Lineáris függetlenség, bázis, rang

Vektorteret alkotnak-e?

a) Komplex számok

b) Másodfokú polinomok

c) Legfeljebb másodfokú polinomok

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetelenek vagy összefüggőek.

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetelenek vagy összefüggőek.

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Töltsük ki az alábbi táblázatot.

vektorok száma	megadható-e ennyi vektor úgy, hogy független legyen R^3-ban	megadható-e ennyi vektor, hogy generátor-rendszer legyen R^3-ban
1		
2		
3		
4		
5		

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in R^n$ vektorok. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

c) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}, \underline{c} - \underline{a}$ is lineárisan független.

d) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ is lineárisan független.

e) Ha $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.

f) Ha $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bontsuk fel a $\underline{v}$ vektort az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokkal párhuzamos komponensekre.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Egy síkban vannak-e az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^3-nak, ha igen, adjunk meg egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in R \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^4-nek, ha igen, adjunk meg egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \, \begin{matrix} a, b, c, d \in R \\ a = b \\ \text{és} \\ c = 3d \end{matrix} \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ R^n-beli vektorok. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggő, akkor $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ is lineárisan összefüggő.

c) Ha $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

d) Ha $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vizsgáljuk meg, hogy $W \subset V$ halmaz altére-e V-ben. Ha igen, adjunk meg a dimenzióját és egy bázisát.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az alábbi bázist alakítsuk át ortogonális bázissá a Gram-Schmidt-ortogonalizáció segítségével.

$$\underline{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Vizsgáljuk meg, hogy V altere-e R^3-nak, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist V-ben.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^4-nek, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyenek $\underline{u}, \underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan független vektorok R^n-ben. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}, \underline{b} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}, \underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorokból álló vektorrendszer bázis-e R^3-ban, és ha igen, akkor határozzuk meg a $\underline{d}$ vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi, R^3-beli vektorok generált alterét. Amennyiben ez az eltér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az R^n-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}, 3\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ vektorok is biztosan lineárisan függetlenek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Alteret akot-e R^2-ben azon (x, y) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

b) Alteret akot-e R^3-ban azon (x, y, z) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $xy = yz$?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg R^4-ben egy, az $\underline{u}$, $\underline{v}$, és $\underline{w}$ vektorokat tartalmazó bázist, majd írjunk fel ebben a bázisban az $\underline{a}$ koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot