizódot

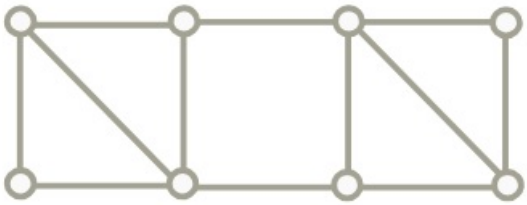
Határozzuk meg a Petersen-gráf gráfparamétereit.



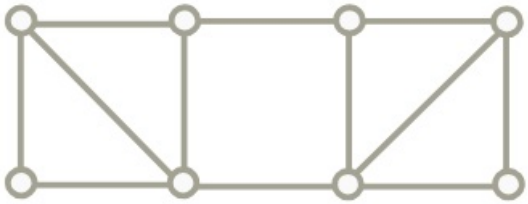
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi gráfoknak a gráfparamétereit.

a)



b)



Megnézem a kapcsolódó epizódot

A G gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, \ldots, 30\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek relatív prímek. Határozzuk meg a gráfparamétereket!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a hozzájuk tartozó számok szorzata osztható 4-gyel. Határozzuk meg $\alpha(G)$ és $\rho(G)$ értékeit!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 1000 csúcsú gráfban $\tau(G) = 400$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás.

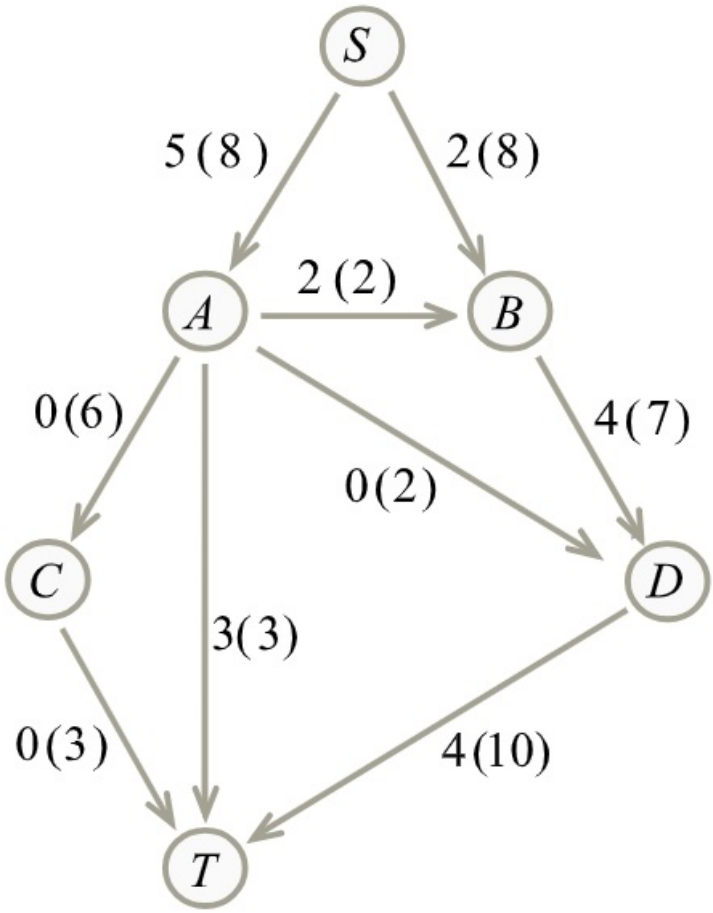
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hálózatok, maximális folyam, minimális vágás

Itt egy csőrendszer, melyet irányított gráffal jelölünk.

Úgy tűnik, hogy 5+2=7 egység víz indul S-ből és 0+3+4=7 egység is érkezik meg.

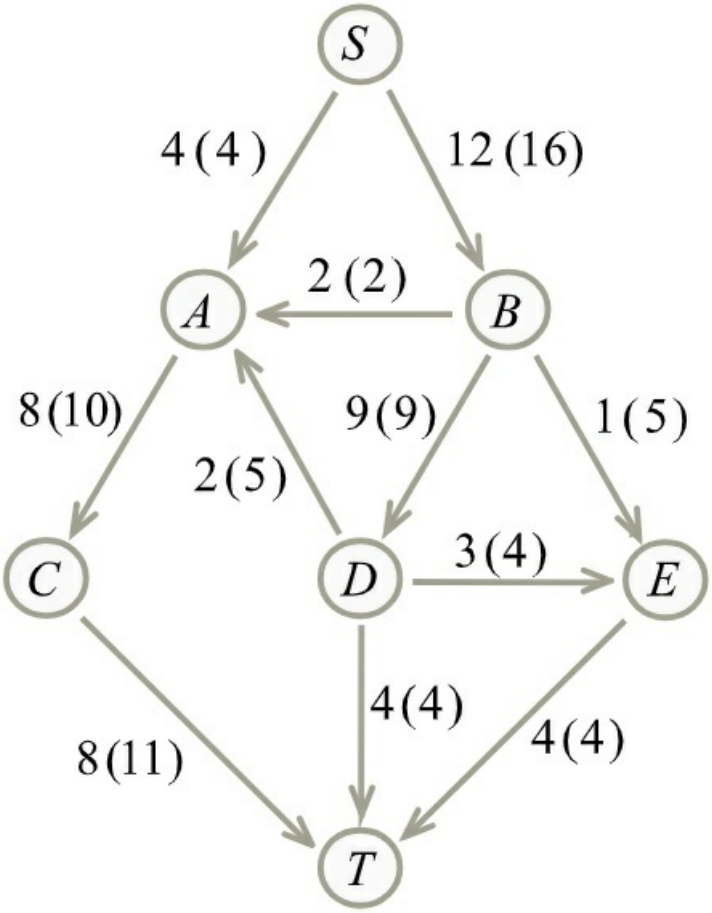
Próbáljunk meg ezen javítani.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a hálózat az élek kapacitásaival, és egy hálózatban futó folyammal.

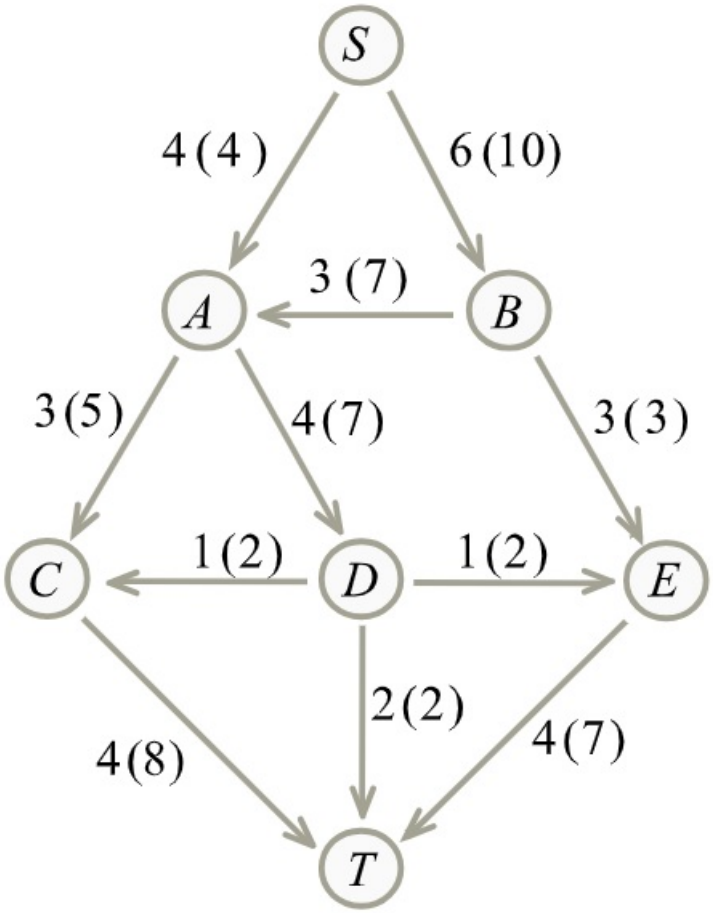
Ebből a folyamból kiindulva keressük meg az S-ből T-be vezető maximális folyamot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt van ez a hálózat, benne egy folyammal.

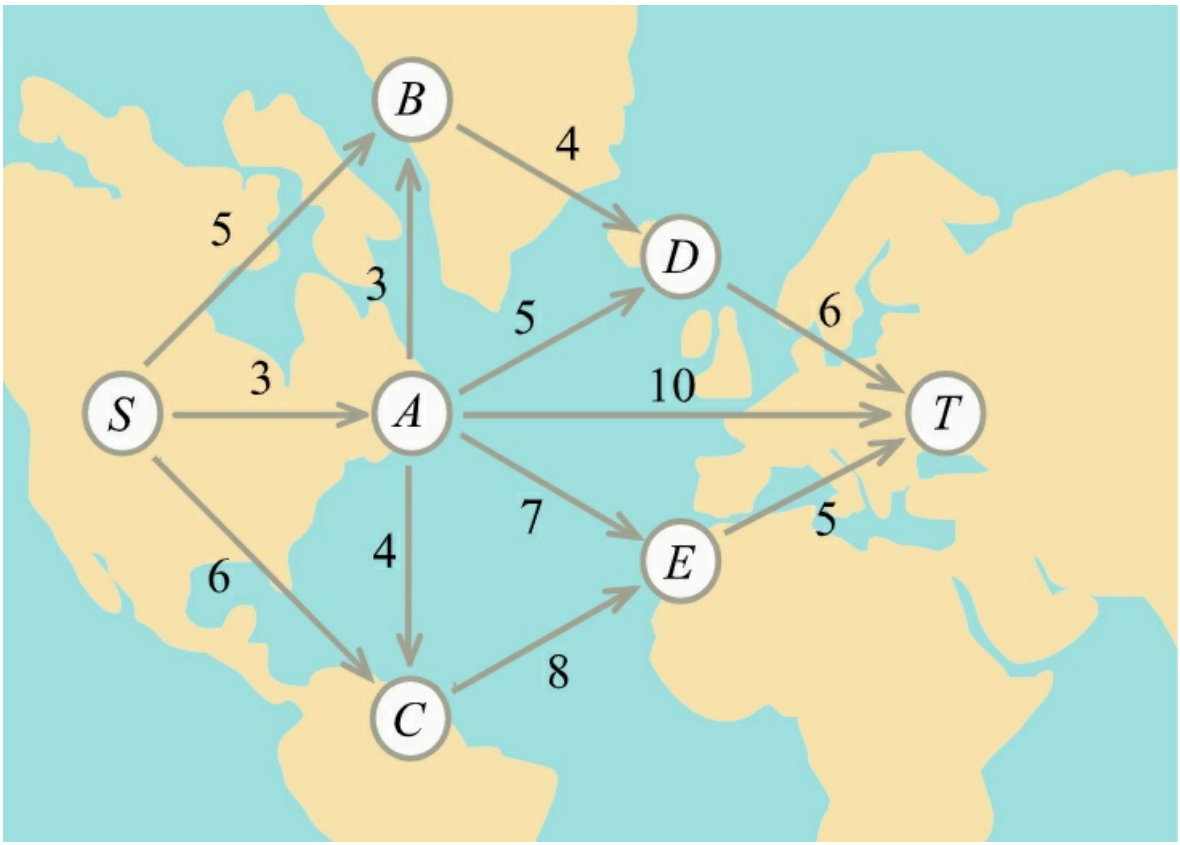
Készítsük el a javító gráfot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

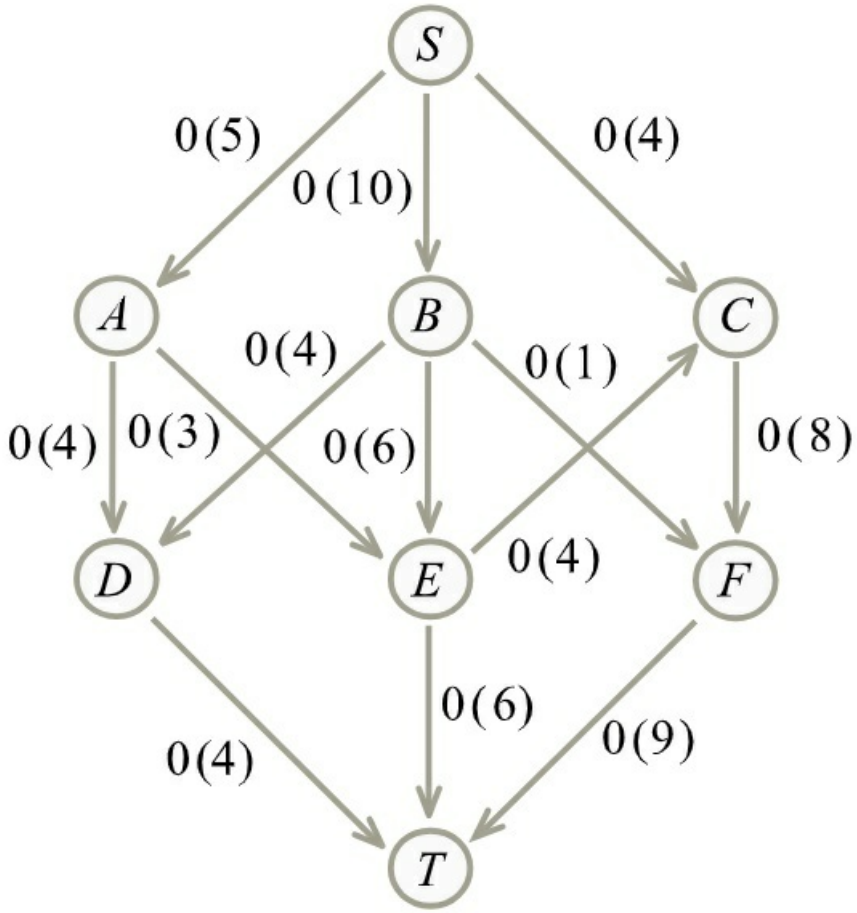
Történetünk lényege, hogy szeretnénk eljutni repülővel S-ből T-be, és ezek közül az útvonalak közül választhatunk.

Adott minden járat menetideje, a kérdés pedig az, hogy mennyi ideig fog tartani az út, és mennyi időnk lesz átszállni a repülőtereken.



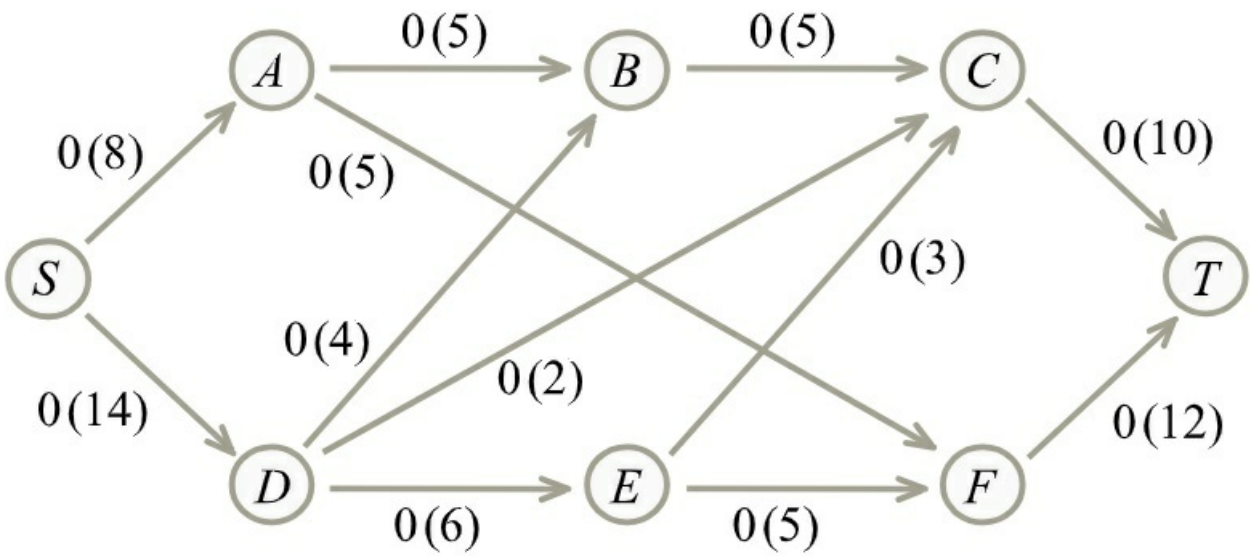
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



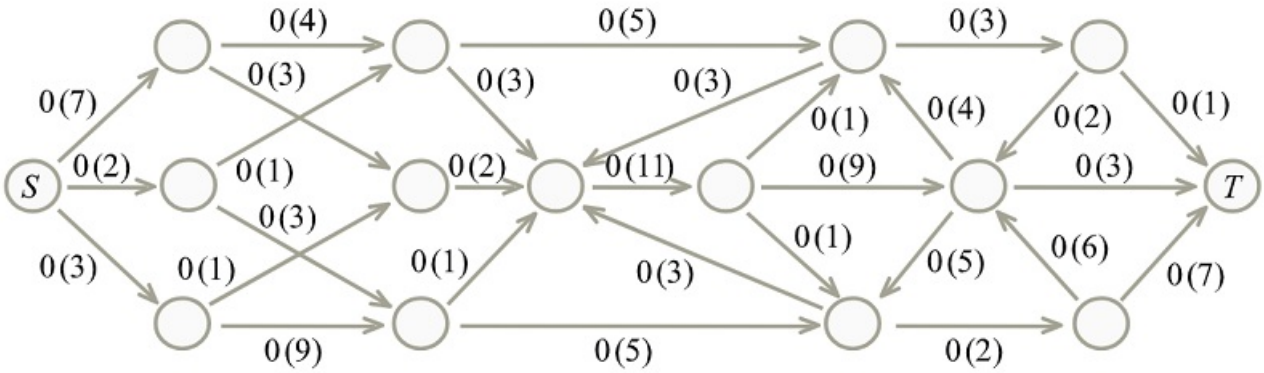
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



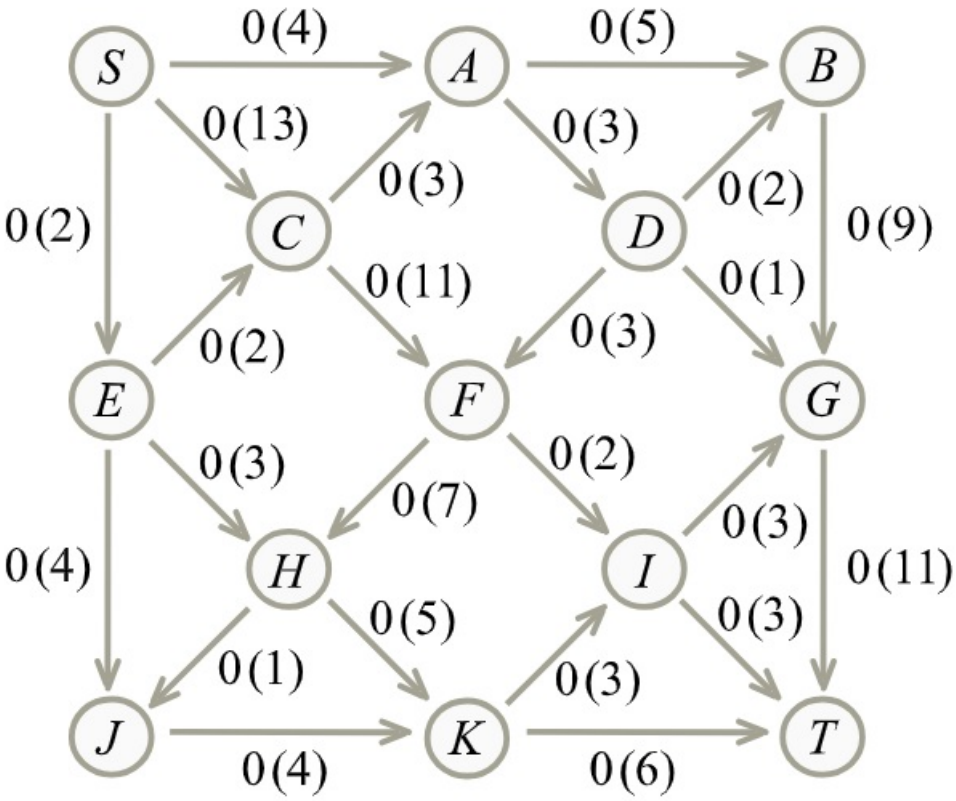
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



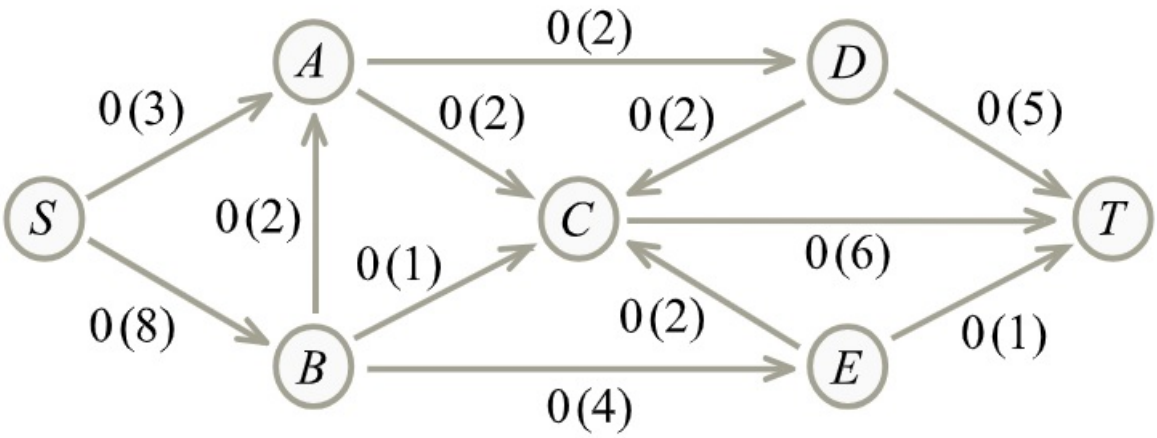
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



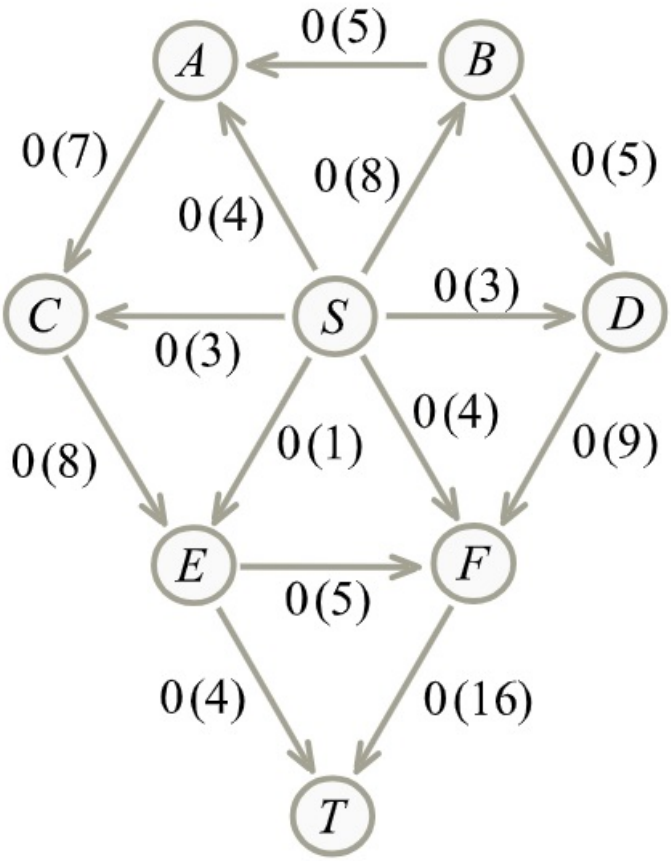
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



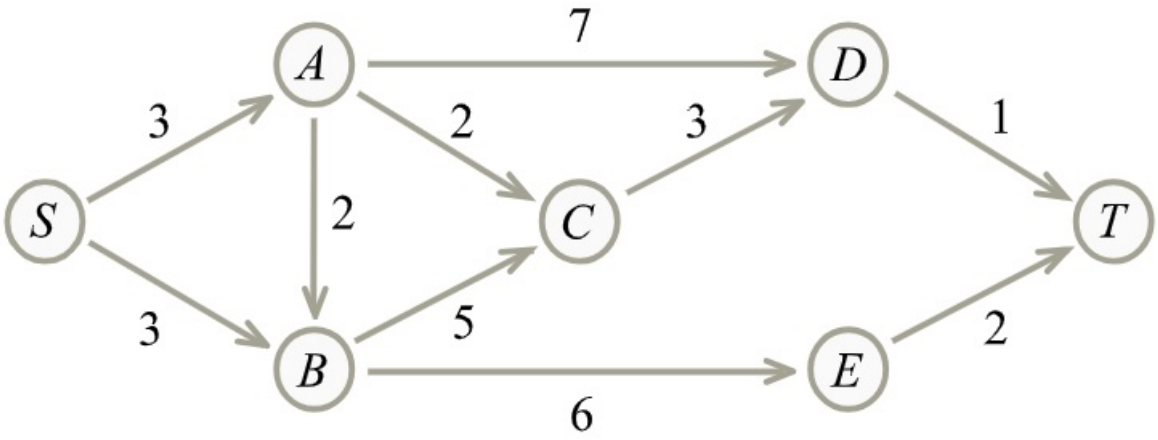
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



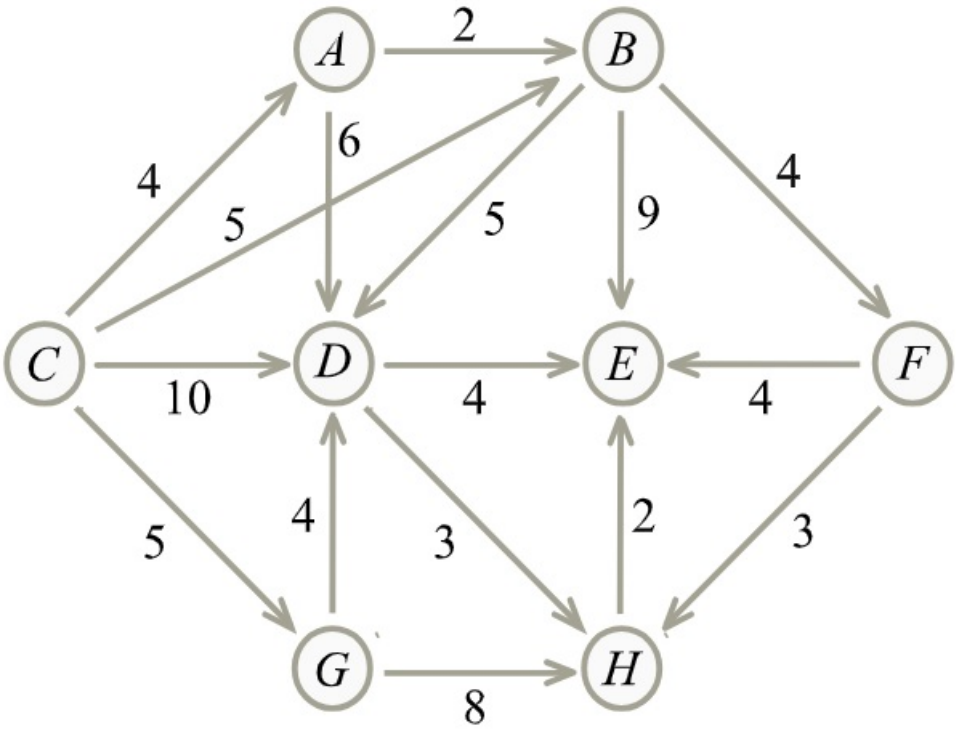
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



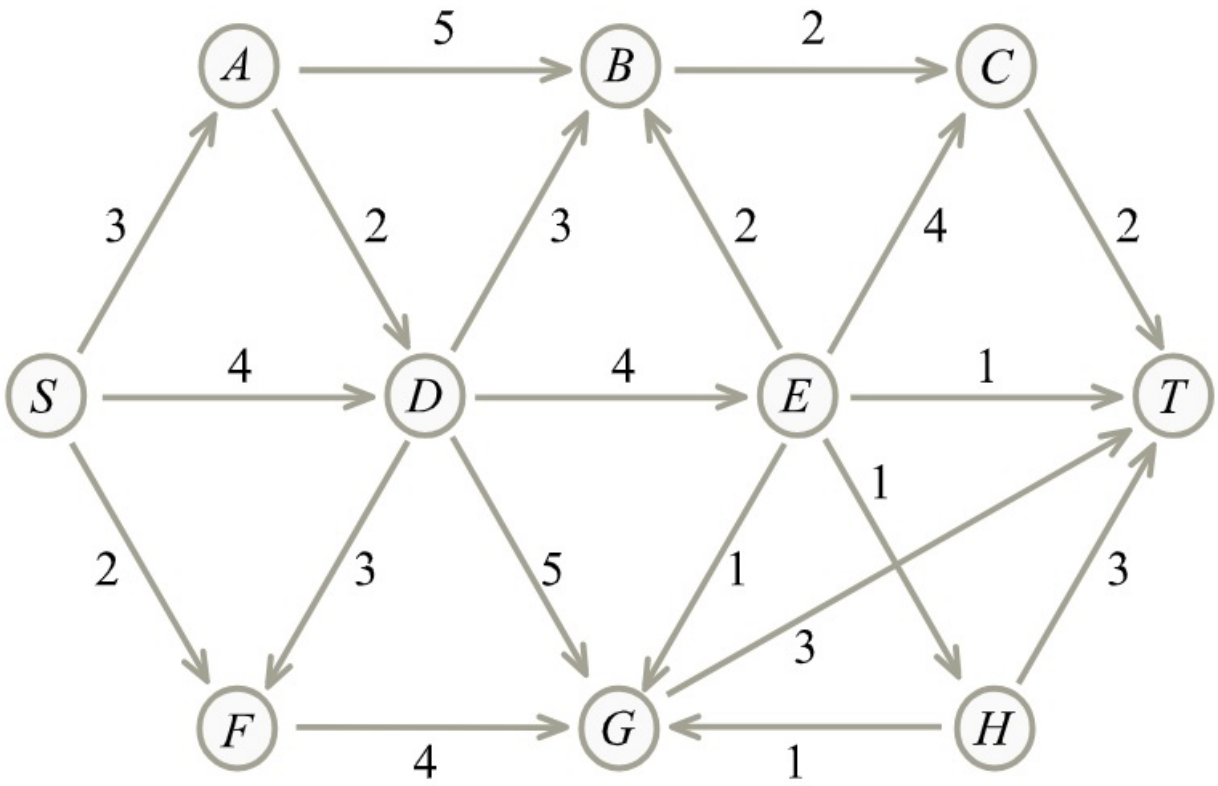
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



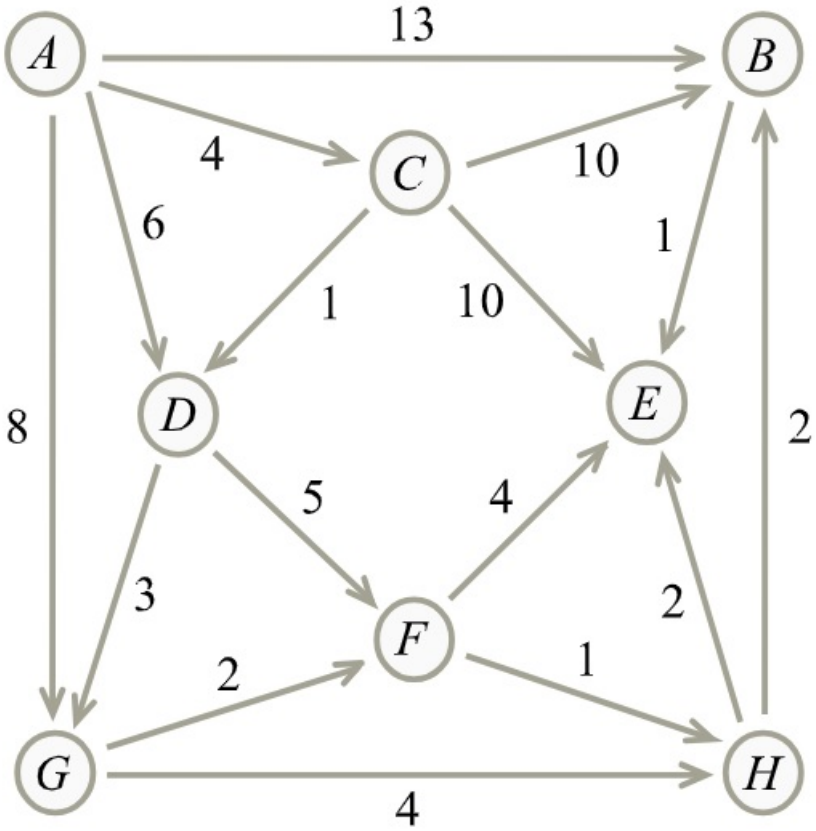
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



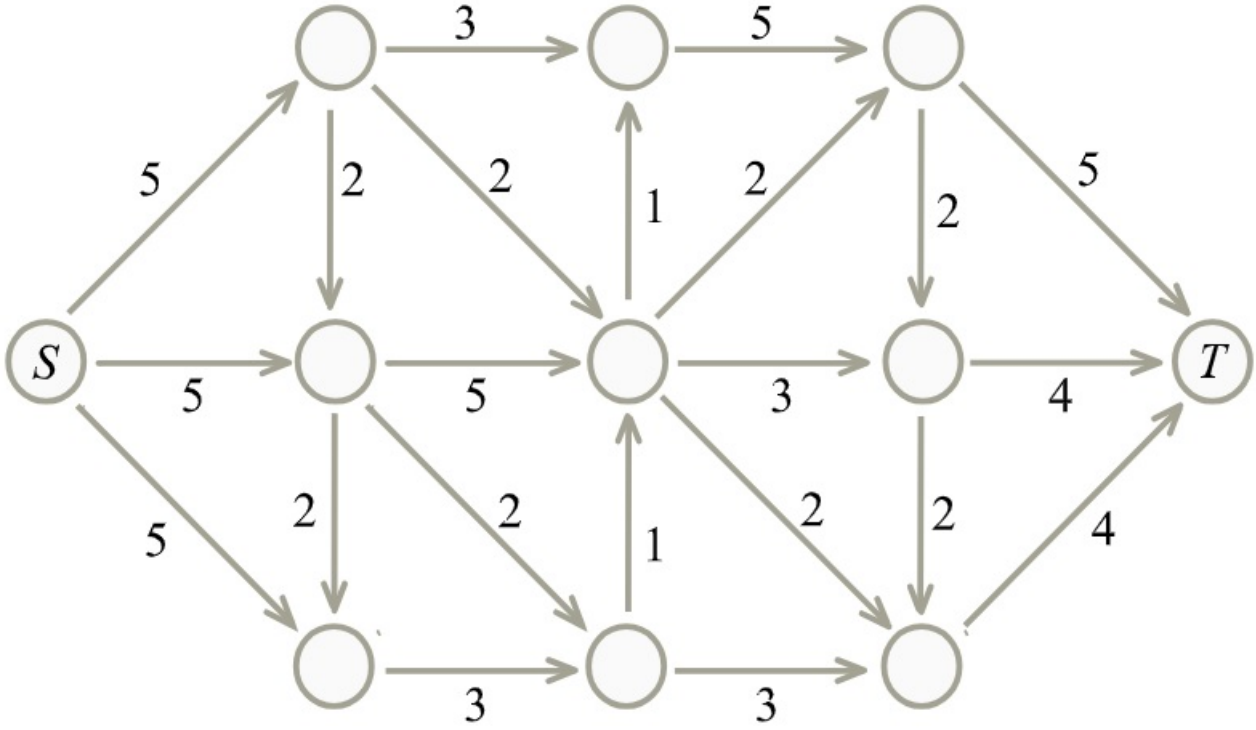
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



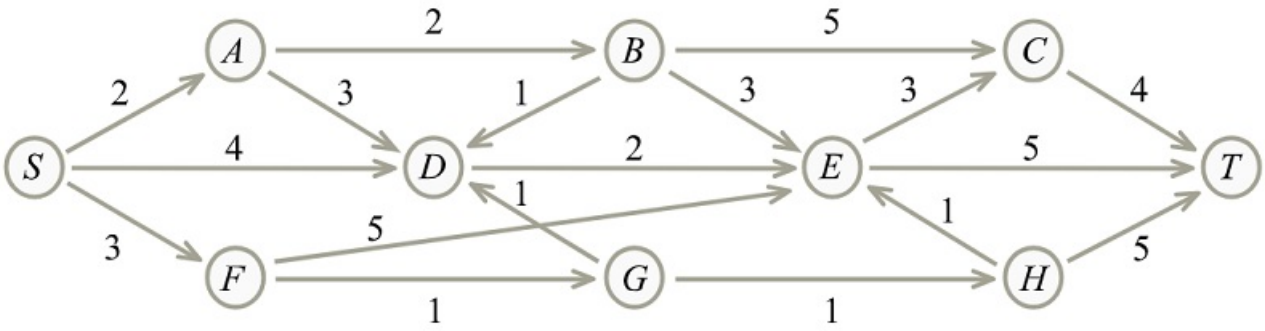
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

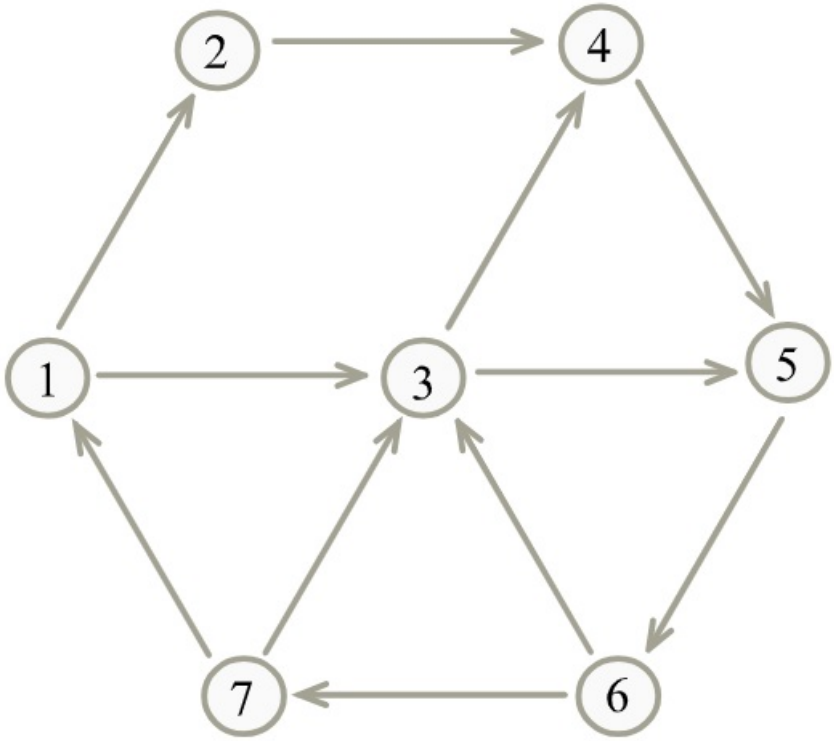
Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

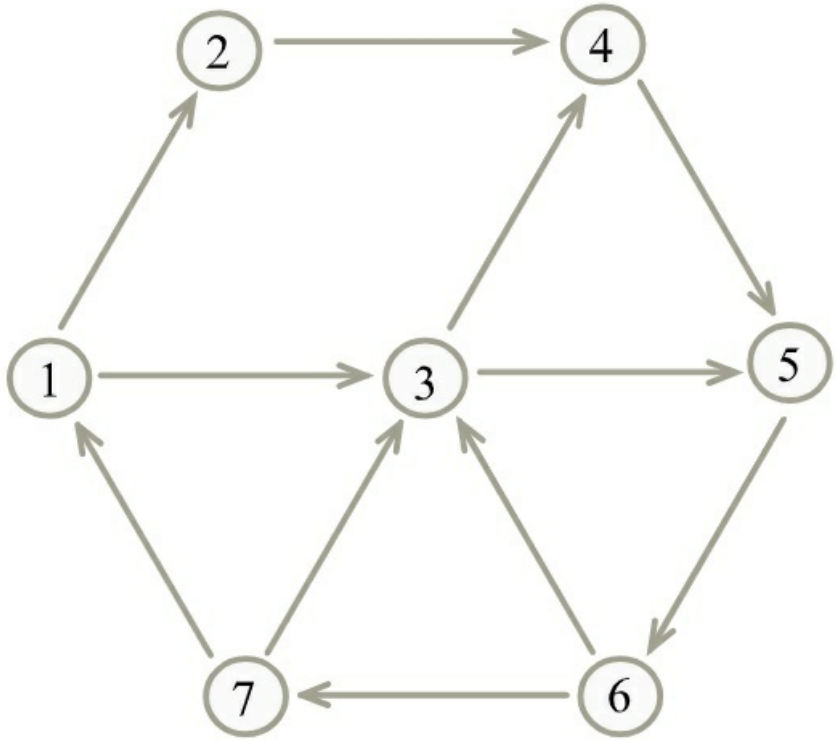
Irányított gráfok, gráfalgoritmusok irányított gráfokban

Adjuk meg az alábbi gráf DFS-fáját.



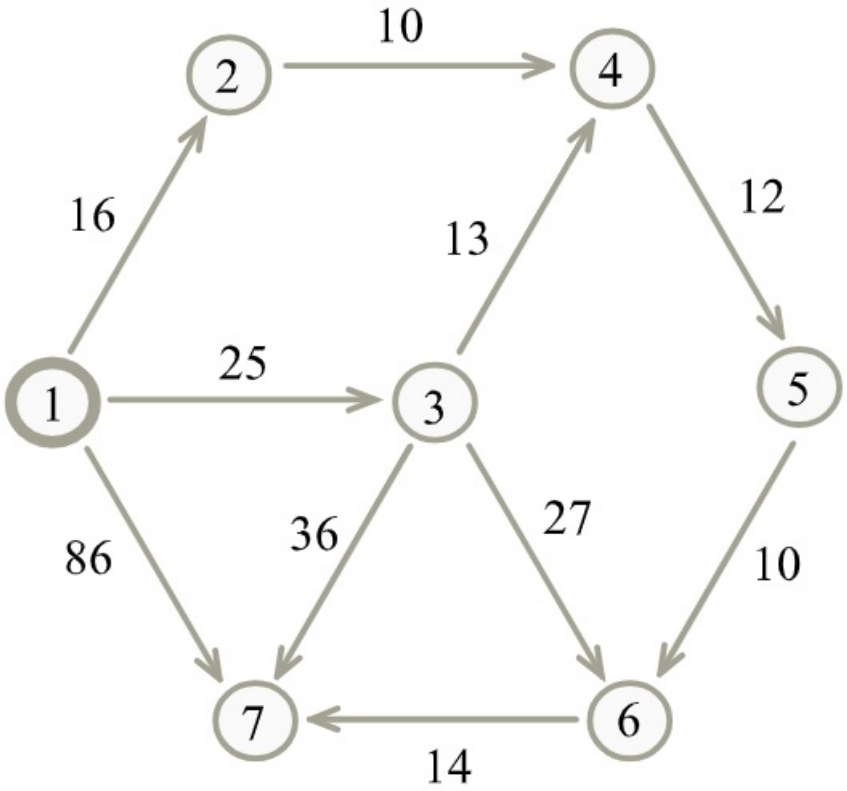
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi gráf BFS-fáját.



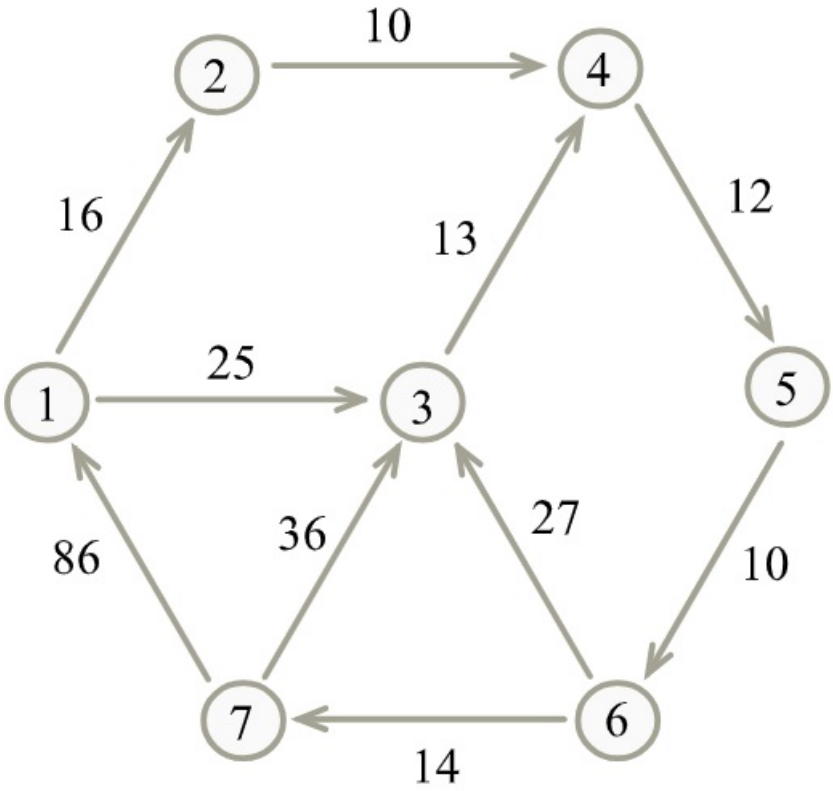
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derítsük föl az alábbi gráfot az 1-es csúcsból indulva a Dijsktra algoritmus segítségével.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Írjuk fel az alábbi gráf bármely két csúcsa közti távolságokat a Floyd algoritmus segítségével.



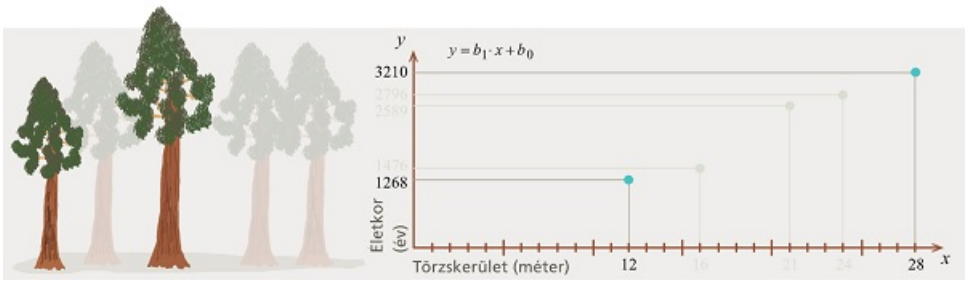
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legkisebb négyzetek módszere, legjobb lineáris közelítés

Mamutfenyők törzskerületével és életkorával kapcsolatos összefüggést vizsgálunk.

Az öt fán végzett mérések adatait arra fogjuk használni, hogy készítsünk belőlük egy függvényt, ami képes lesz megmondani a törzs kerületéből a fa életkorát.

Adjuk meg azt a lineáris függvényt, ami a két kiemelt ponton átmegy.

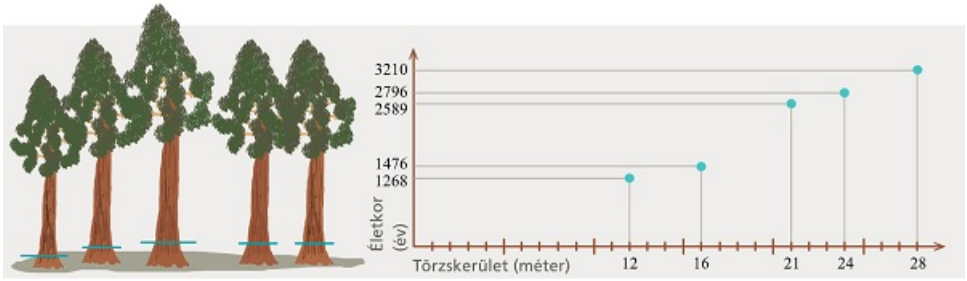


Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mamutfenyők törzskerületével és életkorával kapcsolatos összefüggést vizsgálunk.

Az öt fán végzett mérések adatait arra fogjuk használni, hogy készítsünk belőlük egy függvényt, ami képes lesz megmondani a törzs kerületéből a fa életkorát.

Adjunk lineáris közelítést a mamutfenyők életkorának megállapítására a legkisebb négyzetek módszerével.

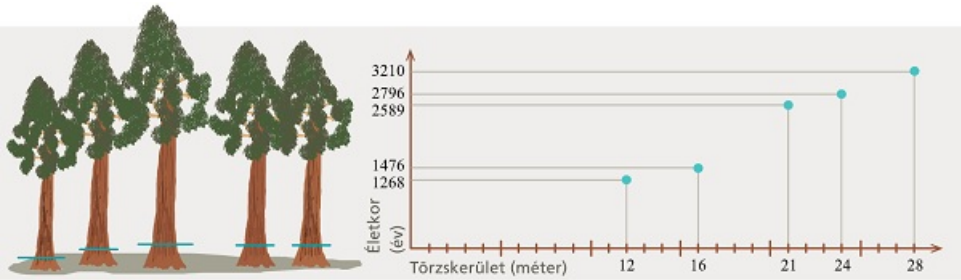


Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mamutfenyők törzskerületével és életkorával kapcsolatos összefüggést vizsgálunk.

Az öt fán végzett mérések adatait arra fogjuk használni, hogy készítsünk belőlük egy függvényt, ami képes lesz megmondani a törzs kerületéből a fa életkorát.

Adjunk lineáris közelítést a mamutfenyők életkorának megállapítására a mátrixos megoldással.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Európa néhány országában megvizsgáltuk az egy főre jutó GDP-t és a 100 főre jutó személyautók számát.

Adjuk meg az adatsorra legjobban illeszkedő lineáris függvényt.

Ország	x GDP/fő (ezer EUR)	y Személyautók (db / 100 fő)
Ausztria	54	57
Csehország	31	54
Franciaország	45	48
Görögország	23	57
Olaszország	37	70
Németország	50	61
Svájc	94	54

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négy diákot megkérdeztek, hogy hány órát tanultak a matekvizsgájukra és hány százalékot értek el. A válaszaik alapján készült ez a táblázat.

Tanulási idő (óra)	1	2	3	4
Vizsgaeredmény (százalék)	0	20	50	60

Adjuk meg az adatsorra legjobban illeszkedő lineáris függvényt, és készítsünk egy becslést arra, hogy 5 órányi tanulással hány százalékosra lehet megírni a vizsgát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kísérletben az y változót az x függvényében vizsgáltuk. A változókra öt megfigyelést végeztünk:

x	1	2	4	5	8
y	30	50	50	80	50

Adjuk meg az adatokra legjobban illeszkedő lineáris függvényt pivotálással.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az $A(1,3), B(2,8), C(3,4)$ és $D(4,7)$ pontokra legjobban illeszkedő lineáris függvény képletét.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény az alábbi mérésekkel adott:

x	1	2	4	5	6
$f(x)$	7	6	4	3	2

Adjuk meg az $f(x)$-hez legjobban közelítő lineáris $g(x)$ függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az optimális megoldásait ennek az egyenletrendszernek:

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Adjuk meg az optimális megoldásait ennek az egyenletrendszernek:

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5$$

$$-x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1$$

b) Keressük meg azt a megoldást, amire teljesül, hogy $|\underline{x}|$ minimális.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Páros gráfok, párosítások

a) Egy bárban 60 lány van. Minden lány 12 fiút ismer és minden fiú 15 lányt ismer. Az ismertségek kölcsönösek. Hány fiú van a bárban? Tudunk-e úgy fiú-lány párokat alkotni, hogy minden fiút egy ismerős lánnyal párosítunk?

b) Egy kiránduláson fényképet készítenek a résztvevőkről. Minden képen 4-en szerepelnek, és tudjuk, hogy mindenkiről legalább 4 kép készült. A kirándulás végén mindenki választhat egy képet. Igazoljuk, hogy biztosan mindenkinek jutni fog olyan kép, amin rajta van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy bálon 10 fiú és 10 lány vesz részt. Minden lány legalább 6 fiút ismer és minden fiú is legalább 6 lányt. Az ismertségek kölcsönösek. A nyitótáncon mindenki ismerőssel szeretne táncolni. Bizonyítsuk be, hogy ez lehetséges.

b) Egy 12 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban teljes párosítás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy bálon összesen 16-an vesznek részt. Minden lány vagy 4 vagy 5 fiút ismer és minden fiú is vagy 4 vagy 5 lányt. A nyitótáncon mindenki ismerőssel szeretne táncolni. Bizonyítsuk be, hogy ez lehetséges.

b) Egy páros gráf két pontosztálya A és B. Két pont akkor szomszédos, ha ebben a szomszédsági mátrixban az A-ban lévő pont sorának és a B-ben lévő pont oszlopának metszetében 1-es áll:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	1	1	0	1	0	0
a_2	1	1	0	1	0	1	0
a_3	1	1	0	1	0	0	1
a_4	0	0	1	1	1	1	1
a_5	0	1	0	1	0	1	0
a_6	1	1	0	1	1	0	1
a_7	1	0	1	0	1	1	1

Van-e a gráfban teljes párosítás?

c) Egy másik G páros gráf két pontosztálya A és B. Két pont akkor szomszédos, ha ebben a szomszédsági mátrixban az A-ban lévő pont sorának és a B-ben lévő pont oszlopának metszetében 1-es áll. Van-e G-ben teljes párosítás?

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	0	0	1	0	0	0
a_2	1	0	0	0	0	0	0
a_3	1	0	0	1	0	1	1
a_4	1	0	1	1	0	1	0
a_5	0	0	1	0	0	1	0
a_6	0	0	0	1	0	1	0
a_7	1	1	0	0	1	1	1

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 20 csúcsú egyszerű páros gráfban minden fok 5 vagy 6. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van teljes párosítása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy bálon 12 lány és 666 fiú vesz részt. A szervezők így 12 (fiú-lány) párt szeretnének összeállítani a nyitótánchoz úgy, hogy mindenki ismerőssel táncoljon. Minden lány legalább 11 fiút ismer, a fiúk közül viszont mindenki legfeljebb 11 lányt ismer. Biztosan össze tudják-e állítani a szervezők a 12 párt?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy bálon 1001 lány és 1001 fiú vesz részt, mindenkinek legalább 500 ellenkező nemű ismerőse van. Biztosan össze lehet-e állítani 1001 olyan fiú-lány párt, ahol a párok tagjai ismerősök?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 999 pontot tartalmaz, az A színosztályban minden pont foka legalább 666, B-ben pedig legalább 333. Mutassuk meg, hogy G-nek van teljes párosítása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G egyszerű, páros gráf A színosztályában 99 csúcsa van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A-ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G-nek van A-t fedő párosítása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

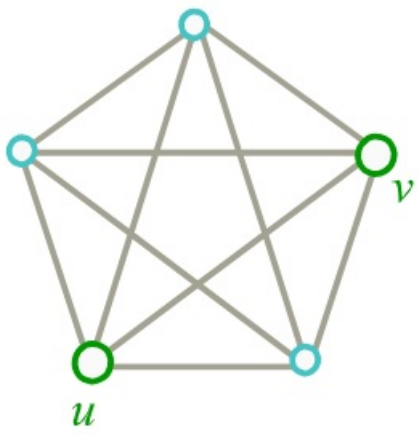
Menger tételei, többszörös összefüggőség

Mi történik, ha egy 100 pontú teljes gráfból elhagyunk két élt. Hányszorosan élösszefüggő és hányszorosan pontösszefüggő lesz a megmaradó gráf?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Itt egy gráf, és próbáljuk meg kideríteni, hogy hány élidegen út vezet u és v között.



b) Egy 100 pontú teljes gráfból elhagyunk 10 élt. Legalább hányszorosan élösszefüggő lesz a megmaradó gráf?

c) Bizonyítsuk be, hogy egy háromszorosan élösszefüggő gráfban mindig van páros hosszú kör.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mátrixok

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi mátrixok transzponált mátrixait!

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számítsuk ki az alábbi két vektor által bezárt szöget.

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt néhány vektor, és végezzük el velük a következő műveleteket.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix} \quad \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 5\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 3 & 1 & 8\end{pmatrix} \quad \underline{d}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$$

$E=<2\,5\,7>$

a) $A\cdot\underline{b}$

b) $A\cdot C$

c) $A\cdot C^{*}$

d) $\underline{b^{*}}\cdot\underline{d}$

e) $\underline{b}\cdot\underline{d^{*}}$

f) A^{2}

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektortér, lineáris függetlenség, bázis

Vektorteret alkotnak-e?

a) Komplex számok

b) Másodfokú polinomok

c) Legfeljebb másodfokú polinomok

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetelenek vagy összefüggőek.

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetelenek vagy összefüggőek.

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Töltsük ki az alábbi táblázatot.

vektorok száma	megadható-e ennyi vektor úgy, hogy független legyen R^3-ban	megadható-e ennyi vektor, hogy generátor-rendszer legyen R^3-ban
1		
2		
3		
4		
5		

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in R^n$ vektorok. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

c) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}, \underline{c}-\underline{a}$ is lineárisan független.

d) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ is lineárisan független.

e) Ha $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.

f) Ha $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^3-nak, ha igen, adjunk meg egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+1 \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in R \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^4-nek, ha igen, adjunk meg egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a,b,c,d \in R \\ a=b \\ \text{és} \\ c=3d \end{array} \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vizsgáljuk meg, hogy $W \subset V$ halmaz altére-e V-ben. Ha igen, adjunk meg a dimenzióját és egy bázisát.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in R \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy vektorteret alkotnak-e...

a) Harmadfokú polinomok a valós számok felett.

b) Legfeljebb harmadfokú polinomok.

c) Azok a polinomok, amiknek az x=2 gyöke.

d) Azok a legfeljebb harmadfokú polinomok, amiknek az x=2 és az x=3 is gyöke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bontsuk fel a $\underline{v}$ vektort az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokkal párhuzamos komponensekre.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Egy síkban vannak-e az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ R^n-beli vektorok. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggő, akkor $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ is lineárisan összefüggő.

c) Ha $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

d) Ha $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Vizsgáljuk meg, hogy V altere-e R^3-nak, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist V-ben.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^4-nek, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan független vektorok R^n-ben. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}, \underline{b} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}, \underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorokból álló vektorrendszer bázis-e R^3-ban, és ha igen, akkor határozzuk meg a $\underline{d}$ vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi, R^3-beli vektorok generált alterét. Amennyiben ez az eltér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az R^n-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}, 3\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ vektorok is biztosan lineárisan függetlenek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Alteret akot-e R^2-ben azon (x, y) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

b) Alteret akot-e R^3-ban azon (x, y, z) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $xy = yz$?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg R^4-ben egy, az $\underline{u}$, $\underline{v}$, és $\underline{w}$ vektorokat tartalmazó bázist, majd írjunk fel ebben a bázisban az $\underline{a}$ koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris egyenletrendszerek

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert bázis transzformációval.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 2$$
$$2x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1 + x_4 = 5$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss eliminációval.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 2$$
$$2x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1 + x_4 = 5$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a Gauss elimináció segítségével.

a)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

b)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a Gauss elimináció segítségével.

a)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

b)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert bázis transzformáció segítségével.

$$2x_1 - x_4 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$
$$8x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Gauss elimináció segítségével.

$$2x_1 - x_4 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$
$$8x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az α és β paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? A feladatot a Gauss elimináció segítségével oldjuk meg.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az α és β paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? A feladatot a Gauss elimináció segítségével oldjuk meg.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az α, β és γ paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? (Oldjuk meg bázis transzformációval)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \beta$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_2 + 4x_3 + \gamma x_4 = 4$$
$$3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = \alpha$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az α, β és γ paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? (Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \beta$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_2 + 4x_3 + \gamma x_4 = 4$$
$$3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = \alpha$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bázis transzformáció segítségével számítsuk ki a

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\underline{v_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló vektorrendszer rangját, illetve állapítsuk meg, hogy előállítható-e segítségükkel az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss elimináció segítségével számítsuk ki a

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló vektorrendszer rangját, illetve állapítsuk meg, hogy előállítható-e segítségükkel az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}$ független vektorok, és

$$\underline{v_1} = \underline{a_1} - 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$$

$$\underline{v_2} = \underline{a_1} + \underline{a_3}$$

$$\underline{v_3} = 3\underline{a_1} + 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$$

Mekkora a $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ vektorrendszer rangja, illetve előállítható-e velük a $\underline{b} = \underline{a_1} + 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$ vektor?
Számításainkat a bázis transzformáció segítségével végezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}$ független vektorok, és

$$\underline{v_1} = \underline{a_1} - 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$$

$$\underline{v_2} = \underline{a_1} + \underline{a_3}$$

$$\underline{v_3} = 3\underline{a_1} + 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$$

Mekkora a $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ vektorrendszer rangja, illetve előállítható-e velük a $\underline{b} = \underline{a_1} + 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$ vektor?
Számításainkat a Gauss elimináció segítségével végezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az alábbi mátrix inverzét a bázis transzformáció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az alábbi mátrix inverzét a Gauss elimináció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az alábbi mátrix inverzeit a bázis transzformáció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az alábbi mátrix inverzeit a Gauss elimináció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát. Ha az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást. (Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 8$$
$$4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 = 23$$
$$5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 = 14$$
$$2x_1 + p \cdot x_4 = q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát. Ha az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást. (Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 8$$
$$4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 = 23$$
$$5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 = 14$$
$$2x_1 + p \cdot x_4 = q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 - 3x_2 - 14x_3 = -17$$
$$2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 = q - 34$$
$$3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 = 4q - 37$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek.

Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$x_1 - 3x_2 - 14x_3 = -17$$
$$2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 = q - 34$$
$$3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 = 4q - 37$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy a p valós paraméterek mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$
$$2x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 17$$
$$x_1 + p \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 5$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy a p valós paraméterek mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$
$$2x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 17$$
$$x_1 + p \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 5$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét, majd döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire nem létezne az inverzmátrix.

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét, majd döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire nem létezne az inverzmátrix.

(Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Determináns, adjungált, kvadratikus alakok

Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsait.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -5 \\ -4 & -1 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsait.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az alábbi mátrixnak milyen p paraméter esetén létezik inverze, milyen p paraméterre lesz a determinánsa éppen 0, illetve milyen p paraméterre lesz az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi mátrixok adjungáltjait.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét az adjungált segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az adjungált segítségével.

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 16$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = -3$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk az alábbi determinánsokat.

a) $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 4 & 16 & 64\\ 1 & 7 & 49 & 343\end{pmatrix}$

b) $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 4 & 25\\ 1 & 27 & 8 & 125\end{pmatrix}$

c) $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 4 & 9\\ -1 & 1 & -8 & 27\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vannak itt ezek a mátrixok, döntsük el, hogy milyen definitek.

$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az A mátrixhoz és $\underline{x}$ vektorhoz tartozó kvadratikus alakokat.

a) $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 7\\ 4 & 3 & 6\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

c) Adott a $Q(\underline{x})$ kvadratikus alak, határozzuk meg ebből az A mátrixot.

$$Q(\underline{x})=5x_1^2-2x_2^2+4x_3^2+8x_1x_2+7x_1x_3-6x_2x_3$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el az alábbi kvadratikus alakok definitségét.

a) $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$

b) $Q(\underline{x}) = -5x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sajátérték, sajátvektor, sajátfelbontás

a) Sajátvektora-e az A mátrixnak az $\underline{u}$ és a $\underline{v}$ vektor?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix} \qquad \underline{u}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \quad \underline{v}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

b) Számoljuk ki az $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Itt van egy nagyszerű mátrix, ezzel a három vektorral:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix} \qquad \underline{u}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} \quad \underline{v}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} \quad \underline{w}=\begin{pmatrix}4\\ 10\end{pmatrix}$$

És a feladatunk az, hogy derítsük ki, ezek közül a vektorok közül melyik sajátvektora az A mátrixnak. A sajátvektorhoz pedig számoljuk majd ki a sajátértékeket is.

b) Számoljuk ki az A mátrix sajátértékeit.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

c)

Itt van egy nagyszerű mátrix, ezzel a három vektorral:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \underline{u}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} \quad \underline{v}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix} \quad \underline{w}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

Nézzük meg, hogy ezek közül a vektorok közül melyik sajátvektor, és a sajátvektorokhoz számoljuk ki a hozzájuk tartozó sajátértékeket is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Itt ez a mátrix, és számoljuk ki a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$$

b) Itt jön aztán ez a 3x3-as mátrix. Számoljuk ki a sajátértékeit, sajátvektorait és a sajátvektorok által generált sajátaltereket.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Itt ez a mátrix, és számoljuk ki a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$$

b) Itt jön aztán ez a 3x3-as mátrix. Számoljuk ki a sajátértékeit, sajátvektorait és a sajátvektorok által generált sajátaltereket.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

A megoldásunk során a Gauss-transzformációt használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

A megoldásunk során a Gauss-transzformációt használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázis transzformáció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss elimináció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a mátrix.

$$A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Számoljuk ki, hogy mennyi A^{10}.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a mátrix.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 16 & 5\end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az A^6 mátrixot, az A^{-1} mátrixot és még az $\left(A^{-1}\right)^2 mátrixot is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrixnak karakterisztikus polinomja-e a p polinom?

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix} \qquad p(x)=x^2-3x+1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt van ez a mátrix, és készítsük el a spektrálfelbontását.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki a sajátértékeit és rajzoljuk fel a Gersgorin-köröket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris leképezések

Adjuk meg az x tengelyre való tükrözés mátrixát R^2-ben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Tükrözzük az x tengelyre a $\underline{v}$ vektort, ha

a) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a bázis vektorok: $\underline{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a bázis vektorok: $\underline{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

a) $R^2 \to R^2 \qquad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix} \qquad a,b \in R$

b) $R^2 \to R^2 \qquad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a,b \in R$

c) $R^3 \to R^3 \qquad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \cdot b \\ c \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

$R^3 \to R^3 \qquad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját:

$R^3 \to R^3 \qquad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát, adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját.

$$R^3 \to R^3 \qquad \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a R^2-ben az x tengelyre tükrözés, az origó középpontú α-szögű forgatás, és az origóra tükrözés mátrixait.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík transzformációi közül melyek dimenzió tartó transzformációk?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlóak.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Létezik-e olyan $\varphi : R^2 \to R^2$ lineáris transzformáció, mely az $(1,0)$ vektorhoz, az $(1,1)$ vektorhoz, és az $(1,2)$ vektorhoz is az $(1,2)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

b) Létezik-e olyan $\varphi : R^2 \to R^2$ lineáris transzformáció, mely az $(1,2)$ vektorhoz, az $(5,4)$ vektorhoz, és a $(3,3)$ vektorhoz is a $(2,1)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

c) Létezik-e olyan $\varphi : R^2 \to R^3$ lineáris transzformáció, mely az $(1,2)$ vektorhoz, a $(2,5,5)$ vektort, és a $(2,1)$ vektorhoz is a $(4,1,1)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\varphi : R^2 \to R^2$ lineáris transzformáció az $(1,2)$ és a $(3,4)$ vektorhoz is az $(5,6)$ vektort rendeli. Írjuk fel φ mátrixát, majd határozzuk meg $\dim Im\varphi$ és $\dim Ker\varphi$ értékét.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott egy $\varphi : R^3 \to R^3$ lineáris transzformáció mátrixa. Határozzuk meg $\dim Im\varphi$ és $\dim Ker\varphi$ értékét.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot