MATEKING.HU

Feladatgyűjtemény

SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY ALAPJAI tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 16.

Tartalomjegyzék

Kombinatorika.. **2**

Gráfelméleti alapok... **10**

Gráfok bejárása és gráfalgoritmusok.. **13**

Gráfok izomorfiája és síkbarajzolhatósága.. **23**

Irányított gráfok, gráfalgoritmusok irányított gráfokban... **36**

Menger tételei, többszörös összefüggőség.. **40**

CPM és PERT algoritmus... **41**

Páros gráfok, párosítások... **46**

Kromatikus szám, klikk, perfekt gráfok... **48**

Gráfparaméterek, párosítások.. **58**

Maximális folyam, Ford-Fulkerson-algoritmus... **66**

Mátrixok és vektorok.. **72**

Vektorterek, független és összefüggő vektorok.. **77**

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok rangja és inverze...................................... **82**

Determináns, sajátérték, sajátvektor.. **90**

Lineáris leképezések.. **94**

Oszthatóság... **96**

Euklideszi algoritmus & Diofantoszi egyenletek.. **98**

Kongruenciák... **100**

Kombinatorika

Egy futóverseny döntőjében 3 versenyző ér célba leghamarabb. Hányféle sorrendben érkezhetnek be?

Egy másik futóversenyen 6-an kerültek a döntőbe: Olasz, svájci, francia, német, osztrák, svéd. Hányféle sorrendben érkezhetnek célba?

Egy harmadik futóversenyen 7-en kerültek a döntőbe: Olasz, svájci, francia, német, osztrák, svéd, magyar.
a) Hányféle sorrend lehet, ha tudjuk, hogy a svájci versenyző ér először célba?
b) Hányféle sorrend lehet, ha tudjuk, hogy a svájci versenyző a negyedik?
c) Hány olyan sorrend van, amikor a német az első és a francia a negyedik?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt vannak ezek a számjegyek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
a) Hányféle ötjegyű számot tudunk készíteni belőlük, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk föl?
b) Hány olyan ötjegyű számot tudunk készíteni belőlük, amiben a harmadik számjegy 7-es, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk föl?
c) Hány olyan ötjegyű számot tudunk készíteni belőlük, amiben a harmadik számjegy páros, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk föl?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bob őrülten rajong a modern művészetekért, és elhatározza, hogy festeget egy kicsit... Minden festményét két színnel készíti el, a színeket pedig 9 lehetséges szín közül választja ki.

a) Hányféleképpen tud két színt kiválasztani?

b) Bob 36 darab képe közül 4-et kiállítanak egy múzeumban. Hányféleképp lehet kiválasztani a 36 darab kép közül azt a 4-et amit kiállítanak?

c) Bob 36 darab képe közül 4-et elajándékoz 4 különböző múzeumnak. Hányféleképpen teheti ezt meg?

d) Egy másik kiállítás megnyitóján 24 festő volt jelen, akiknek a képeit kiállították. A megnyitón a 24 festő mindegyike mindegyik másik festővel koccint. Hány koccintás történt?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Hányféleképpen ülhet le öt ember egymás mellé a padon?

b) Hányféleképpen ülhet le öt ember közül három egymás mellé a padon?

c) Hányféleképpen választhatunk ki öt ember közül hármat?

d) Egy buszon 20-an utaznak, és az öt megállója során végül minden utas leszáll. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

e) Egy nyereményjátékon 20 ember között kisorsolnak 5 ajándékot. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a nyeremények különbözőek, és egy ember csak egyet kaphat? Hogyha a nyeremények különbözőek, de egy ember többet is kaphat? Végül, ha a nyeremények egyformák és egy ember csak egyet kaphat?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Öt lány, Hanna, Luca, Léna, Mira és Lili együtt megy moziba, és öt egymás melletti helyre vesznek jegyet.
a) Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé?
b) Hányféleképpen ülhetnek egymás mellé, ha Mira mindenképpen középen szeretne ülni?
c) Hányféleképpen ülhetnek egymás mellé, ha Mira mindenképpen a szélén szeretne ülni?
d) Hányféleképpen ülhetnek le a lányok, ha Mira és Lili mindenképpen egymás mellé szeretne ülni?
e) Hányféleképpen ülhetnek le a lányok, ha Hanna és Luca biztosan nem akar egymás mellé ülni?

Hányféleképpen rakhatunk egymás mellé egy polcra hat könyvet, ha a piros és a kék könyvet nem szeretnénk egymás mellé rakni. Ezek a könyvek: Rózsaszín, sárga, piros, lila, kék, zöld

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hat darab számkártyánk van: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hányféle hatjegyű számot tudunk kirakni ezekkel a kártyákkal?

Hat darab számkártyánk van: 7, 7, 8, 8, 8, 8. Hányféle hatjegyű számot tudunk kirakni ezekkel a kártyákkal?

12 darab virágot szeretnénk sorban egymás mellé ültetni. Van köztük 5 piros, 4 sárga és 3 lila. Hányféle lehetőség van?

Ezeknek a számkártyáknak a segítségével nyolcjegyű számokat készítünk: 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7
a) Összesen hány nyolcjegyű szám készíthető?
b) Hányféle páros nyolcjegyű szám készíthető?

Itt vannak ezek a számjegyek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
a) Hányféle ötjegyű szám készíthető ezekkel a számjegyekkel, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk föl?
b) Hányféle ötjegyű szám készíthető ezekkel a számjegyekkel, ha minden számjegyet többször is használhatunk?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1) Öt lány hányféleképpen ülhet le egy kerek asztal köré?

2) Hat különböző szín felhasználásával szeretnénk hat cikkelyből álló esernyőket színezni. A hat szín: piros, sárga, zöld, kék, türkiz és rózsaszín.
a) Hányféle különböző színezésű esernyő készíthető?
b) Hány olyan eset van, amikor a piros és a sárga színek egymás mellé kerülnek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy dominókészlet azonos méretű dominókból áll. Minden dominó egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken elhelyezett pöttyök száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egyforma nem lehet egy készletben. Hány darabból áll egy dominókészlet?

b) Egy állatkert beszerez 4 hím és 5 nőstény oroszlánt, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

1) Háromnál kevesebb oroszlán egyik kifutóban sem lehet.

2) A nagyobb kifutóba több oroszlán kerül, mint a kisebbikbe.

3) Mindkét kifutóban hím és nőstény oroszlánt is el kell helyezni.

4) Egy kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény.

Hányféleképpen helyezhetik el a 9 oroszlánt a két kifutóban?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből négyjegyű számokat készítünk úgy, hogy bármelyik számjegyet akárhányszor felhasználhatjuk.
a) Hány négyjegyű szám alkotható?
b) Hány páros szám alkotható?
c) Hány 10-zel osztható szám alkotható?

A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből négyjegyű számokat készítünk úgy, hogy minden számjegyet csak egyszer használhatunk.
a) Hány négyjegyű szám alkotható?
b) Hány páros szám alkotható?
c) Hány 10-zel osztható szám alkotható?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Tíztagú társaság raftingolni indul egy ötszemélyes, egy háromszemélyes és egy kétszemélyes csónakkal.
a) Hányféleképpen ülhetnek a csónakokba, ha a csónakokon belül a helyek közöt nem teszünk különbséget?
b) Hányféleképpen ülhetnek be, ha két ember mindenképpen uyganabban a csónakban szeretne utazni?

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből négyjegyű számokat készítünk úgy, hogy egy jegyet csak egyszer használhatunk.
a) Hány olyan szám keletkezik, amelyben két páros és két páratlan számjegy szerepel?
b) Hány olyan szám készíthető, amiben szerepel a 9-es számjegy?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hat szín felhasználásával zászlókat készítünk. A hat szín: fehér, piros, sárga, zöld, kék és fekete

a) Hányféle három függőleges sávból álló zászló készíthető, ha a szomszédos sávok nem lehetnek egyforma színűek?

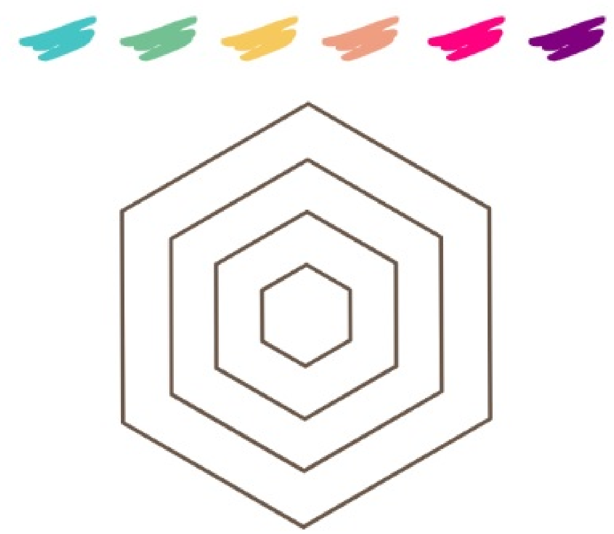
b) Hányféle három függőleges sávból álló zászló készíthető, ha mindegyik sáv más színű?

c) Hányféle három függőleges sávból álló zászló készíthető, ha mindegyik sáv más színű, és szerepel benne a piros szín?

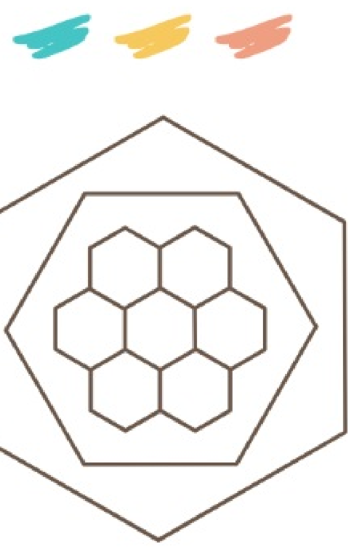
d) Hányféle három függőleges sávból álló zászló készíthető, ha a szomszédos sávok nem lehetnek egyforma színűek, és szerepel benne a piros szín?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy csempét hat különböző színnel szeretnénk kiszínezni úgy, hogy az egymással szomszédos tartományok mindig különböző színűek legyenek. Hányféle színezés lehetséges?



Egy másik csempét három különböző színnel szeretnénk kiszínezni úgy, hogy az egymással szomszédos tartományok mindig különböző színűek legyenek. Hányféle színezés lehetséges?



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A, B, C és D pontok egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos az E, F és G pontokra illeszkedő egyenessel.
a) Hány olyan különböző egyenes létezik, amely a pontok közül legalább kettőre illeszkedik?
b) Hány olyan háromszög van, amelynek a csúcsait a 7 pont közül választjuk ki? (Két háromszög különböző, ha legalább az egyik csúcsukban eltérnek egymástól.)

Egy szabályos háromszög egyik oldalát az A és B pontokkal három egyenlő részre osztottuk, a másik oldalát a C, D és E pontokkal négy egyforma szakaszra osztottuk, a harmadik oldalát pedig az F, G, H és I pontokkal öt egyforma részre osztottuk. Hány olyan különböző négyszög van, amelyeknek csúcsai ezek az osztópontok, és az eredeti háromszögnek minden oldalán van legalább egy csúcs?

Helyezzük el a síkon az A, B, C, D, E, F és G pontokat úgy, hogy a pontok közül bármelyik hármat kiválasztva azok egy háromszög három csúcsát alkossák. Hány olyan egyenes van a síkban, amely legalább két ponton átmegy?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Tíz különböző szín felhasználásával hányféle különböző 6 cikkelyből álló esernyő készíthető, ahol
a) minden cikkely más színű?
b) két szín ismétlődik felváltva?
c) az egyik szín kétszer szerepel, de a többi szín csak egyszer?

Öt lány, Hanna, Luca, Léna, Mira és Olívia leülnek egy kerek asztal köré.
a) Hányféle lehetőség van, ha Luca és Léna mindenképpen egymás mellett akar ülni?
b) Hány lehetőség van, ha Mira és Olívia nem szeretne egymás mellett ülni?

8 különböző színű gyöngyből hányféle kapocs nélküli nyaklánc készíthető, ahol a piros és a sárga gyöngy egymás mellet van?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sífutóveresenyen 8-an vesznek részt, mindegyikük más-más országból.
a) A cél előtt nem sokkal már látszik, hogy az utolsó helyen a dán versenyző fog végezni, az első három helyen a svájci, a francia és a norvég fog osztozni, az olasz pedig a negyedik lesz. Hányféleképpen érhetnek célba a versenyzők?
b) Hányféleképpen érhetnek célba akkor, ha a 8 versenyzőről annyit tudunk, hogy nem a svájci fog nyerni, viszont nem is a svjáci az utolsó?
c) Hányféleképpen érhet célba a 8 versenyző, ha tudjuk, hogy a francia biztosan megelőzi a svájcit, az olasz a harmadik, és a német az utolsó?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 8 fős baráti társaság vonattal utazik nyaralni. Mivel kicsit későn vették meg a vonatjegyet, olyan hely már nincs, ahol mind a 8-an együtt utazhatnának. Háromfős, kétfős és egyfős helyek vannak még szabadon. Egyedül egyikük sem szeretne utazni, ezért hármas és kettes csoportokban ülnek le a megmaradt helyekre. Hányféleképpen tudnak ilyen csoportokat alkotni?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 8 fős baráti társaság vonattal utazik nyaralni. Útközben szeretnének beszélgetni, ezért két egymás melletti négyes blokkba szeretnének ülni, ahol asztal is van.

a) Hányféleképpen tudnak leülni egy kocsin belül?

b) Hányféleképpen tudnak leülni úgy, hogy Anna és Bálint egymással szemben és ablak mellé üljenek?

c) Hányféleképpen tudnak leülni úgy, hogy Anna és Bálint egymás mellett, és Anna ablak mellett üljön?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van öt különböző színű dobókockánk, egy sárga, egy piros, egy kék, egy zöld és egy rózsaszín. Sorban egymás után mindegyik dobókockával egyet dobunk.

a) Hányféle sorrendben tudunk dobni a kockákkal úgy, hogy nem a piros kockával kezdünk?

b) Hányféle olyan dobás lehetséges, hogy nem a piros kocka az első és a sárga az utolsó?

c) Hányféle olyan dobás lehetséges, ahol a dobott pontokat is figyelembe vesszük, az első dobás 4-es, az utolsó dobás pedig a piros kockával történik?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van 3 kék, 3 zöld, 3 sárga és 3 piros színű dobókockánk. Hányféleképpen tudunk kiválasztani közülük 4 kockát úgy, hogy
a) pontosan három különböző színű kocka legyen?
b) pontosan két különböző színű kocka legyen?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy társaságban van 5 férfi és 5 nő. Hányféleképpen tudnak leülni egy kör alakú asztal köré, ha

a) férfiak és nők felváltva ülnek?

b) az egyik férfi mindenképpen egy adott nő mellett szeretne ülni?

c) két ember a társaságban semmiképpen nem szeretne egymás mellett ülni?

d) férfiak és nők felváltva ülnek és egy férfi semmiképpen nem szeretne egy adott nő mellett ülni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy nyomozás során egy hattagú társaság (A, B, C, D, E, F) tagjait 3 fős csoportokban hallgatják ki. Minden olyan 3 fős csoport kihallgatását megszervezik, amelyben A és B együtt nincs jelen. Összesen hány ilyen csoportos kihallgatást kell szervezni?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy séf új ízek kitalálásán kísérletezik. Az ételek ízesítéséhez hatféle fűszer áll rendelkezésére: keserű, savanyú, édes, sós, csípős és fanyar. Hányféleképp ízesítheti az ételeket, hogyha a hatból három- vagy négyféle fűszert szeretne használni, de az édes és keserű nem szerepelhet egyszerre?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hány olyan háromjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyikben csupa különböző számjegyek szerepelnek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A szóbeli érettségi vizsgán egy osztály 35 tanulója közül az első csoportba öten kerülnek. Hányféle sorrendben felelhet történelemből az 5 kiválasztott diák?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hányféleképp rendezhetünk sorba 3 kék és 2 piros golyót?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hány 5-tel osztható ötjegyű szám alkotható a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hányféle különböző számot kaphatunk a 222 335 szám számjegyeinek felcserlésével?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfelméleti alapok

Oldjuk meg az alábbi gráfos feladatokat:

a) Egy tárgyalás elején minden résztvevő mindenkivel kezet fog. Így összesen minden résztvevő 4 másikkal fog kezet. Hányan vesznek részt a tárgyaláson és hány kézfogás volt összesen?

b) Egy iskolai versenyen Anna, Bence, Cecil, Dávid, Elemér, Fanni, Gábor, és Hanna játszanak egymással. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik.

Anna már játszott Bencével, Gáborral és Hannával.

Bence már játszott Annával, Cecillel és Gáborral.

Cecil csak Bencével, Dávid pedig csak Elemérrel játszott.

Rajzoljuk fel azt a gráfot, ami a jelenlegi állást tartalmazza! Hány játszma van még hátra?

c) Egy ötpontú teljes gráf csúcsai A, B, C, D, E.

Mekkora a B csúcs fokszáma?

Ha a gráfból két élt törlünk, milyen lehetséges értékek adódhatnak B fokszámára?

Mekkora lesz a két él törlése után a csúcsok fokszámainak összege?

Hány élt kell törölni ahhoz, hogy minden csúcs fokszáma 3 legyen?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismerettségek kölcsönösek). Az első öt személy válasza: 5, 4, 3, 2, 1. Ábrázoljuk a gráffal a társaság ismerettségi viszonyait! Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban?

b) Rajzoljunk egy olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0, 1, 2, 2, 3, 4.

c) Egy irodában összesen 11-en dolgoznak. Egy adott napon a 11 ember ennyi kollégájával találkozott: 0, 1, 2, 2, 2, 5, 0, 0, 4, 4, 2.

Ábrázoljuk a találkozásoknak egy lehetséges gráfját. Hány találkozás volt összesen?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg a könisbergi-hidak rejtélyét.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan gráf, amelyben a pontok fokszáma:

a) 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6

b) 2, 2, 4, 4, 5, 7, 7, 7

c) 3, 3, 4, 4, 5, 7, 7, 7

d) 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Petráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl. Szemléltessük gráffal a lejátszott mérkőzéseket!

b) Egy iskola asztali tenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

Rajzold le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!

Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Öt különböző számjegyet leírtunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak, vagy hamisak!

a) Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

b) Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az ábrán egy 3x3-as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A1, A2, ..., C3) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.

a) Rajzoljuk fel a kirakós játék gráfját, és határozzuk meg a fokszámok összegét!

b) Igazoljuk, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan kör, amely páratlan sok élből áll!

c) A teljesen kirakott képen jelöljünk meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakós játék általuk alkotott részlete már ne legyen összefüggő!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Rajzolj egy olyan 5 pontú gráfot, melyben a pontok fokszáma: 4, 3, 3, 2, 2

b) Rajzolj egy olyan 6 pontú gráfot, melyben a pontok fokszáma: 0, 1, 2, 2, 3, 4.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan fa, amelyben a pontok fokszáma:

a) 1, 1, 2, 2, 3, 4?

b) 1, 2, 2, 2, 3, 4?

c) 1, 1, 1, 1, 1, 5?

d) 1, 1, 1, 2, 2, 3?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan gráf, amelyben a pontok fokszáma: 6, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok fokszáma 7, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Létezik-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok fokszáma 7, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal, ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

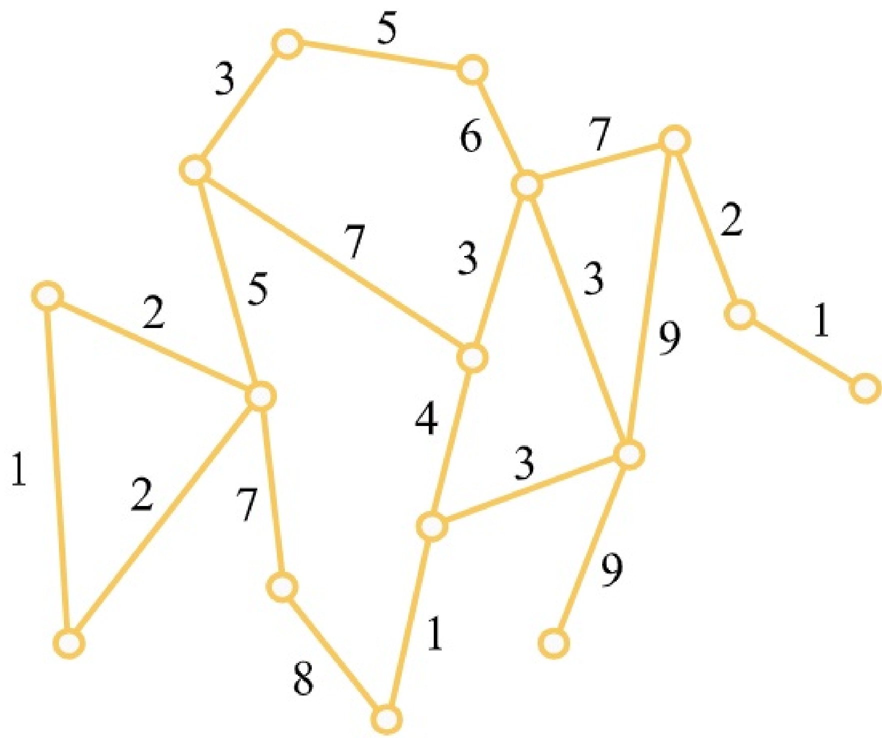
a) Lehetséges, hogy fagráfot kapunk?

b) Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

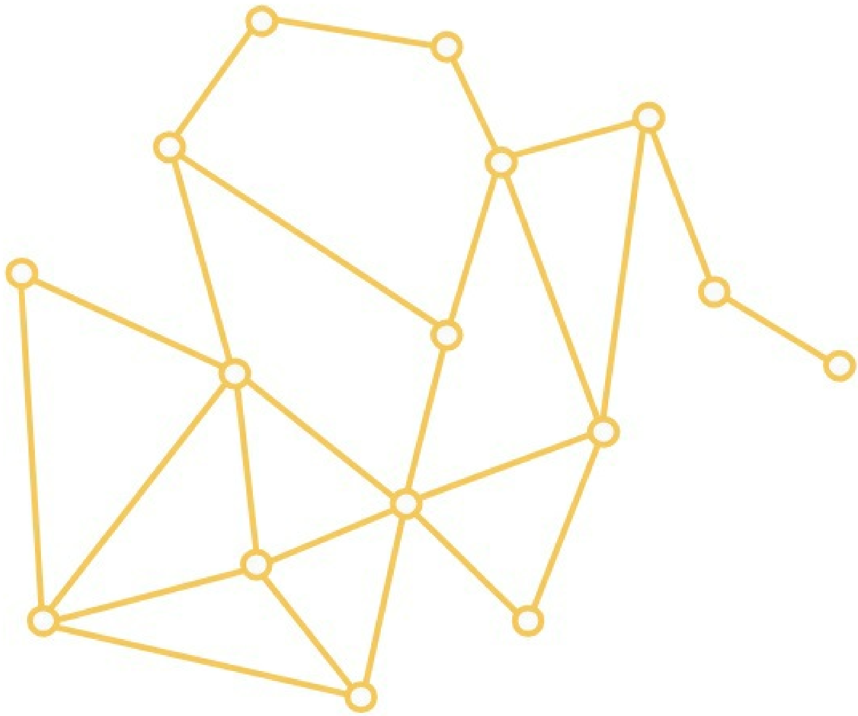
Gráfok bejárása és gráfalgoritmusok

Adjuk meg ennek a gráfnak a minimális súlyú feszítőfáját a Kruskal-algoritmus segítségével.



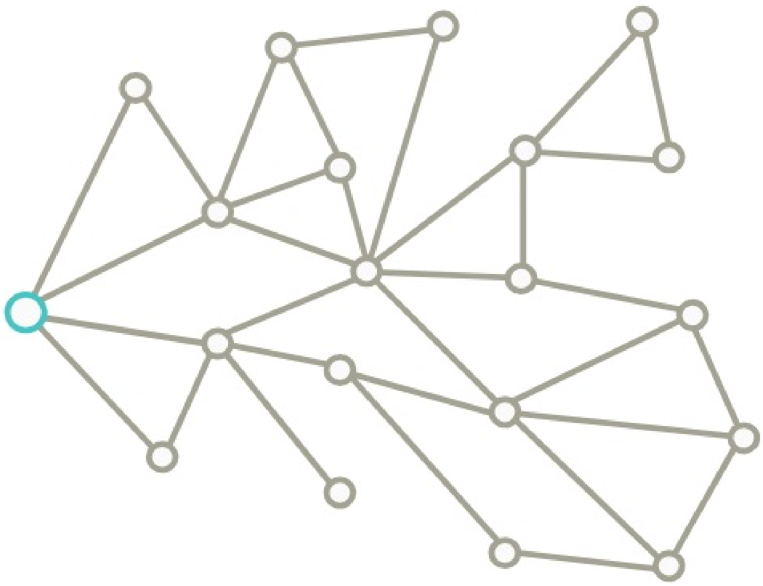
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Térképezzük föl az alábbi gráfot a szélességi bejárás (BFS) segítségével.



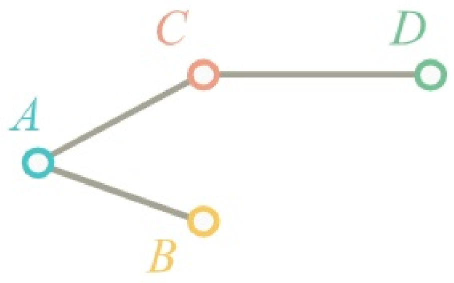
Megnézem a kapcsolódó epizódot

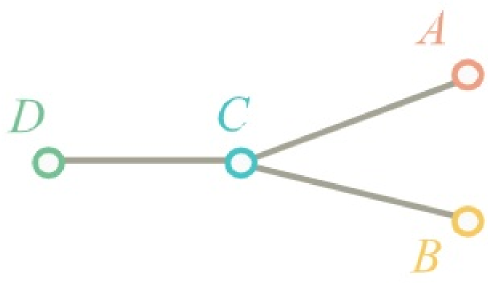
Térképezzük föl az alábbi gráfot a mélységi bejárás (DFS) segítségével.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

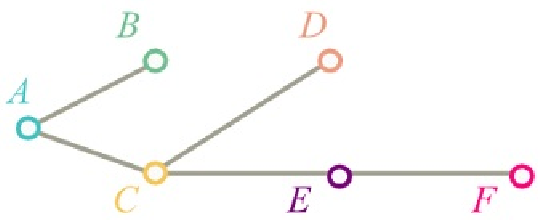
a) Íme, egy gráf két különböző kezdőpontjából készített BFS fája:

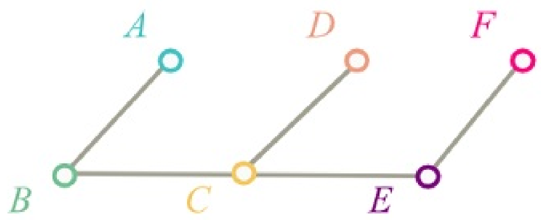




Adjuk meg az eredeti gráfot.

b) Egy gráfban minden csúcs fokszáma páros, és két különböző kezdőpont alapján készített BFS fája:

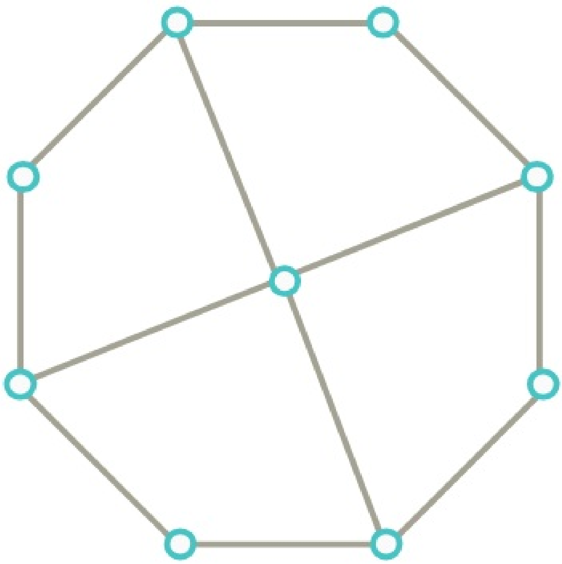




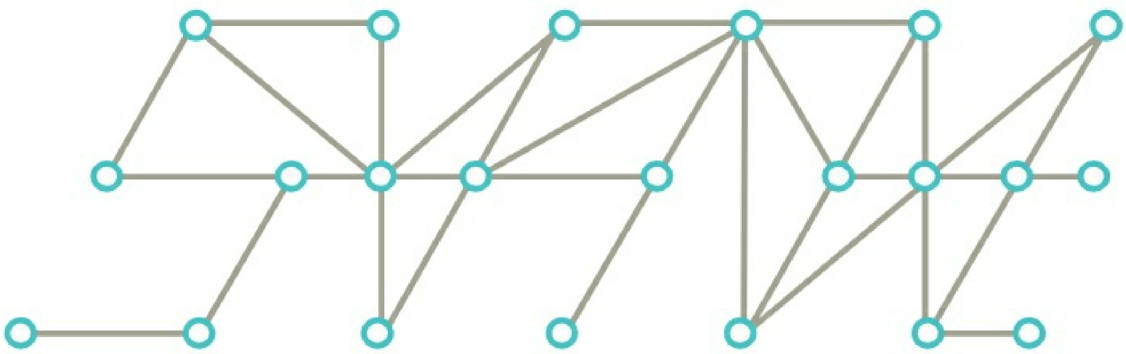
Adjuk meg az eredeti gráfot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Létezik-e az alábbi gráfban Hamilton kör?



b) Létezik-e az alábbi gráfban Hamilton út?



Megnézem a kapcsolódó epizódot

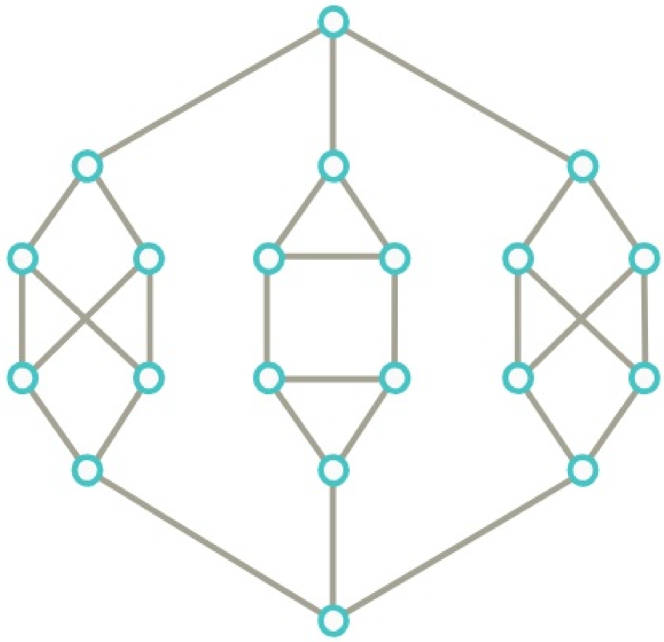
a) Bizonyítsuk be, hogy minden 4-nél nagyobb n számra van olyan n csúcsú G gráf, hogy G-ben és a komplementerben is van Hamilton kör.

b) Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban két nem szomszédos csúcs foka 49, az összes többi csúcs foka legalább 50. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban Hamilton út.

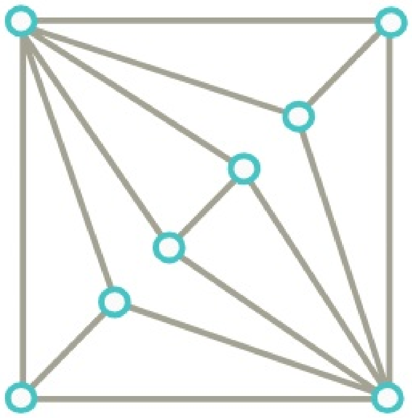
c) Mit mondhatunk arról a 101 pontú gráfról, amiben minden csúcs foka legalább 50. Van-e a gráfban Hamilton út?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

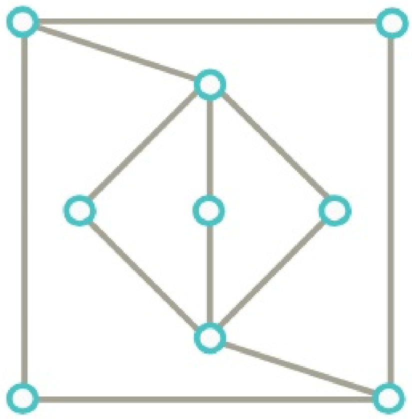
a) Derítsük ki, hogy van-e az alábbi gráfban Hamilton kör. Ha nincs, akkor minimum hány újabb élt kell hozzávennünk ahhoz, hogy legyen?



b) Derítsük ki, hogy van-e az alábbi gráfban Hamilton kör. Ha nincs, akkor minimum hány újabb élt kell hozzávennünk ahhoz, hogy legyen?



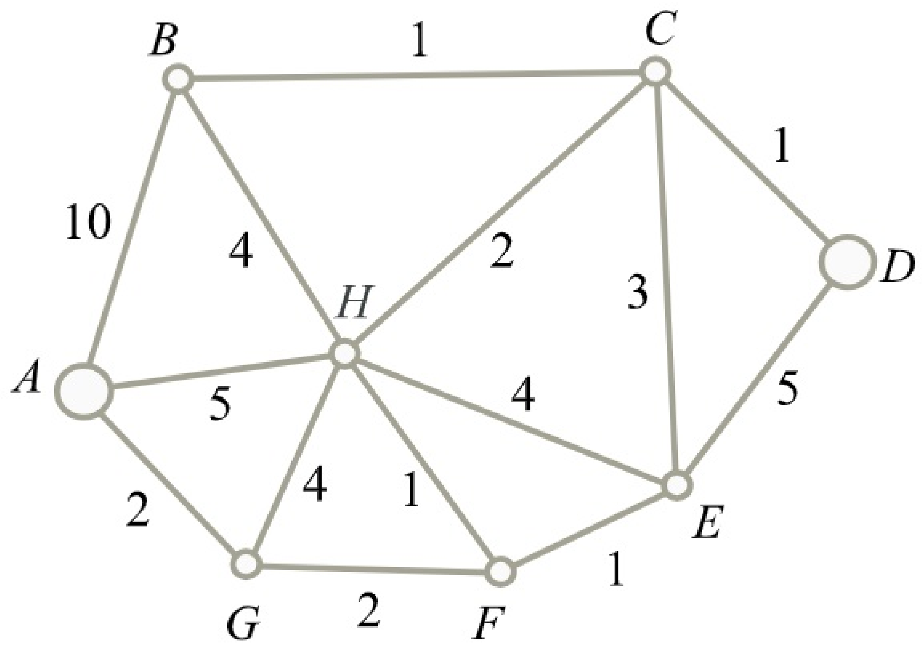
c) Minimum hány élt kell behúznunk ebben a gráfban, hogy legyen benne Hamilton kör?



d) Adott egy 100 csúcsú egyszerű gráf, amiben két szomszédos csúcs foka 49, az összes többi csúcs foka pedig legalább 50. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban Hamilton út.

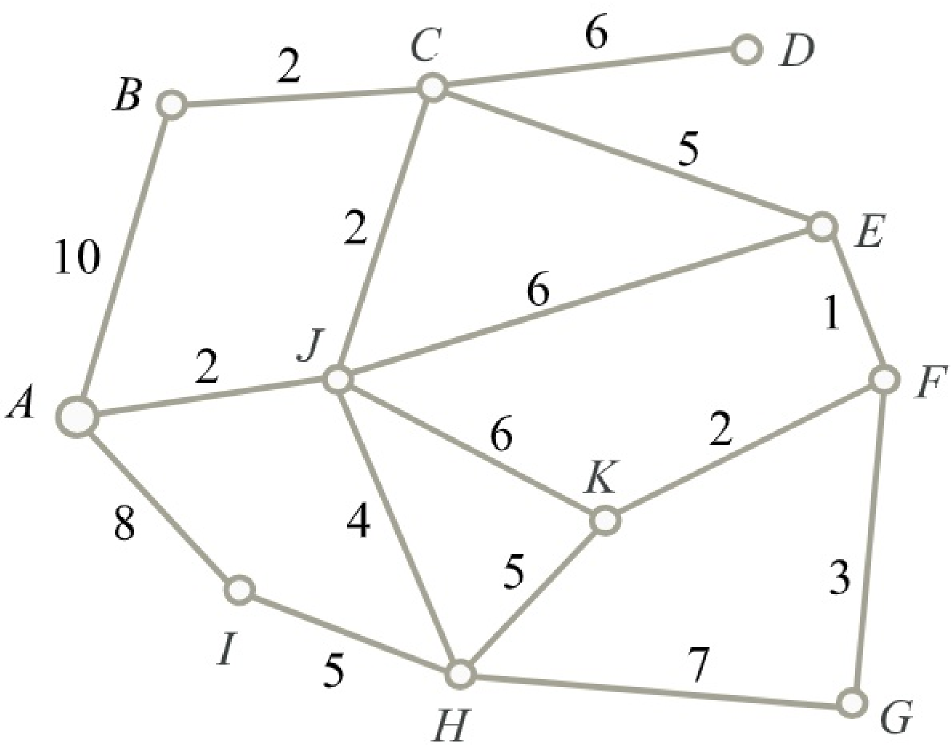
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi gráfban az A és D csúcsok távolságát.



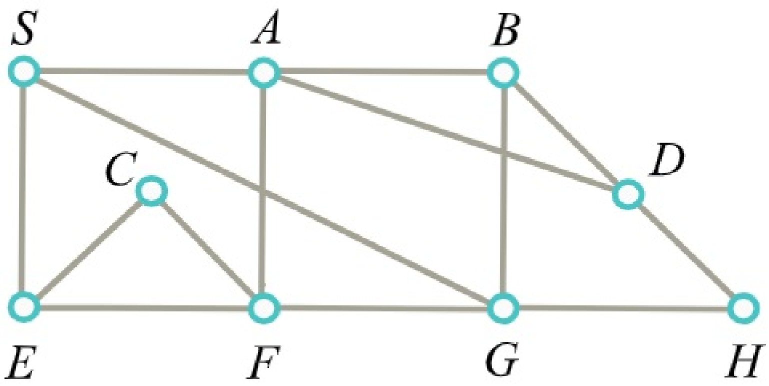
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Térképezzük föl az alábbi gráfot a Dijkstra algoritmus segítségével.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) A BFS algoritmus az alábbi ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, _ , _ , _ , H, _ , F, C, _ .
Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS fát.

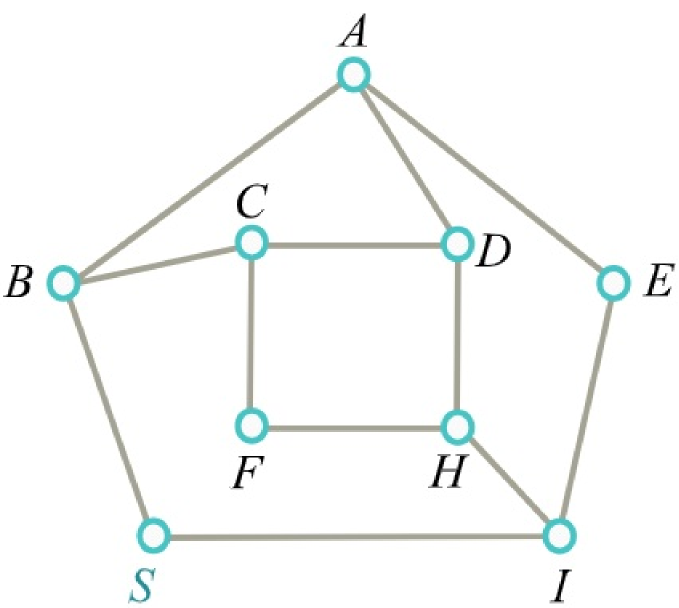


b) Az ábrán látható gráf egyik élét elhagytuk. Az él elhagyása előtt S-ből indított BFS algoritmus a gráf csúcsait az alábbi sorrendben járta be:

i) S, B, I, C, A, F, H, E, D

ii) S, I, B, E, D, H, C, A, F

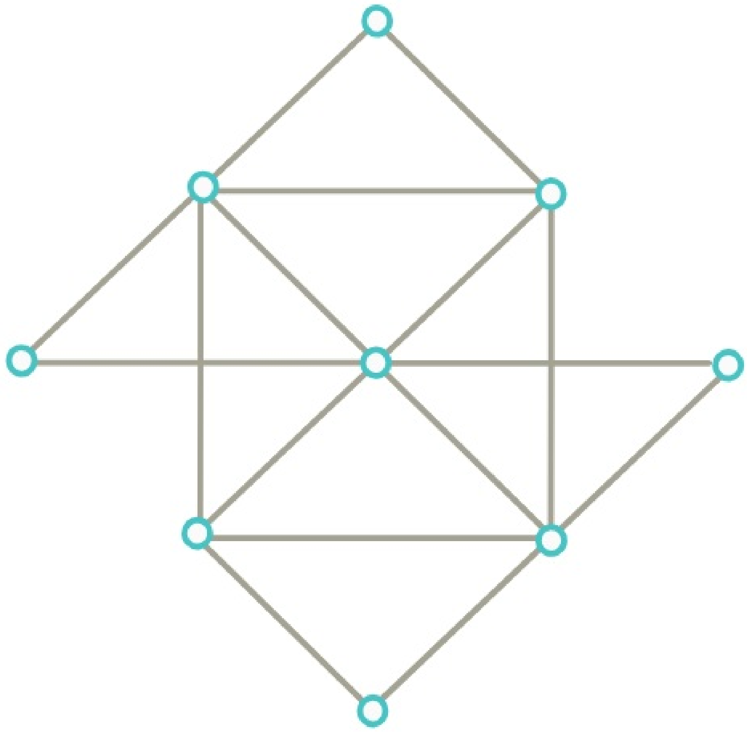
Megállapítható-e egyértelműen, hogy melyik élt hagytuk el? Ha igen, akkor adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát is.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

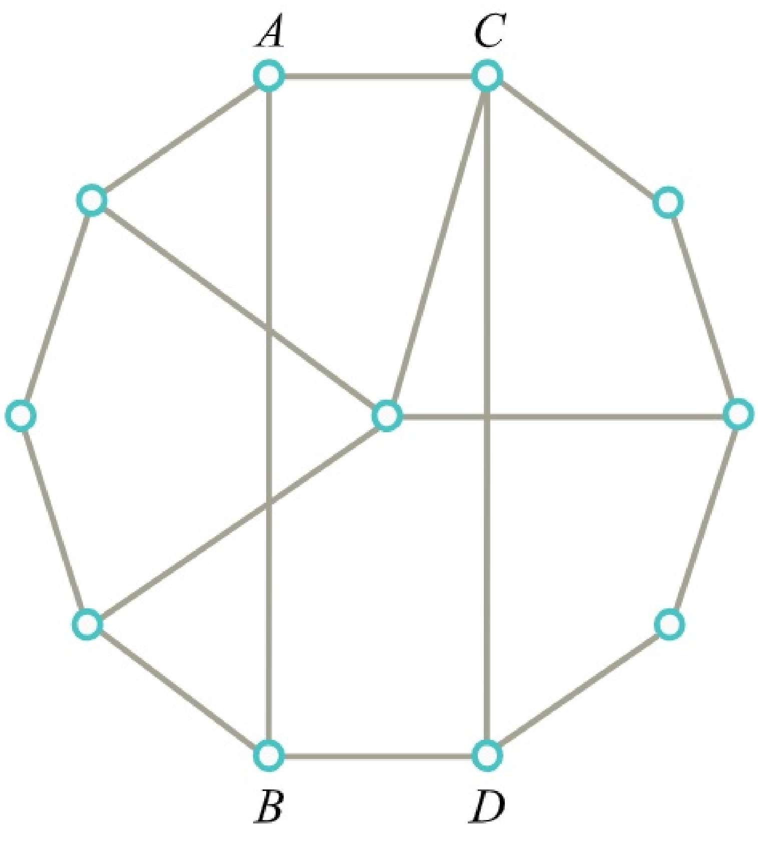
a) Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton köre, illetve Hamilton útja.



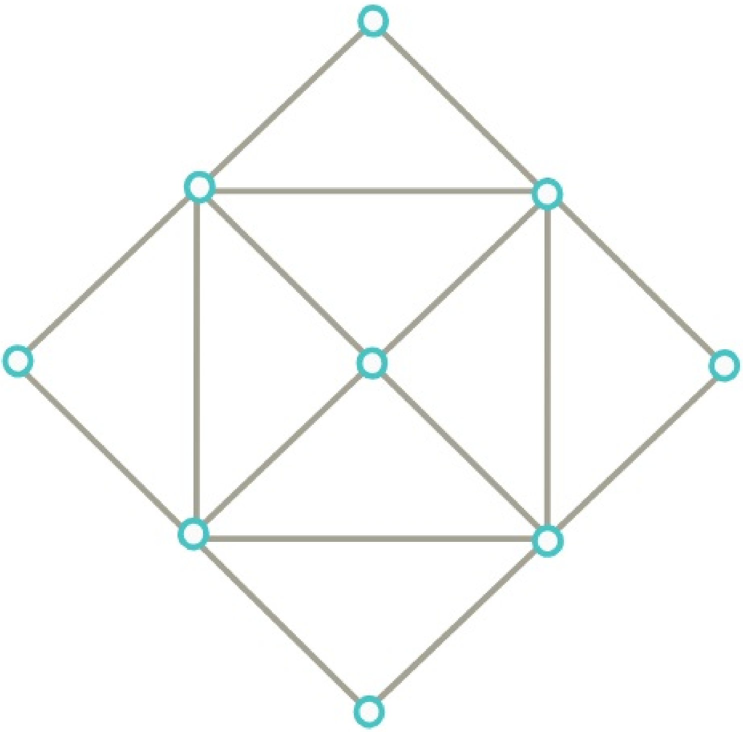
b) Van-e az alábbi gráfban olyan Hamilton kör...

i) ami nem tartalmazza az {A,B} élt?

ii) ami nem tartalmazza a {C,D} élt?

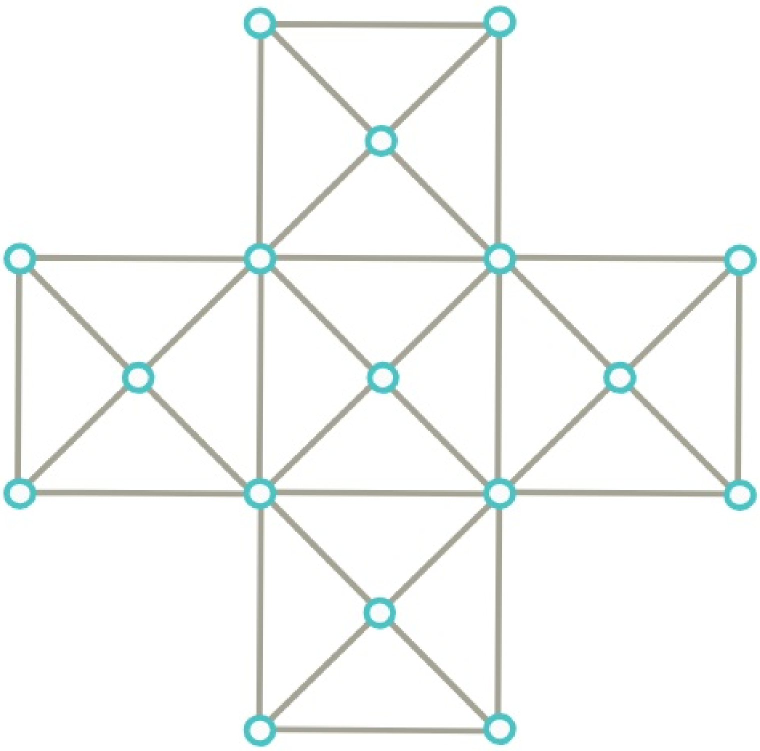


c) Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton köre, illetve Hamilton útja.



d) 1001 pontú gráf minden csúcsa legalább 501 fokú, kivéve egyetlen csúcsot, aminek a fokszáma 500. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban van Hamilton kör.

e) Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton köre, illetve Hamilton útja.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G)=\{1,2,\ldots,10\}$. Az $x,y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y| \leq 2$.

Van-e G-nek olyan feszítőfája, hogy összes éle olyan, amelyre $|x-y|=2$ teljesül?

b) A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G)=\{1,2,\ldots,10\}$. Az $x,y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y|=2$ vagy $|x-y|=3$.

Van-e G-ben Hamilton út, illetve Hamilton kör?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy 100 csúcsú G összefüggő gráf éleit az 1 és 2 súlyokkal súlyoztuk úgy, hogy az 1 súlyú élek részgráfja (vagyis az a gráf, melynek csúcsai azonosak G csúcsaival, de annak csak az 1 súlyú éleit tartalmazza) 7 komponensből áll.

Határozzuk meg G egy minimális összsúlyú feszítőfájának súlyát.

b) Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 101 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfok izomorfiája és síkbarajzolhatósága

a) Egy 24 csúcsú G egyszerű gráfban 12 csúcs foka 5, a másik 12 csúcs foka pedig 16. Összefüggő-e a G gráf komplementere?

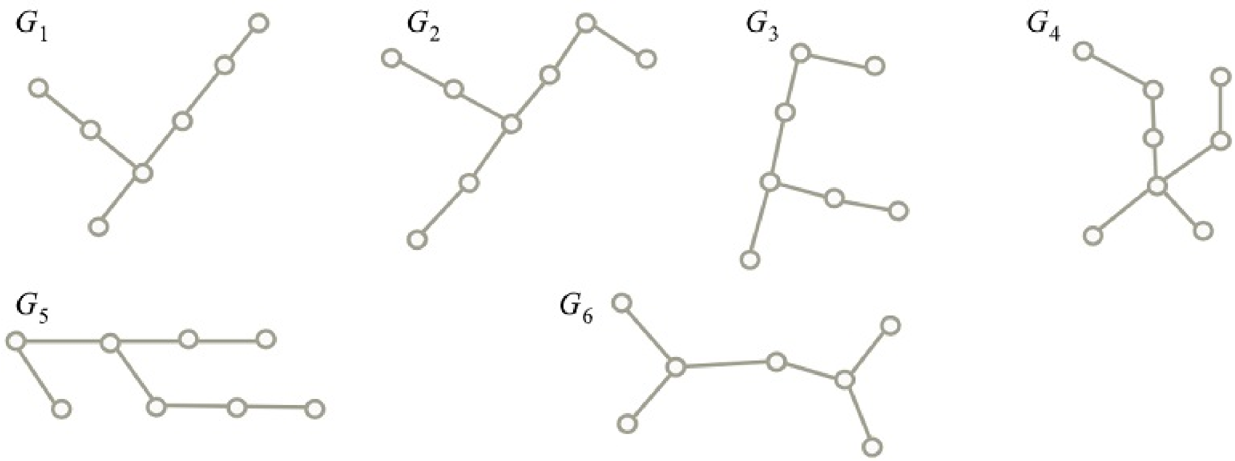
b) Egy összefüggő egyszerű gráfnak 40 csúcsa és 42 éle van. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban 3 különböző kör. Két kör akkor különböző, ha van legalább egy olyan él, amelyiket az egyik kör tartalmazza, de a másik nem.

c) Egy összefüggő egyszerű gráfnak 1000 csúcsa és 1000 éle van. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban 3 különböző feszítőfa. Két feszítőfa akkor különböző, ha van legalább egy olyan él, amelyiket az egyik feszítőfa tartalmazza, de a másik nem.

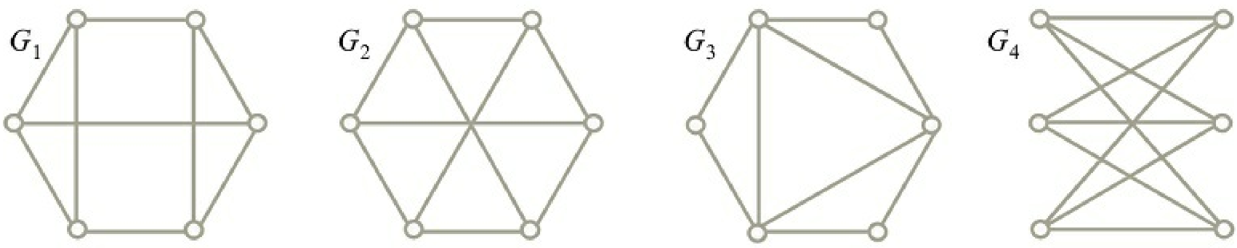
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbáljuk meg kitalálni, hogy mely gráfok izomorfak egymással.

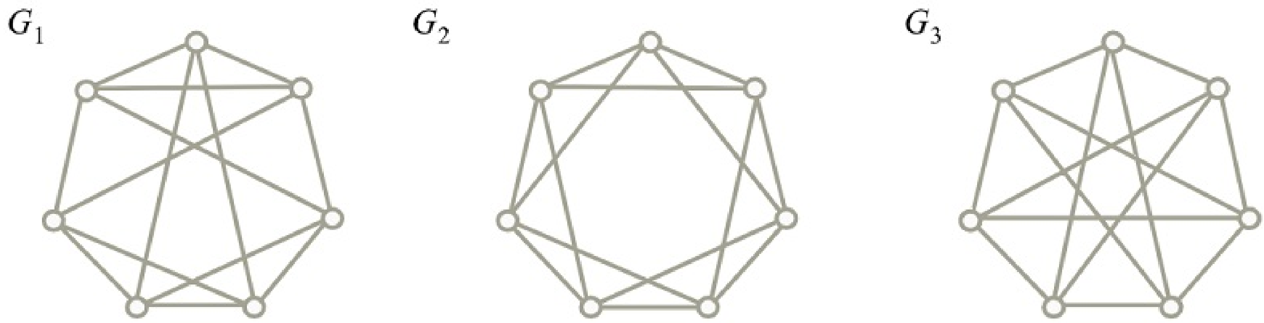
a)



b)

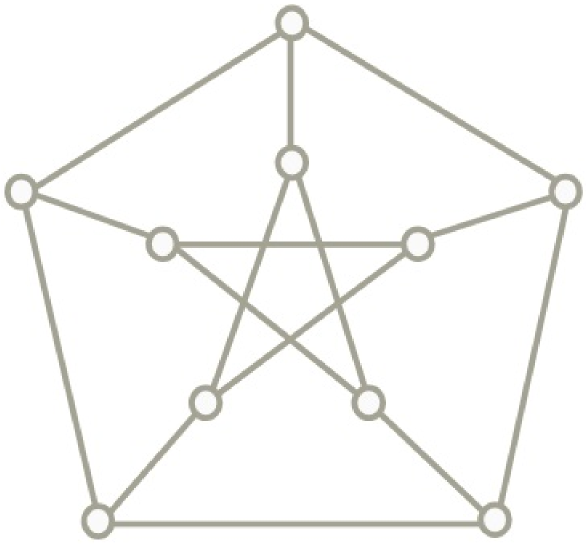


c)



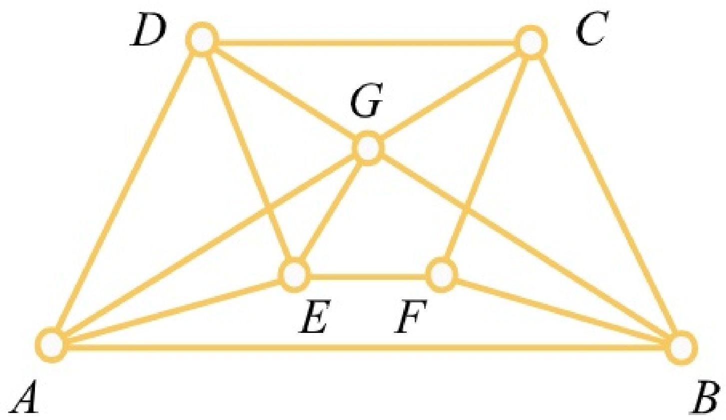
[Megnézem a kapcsolódó epizódot]

Nézzük meg, hogy síkbarajzolható-e.

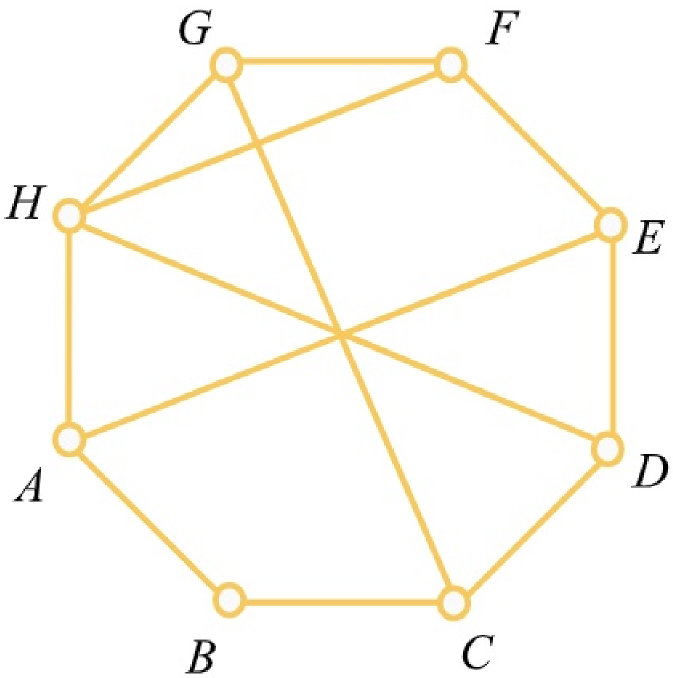


Megnézem a kapcsolódó epizódot

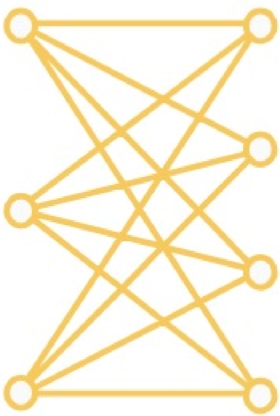
a) Döntsük el, hogy síkbarajzolható-e. Ha igen, rajzoljuk síkba.



b) Döntsük el, hogy síkbarajzolható-e. Ha igen, rajzoljuk síkba.



c) Legalább hány élt kell törölnünk ebből a gráfból, hogy a megmaradt gráf síkbarajzolható legyen?



Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Egy 100 pontú gráfról tudjuk, hogy 50 csúcs mindegyikének a foka legfeljebb 7 a másik 50 csúcs foka pedig legalább 56. Hány éle van ennek a gráfnak?

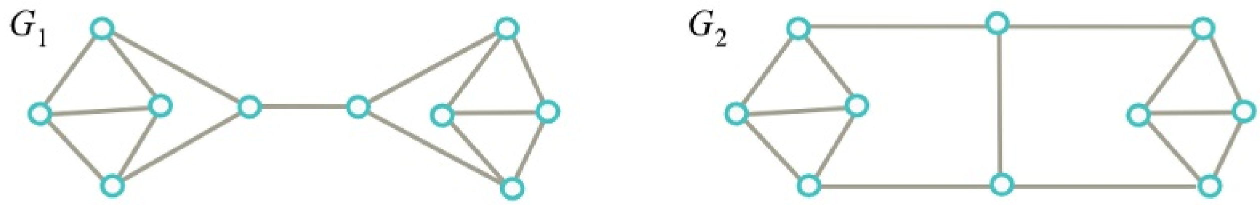
b) Egy konferencián 60-an vesznek részt. A résztvevők közül 20-an már legalább 27 emberrel kezetfogtak, a többiek pedig még csak legfeljebb 4 emberrel. Hány kézfogás történt eddig?

c) Bizonyítsuk be, hogy egy G gráf és a komplementere közül legalább az egyik összefügő.

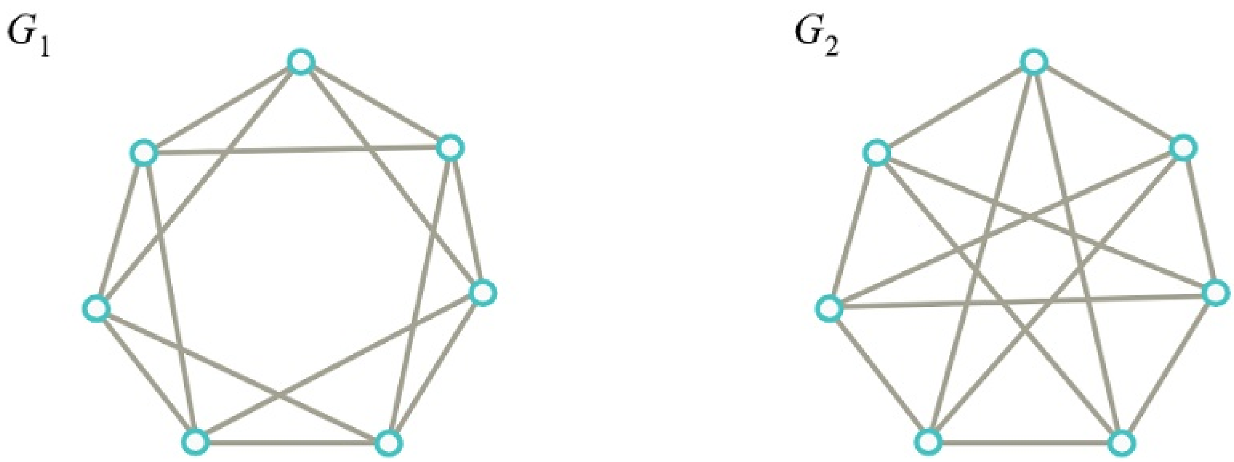
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

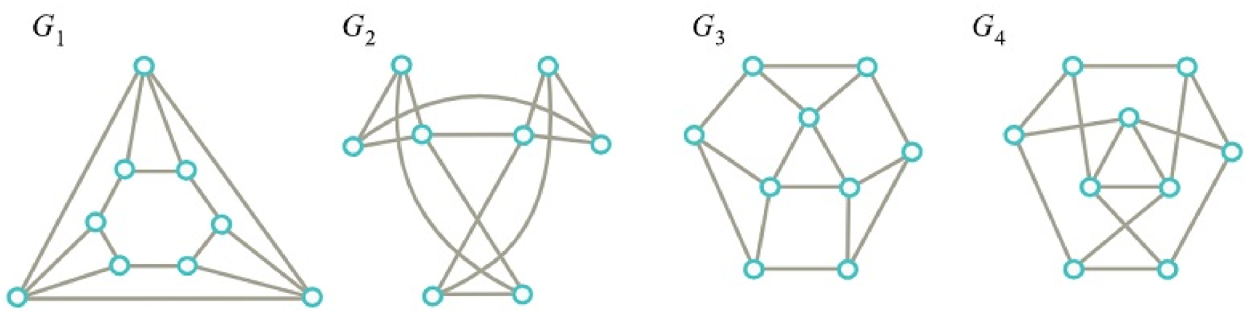
a)



b)



c)

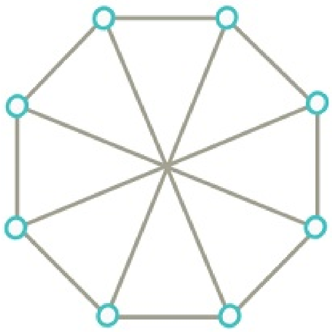


Megnézem a kapcsolódó epizódot

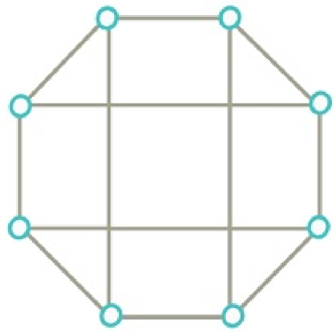
A következő gráfok közül melyek izomorfak?

a)

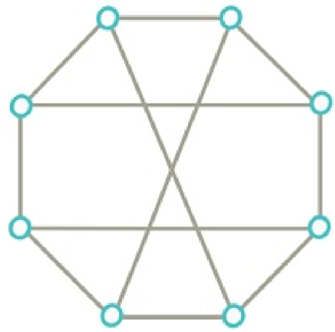
G_1



G_2

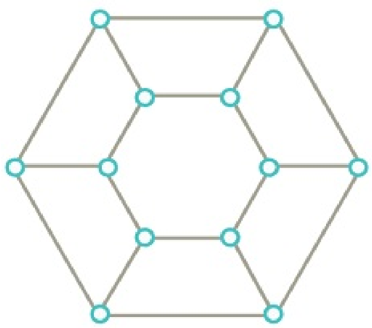


G_3

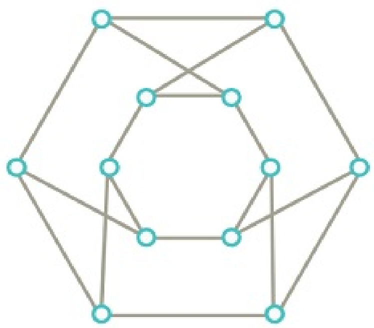


b)

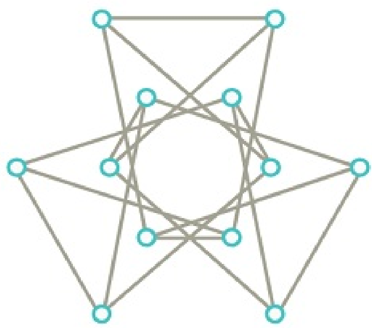
G_1



G_2

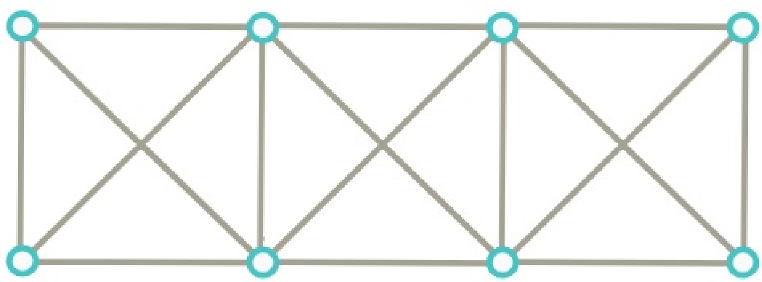


G_3

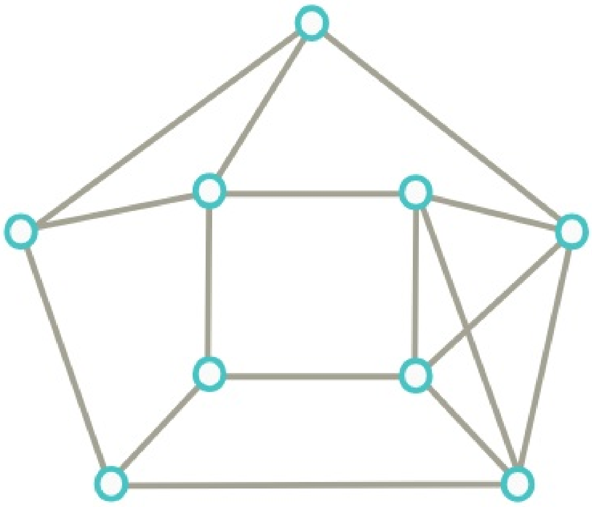


Megnézem a kapcsolódó epizódot

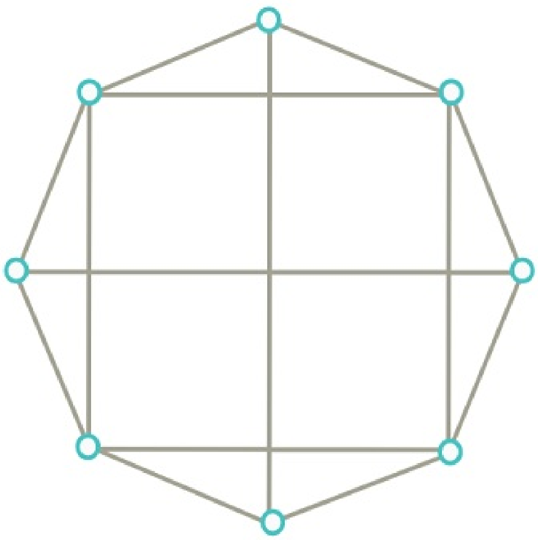
a) Maximálisan hány élt lehet hozzávenni az alábbi gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk?

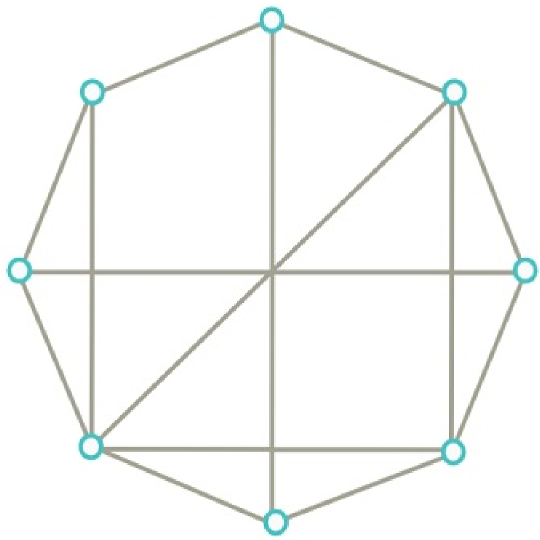


b) Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek, ha nem, akkor bizonyítsuk be ezt.

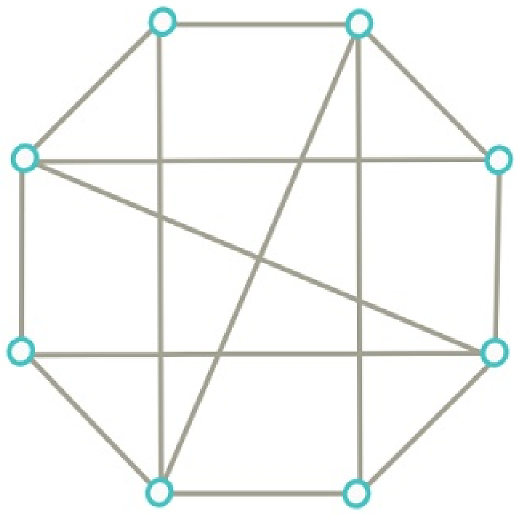


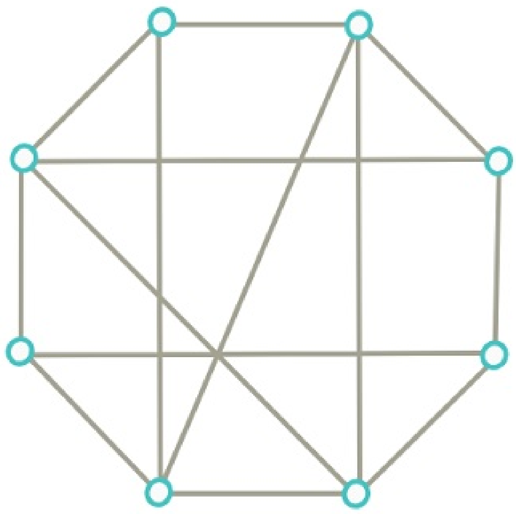
c) Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



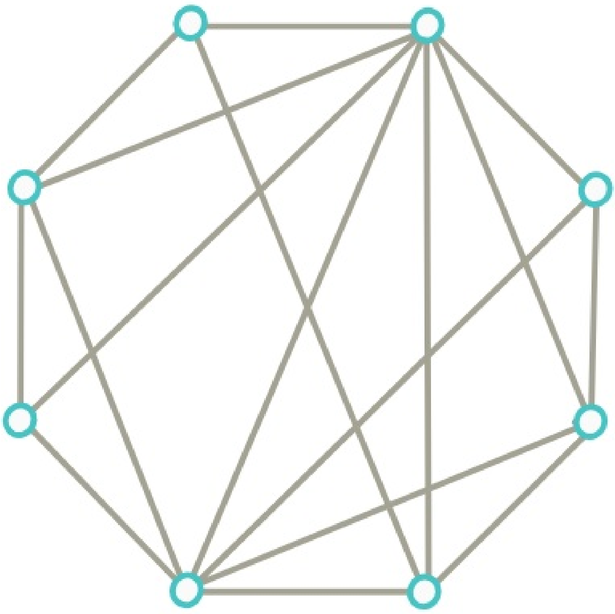


d) Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?





e) Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráfban van olyan csúcs, melynek foka legfeljebb 5.

b) Legyen G egy 13 pontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G és a komplementere közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.

c) Létezik-e olyan 4, 5, illetve 6 csúcsú gráf, amely izomorf a saját komplementerével?

d) Az 1000 csúcsú G gráf nem tartalmaz kört, a komponenseinek száma 8. Hány éle van G-nek?

e) Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 7-szer, a másik 44-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Hány csúcsa van egy síkbarajzolható 3-reguláris gráfnak, ha a síkbarajzolás során 20 tartomány keletkezik?

b) Egy versenyre 6 különböző országból érkeztek versenyzők. Bizonyítsuk be, hogy van köztük két olyan versenyző, akiknek az országa nem határos egymással.

c) Egy versenyre különböző országból érkeztek versenyzők. Legfeljebb hány országból indulhattak a versenyzők, ha bármelyik két versenyző szomszédos országból érkezett?

d) Egy 20 csúcsú, 3 komponensű gráfnak 18 éle van. Mutassuk meg, hogy a komponensek közül pontosan kettő fa.

e) Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élt úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.

f) Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van olyan csúcs, melyet a gráfból elhagyva (az összes rá illeszkedő éllel együtt) összefüggő gráfot kapunk.

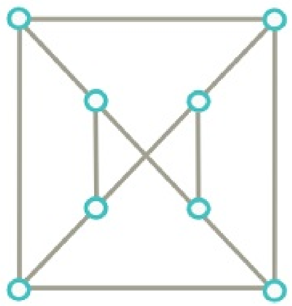
g) Rajzoljuk le az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát. (Az izomorfakat csak egyszer)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

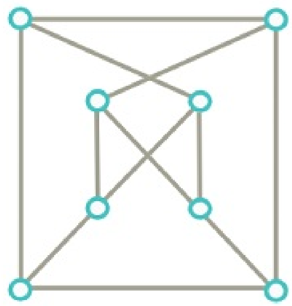
A következő gráfok közül melyek izomorfak?

a)

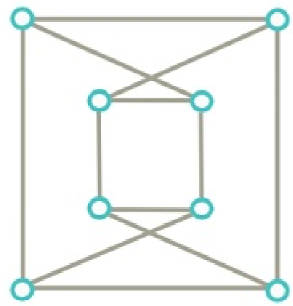
G_1



G_2

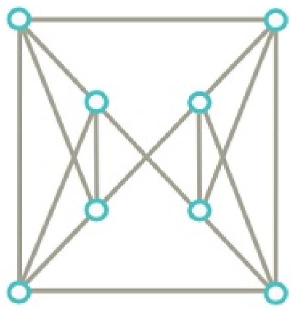


G_3

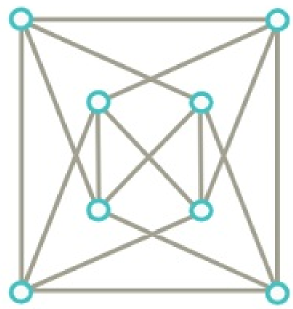


b)

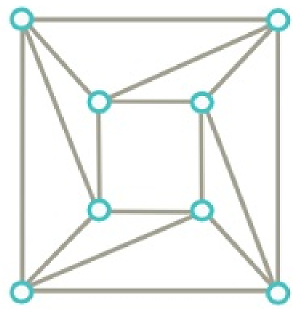
G_1



G_2



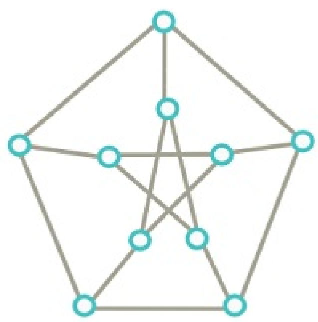
G_3



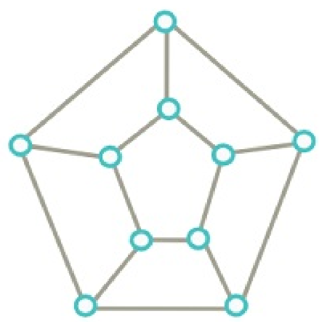
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

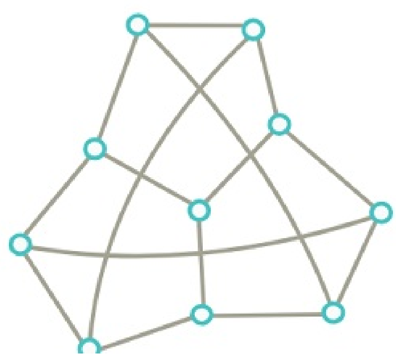
G_1



G_2

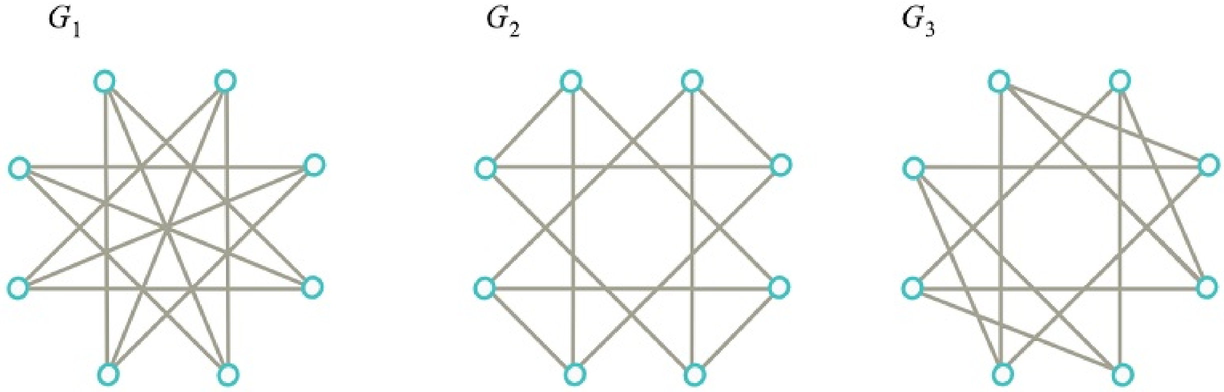


G_3



Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

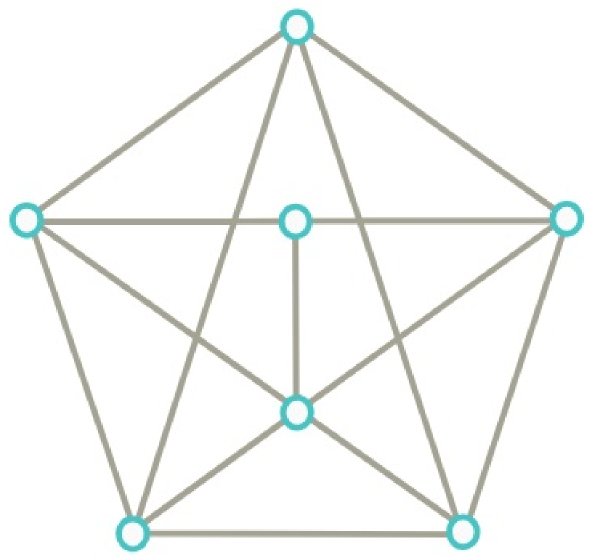


Megnézem a kapcsolódó epizódot

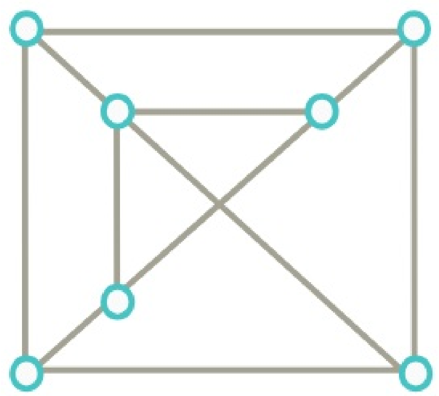
Döntsük el, hogy síkbarajzolható-e.

Ha igen, rajzoljuk síkba.

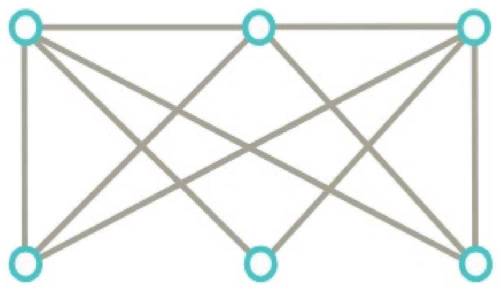
a)



b)



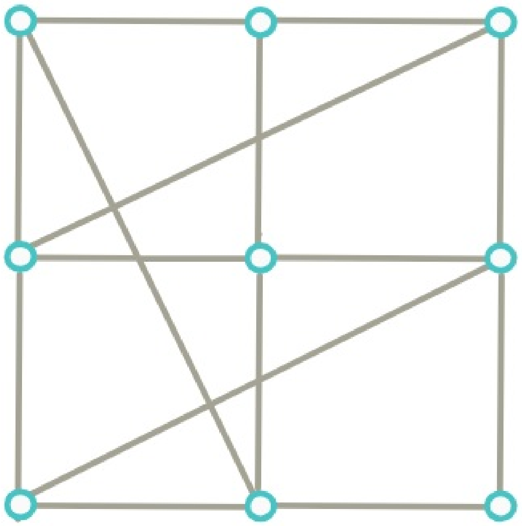
c)



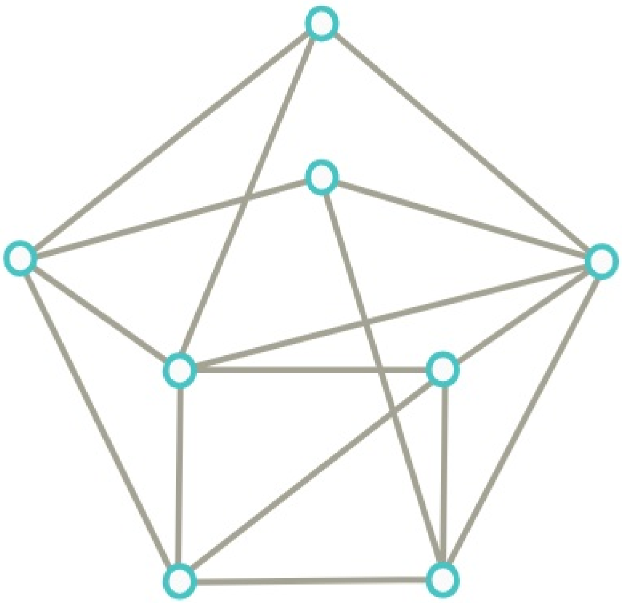
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi gráfok síkbarajzolhatók-e.

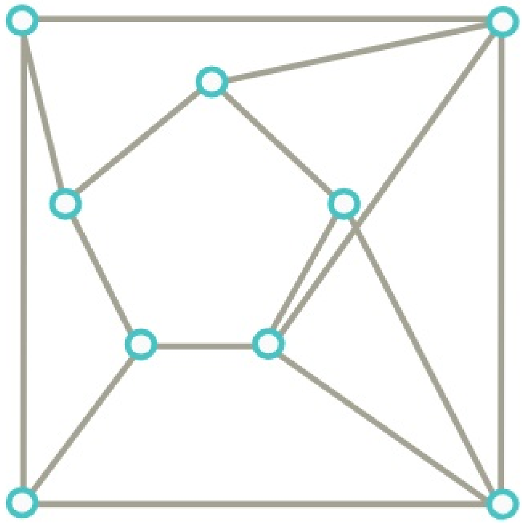
a)



b)



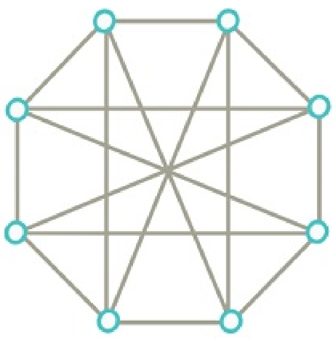
c)



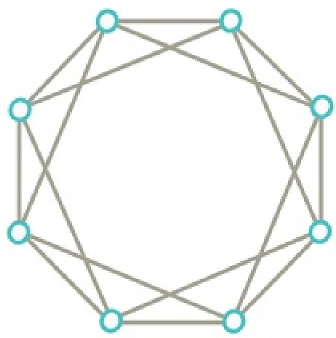
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A következő gráfok közül melyek izomorfak?

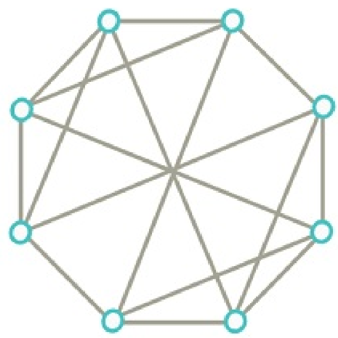
G_1



G_2



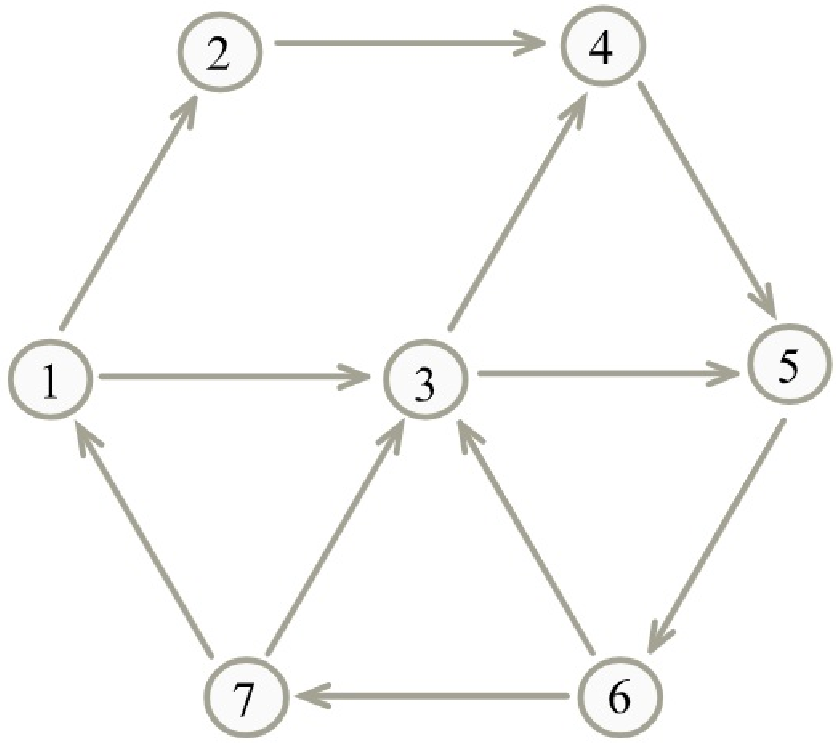
G_3



Megnézem a kapcsolódó epizódot

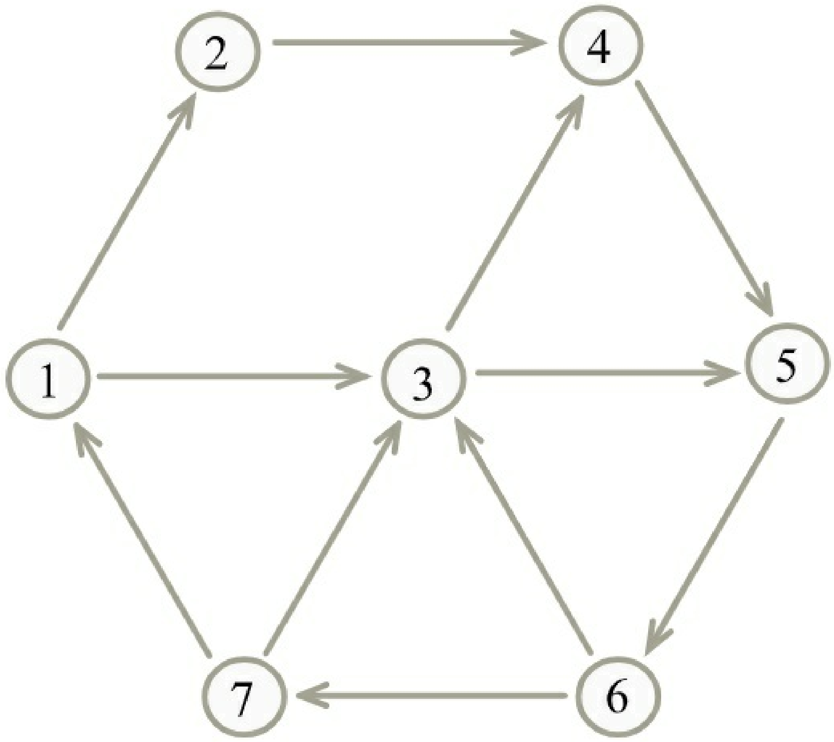
Irányított gráfok, gráfalgoritmusok irányított gráfokban

Adjuk meg az alábbi gráf DFS-fáját.



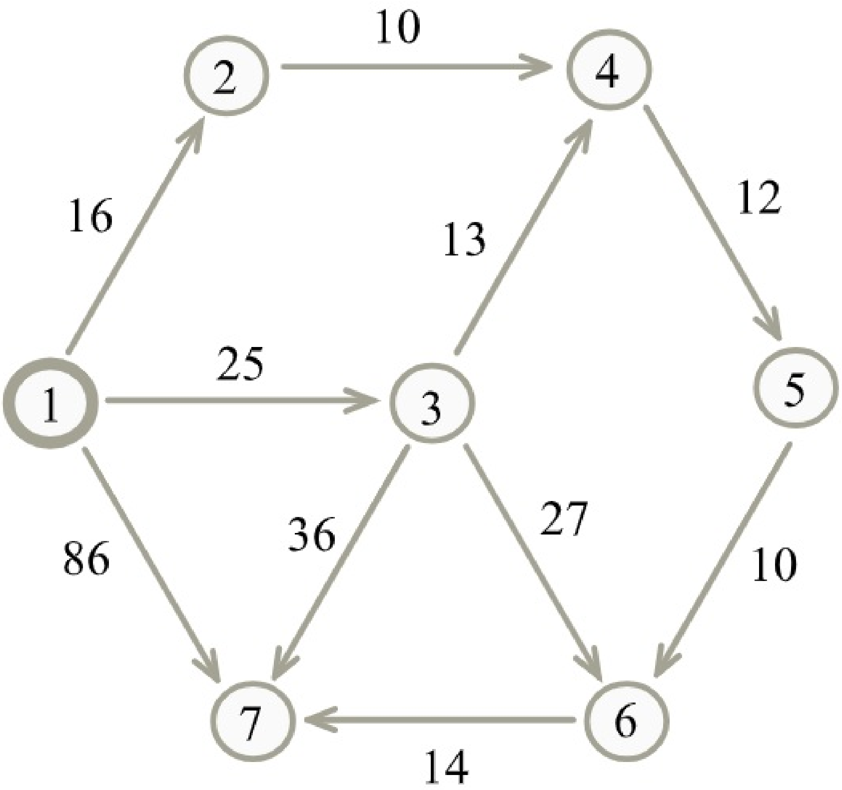
[Megnézem a kapcsolódó epizódot]

Adjuk meg az alábbi gráf BFS-fáját.



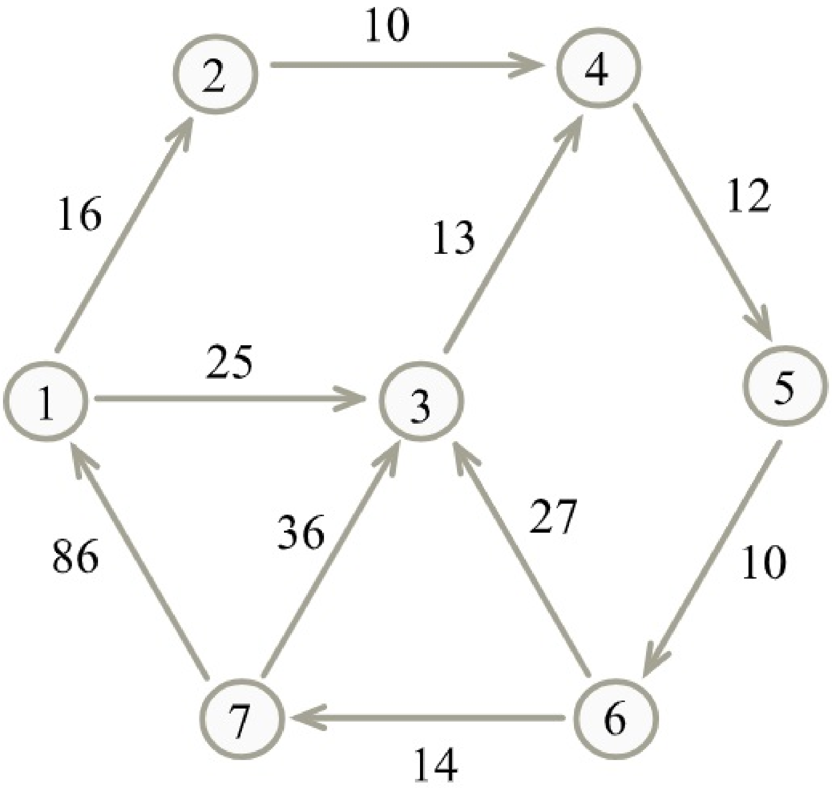
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derítsük föl az alábbi gráfot az 1-es csúcsból indulva a Dijsktra algoritmus segítségével.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Írjuk fel az alábbi gráf bármely két csúcsa közti távolságokat a Floyd algoritmus segítségével.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

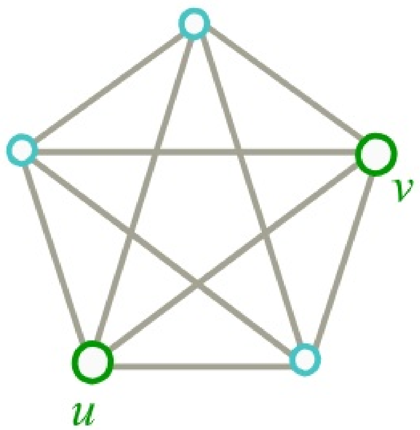
Menger tételei, többszörös összefüggőség

Mi történik, ha egy 100 pontú teljes gráfból elhagyunk két élt. Hányszorosan élösszefüggő és hányszorosan pontösszefüggő lesz a megmaradó gráf?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Itt egy gráf, és próbáljuk meg kideríteni, hogy hány élidegen út vezet u és v között.



b) Egy 100 pontú teljes gráfból elhagyunk 10 élt. Legalább hányszorosan élösszefüggő lesz a megmaradó gráf?

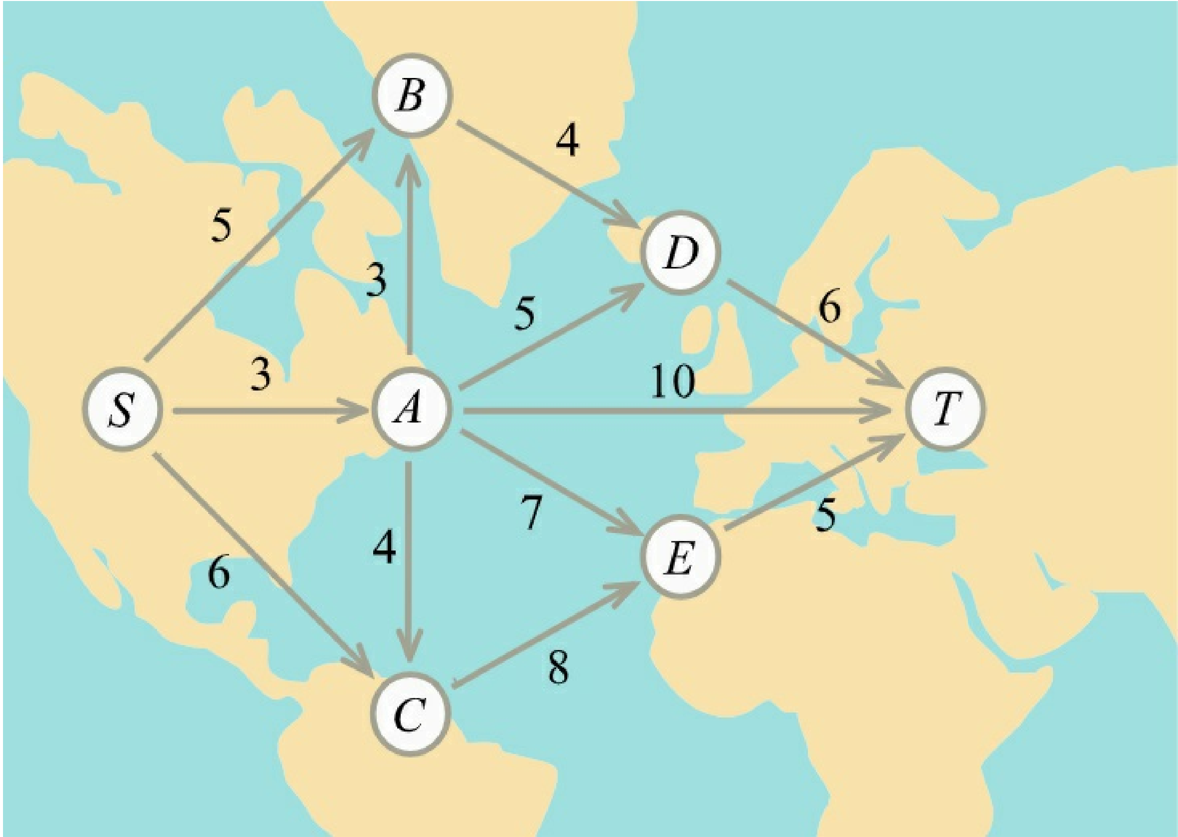
c) Bizonyítsuk be, hogy egy háromszorosan élösszefüggő gráfban mindig van páros hosszú kör.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

CPM és PERT algoritmus

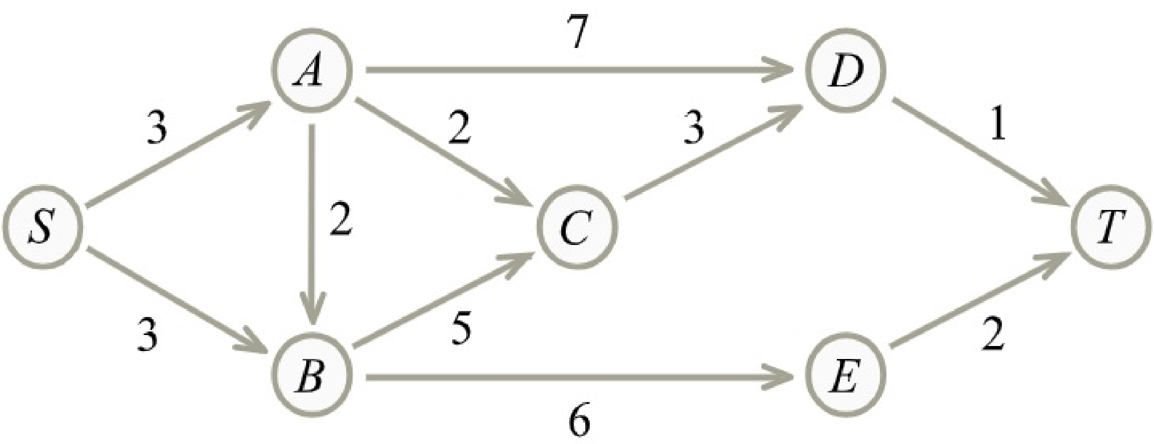
Történetünk lényege, hogy szeretnénk eljutni repülővel S-ből T-be, és ezek közül az útvonalak közül választhatunk.

Adott minden járat menetideje, a kérdés pedig az, hogy mennyi ideig fog tartani az út, és mennyi időnk lesz átszállni a repülőtereken.



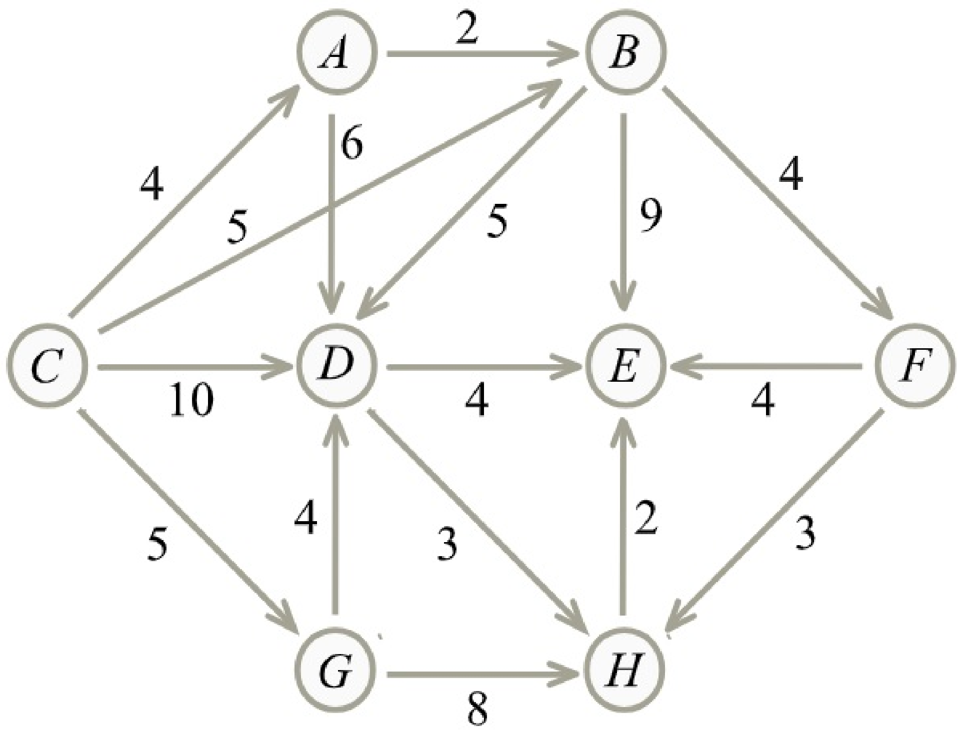
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



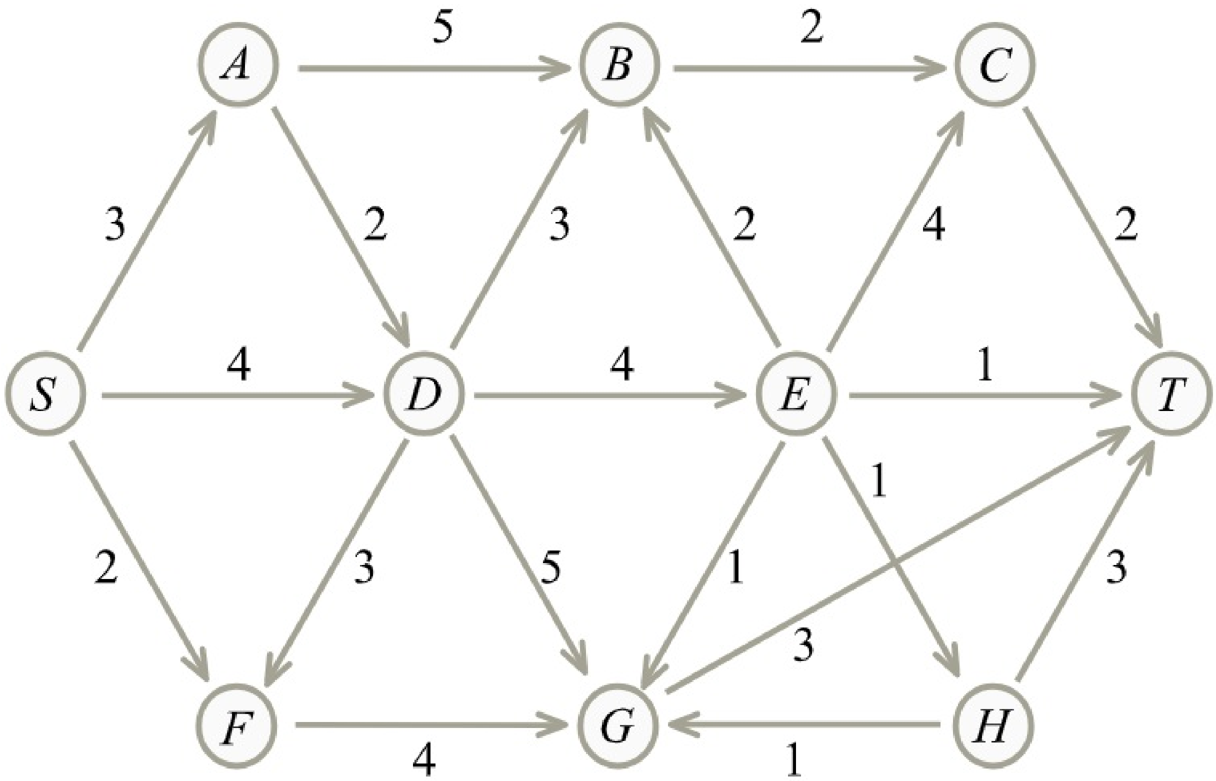
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



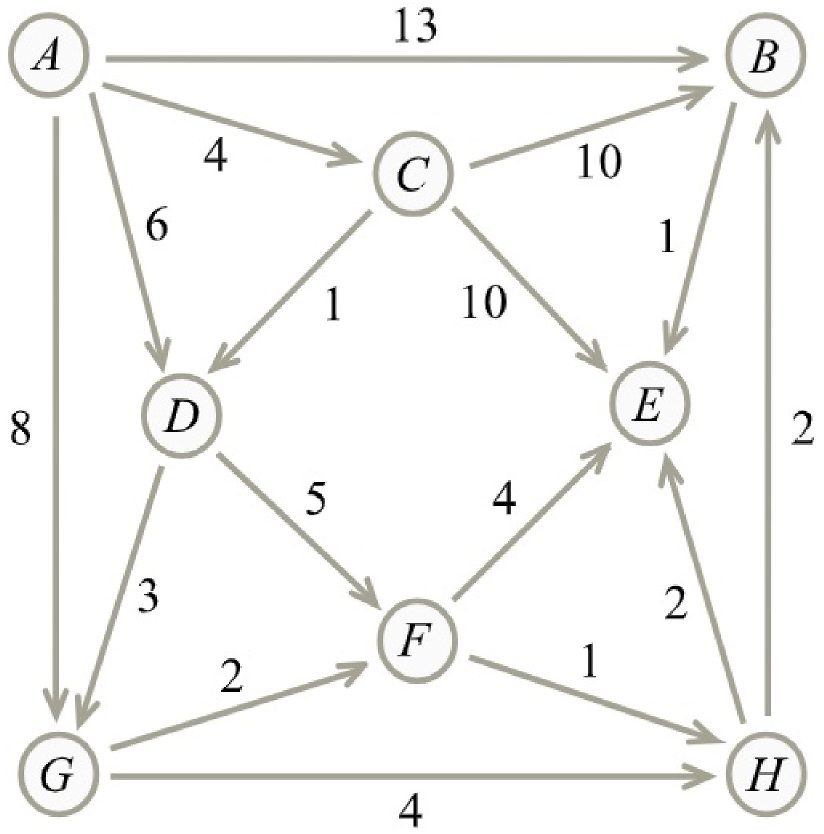
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



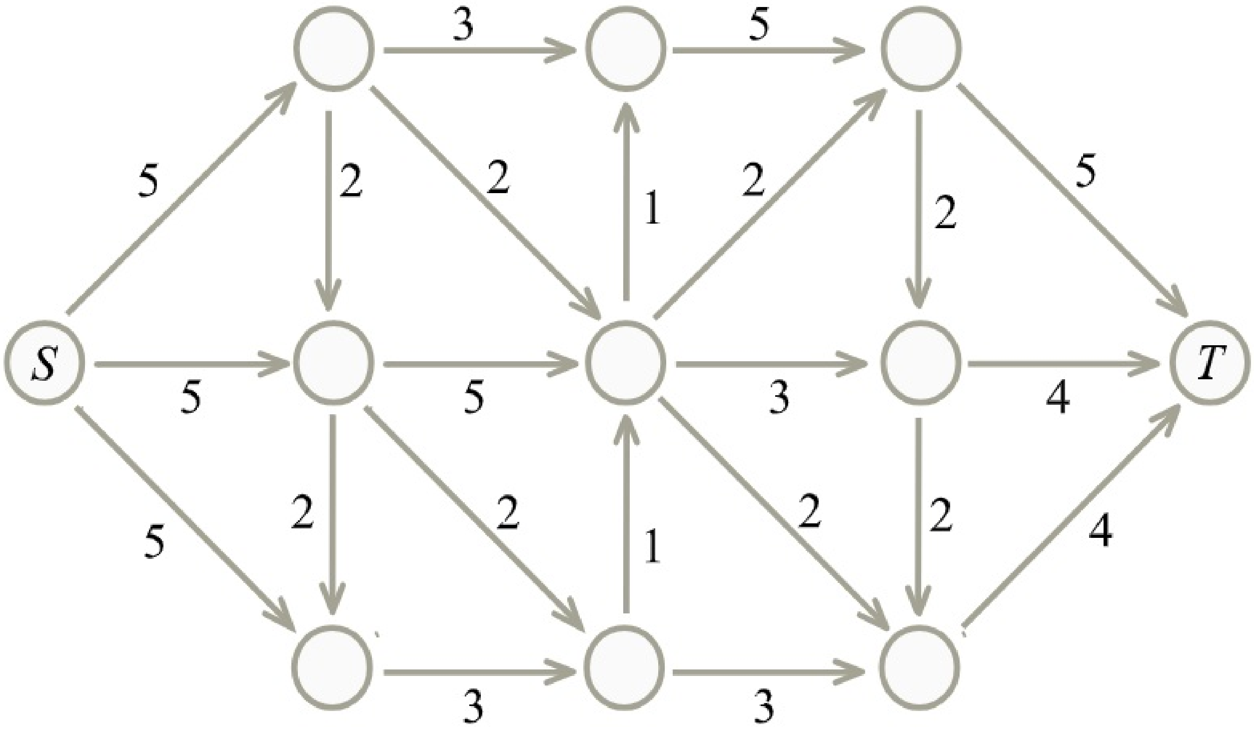
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



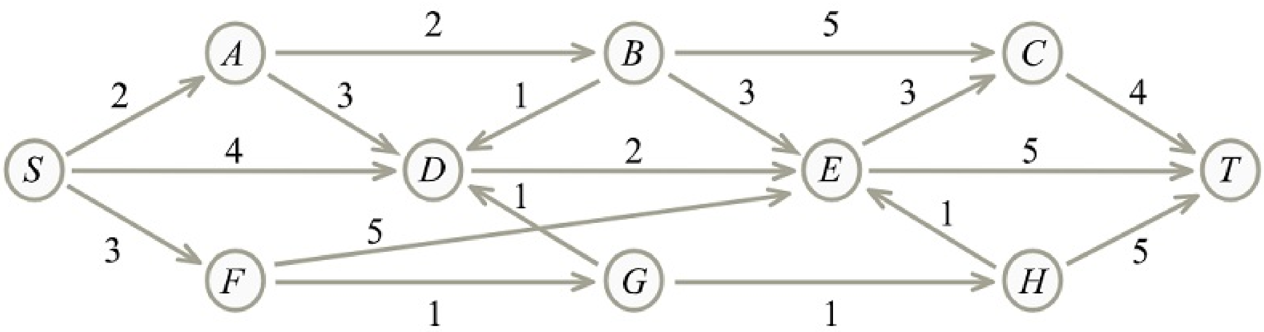
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezéseket, valamint kritikus utat.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Páros gráfok, párosítások

a) Egy bárban 60 lány van. Minden lány 12 fiút ismer és minden fiú 15 lányt ismer. Az ismertségek kölcsönösek. Hány fiú van a bárban? Tudunk-e úgy fiú-lány párokat alkotni, hogy minden fiút egy ismerős lánnyal párosítunk?

b) Egy kiránduláson fényképet készítenek a résztvevőkről. Minden képen 4-en szerepelnek, és tudjuk, hogy mindenkiről legalább 4 kép készült. A kirándulás végén mindenki választhat egy képet. Igazoljuk, hogy biztosan mindenkinek jutni fog olyan kép, amin rajta van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy bálon 10 fiú és 10 lány vesz részt. Minden lány legalább 6 fiút ismer és minden fiú is legalább 6 lányt. Az ismertségek kölcsönösek. A nyitótáncon mindenki ismerőssel szeretne táncolni. Bizonyítsuk be, hogy ez lehetséges.

b) Egy 12 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban teljes párosítás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy bálon összesen 16-an vesznek részt. Minden lány vagy 4 vagy 5 fiút ismer és minden fiú is vagy 4 vagy 5 lányt. A nyitótáncon mindenki ismerőssel szeretne táncolni. Bizonyítsuk be, hogy ez lehetséges.

b) Egy páros gráf két pontosztálya A és B. Két pont akkor szomszédos, ha ebben a szomszédsági mátrixban az A-ban lévő pont sorának és a B-ben lévő pont oszlopának metszetében 1-es áll:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\
a_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
a_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
a_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
a_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
a_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
a_6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
a_7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Van-e a gráfban teljes párosítás?

c) Egy másik G páros gráf két pontosztálya A és B. Két pont akkor szomszédos, ha ebben a szomszédsági mátrixban az A-ban lévő pont sorának és a B-ben lévő pont oszlopának metszetében 1-es áll. Van-e G-ben teljes párosítás?

$$\begin{array}{cccccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\
a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
a_4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
a_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
a_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
a_7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 20 csúcsú egyszerű páros gráfban minden fok 5 vagy 6. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van teljes párosítása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy bálon 12 lány és 666 fiú vesz részt. A szervezők így 12 (fiú-lány) párt szeretnének összeállítani a nyitótánchoz úgy, hogy mindenki ismerőssel táncoljon. Minden lány legalább 11 fiút ismer, a fiúk közül viszont mindenki legfeljebb 11 lányt ismer. Biztosan össze tudják-e állítani a szervezők a 12 párt?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy bálon 1001 lány és 1001 fiú vesz részt, mindenkinek legalább 500 ellenkező nemű ismerőse van. Biztosan össze lehet-e állítani 1001 olyan fiú-lány párt, ahol a párok tagjai ismerősök?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 999 pontot tartalmaz, az A színosztályban minden pont foka legalább 666, B-ben pedig legalább 333. Mutassuk meg, hogy G-nek van teljes párosítása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G egyszerű, páros gráf A színosztályában 99 csúcsa van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A-ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G-nek van A-t fedő párosítása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

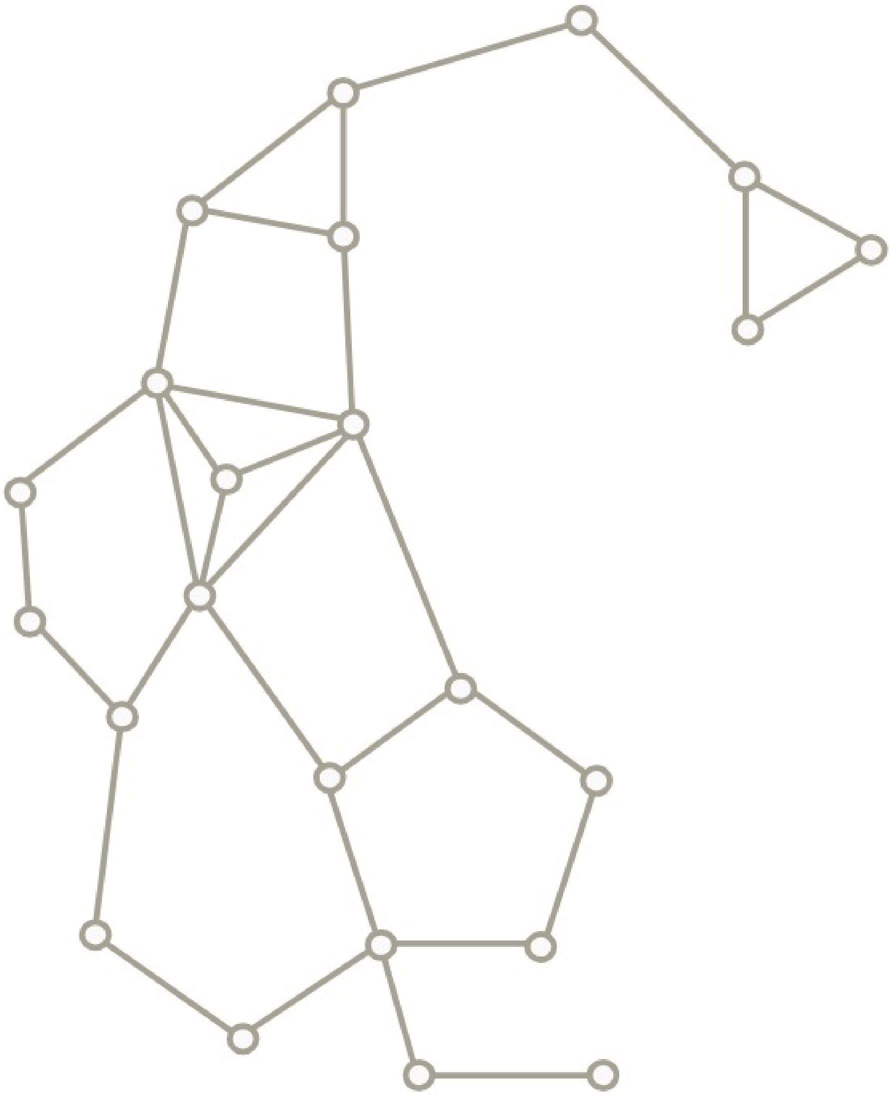
Kromatikus szám, klikk, perfekt gráfok

a) Színezzük ki a Svájccal határos országokat úgy, hogy két szomszédos ország nem lehet egyforma színű.

b) Színezzük ki a Luxemburggal határos országokat úgy, hogy két szomszédos ország nem lehet egyforma színű.

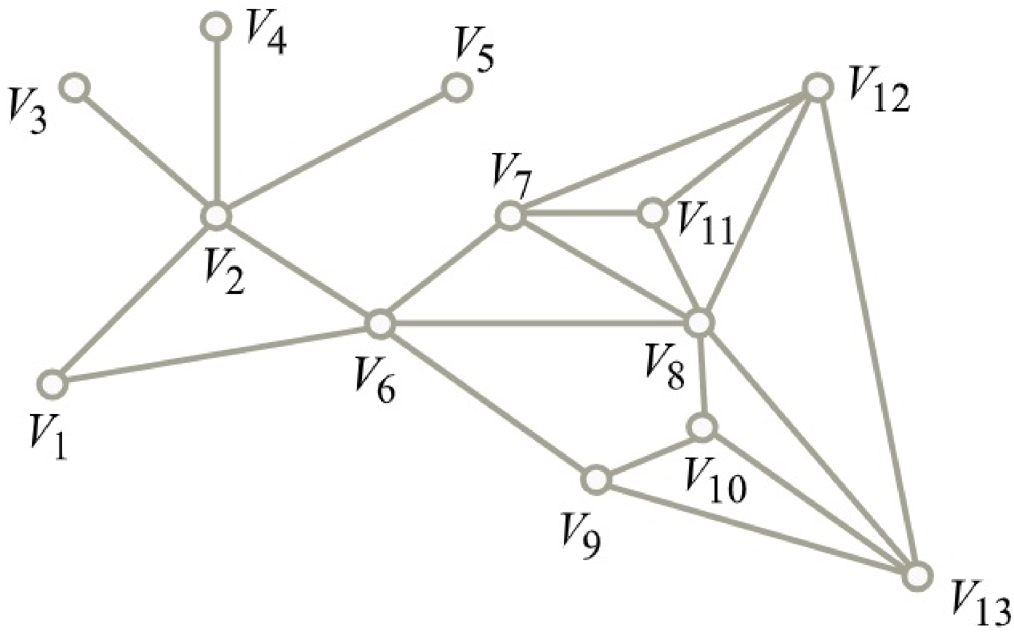
[Megnézem a kapcsolódó epizódot]

Mennyi az alábbi gráf kromatikus száma?



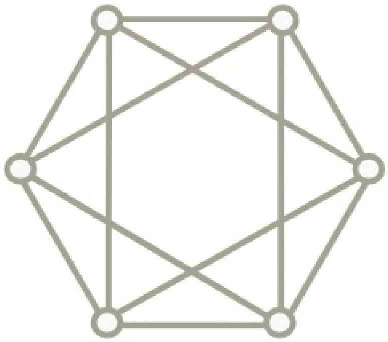
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hány szín kell ennek a gráfnak a színezéséhez?

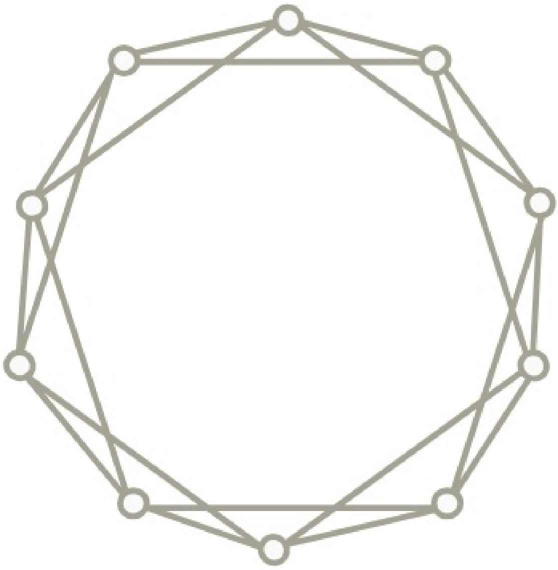


Megnézem a kapcsolódó epizódot

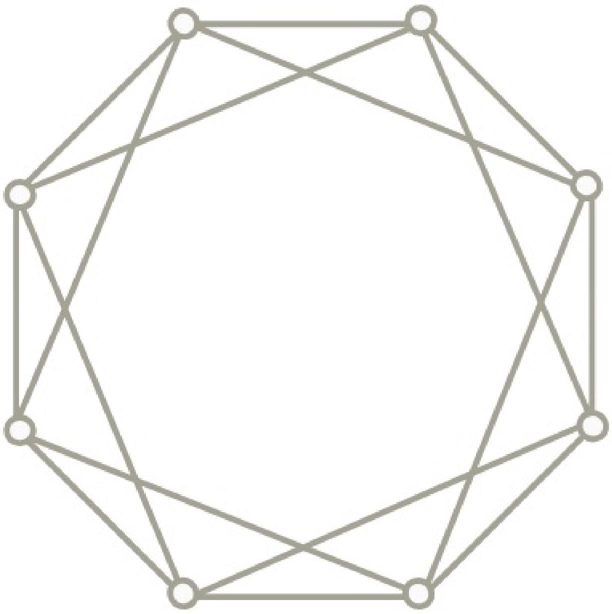
a) Mekkora a kromatikus száma ennek a gráfnak?



b) Mekkora a kromatikus száma ennek a gráfnak?



c) Mekkora a kromatikus száma ennek a gráfnak?

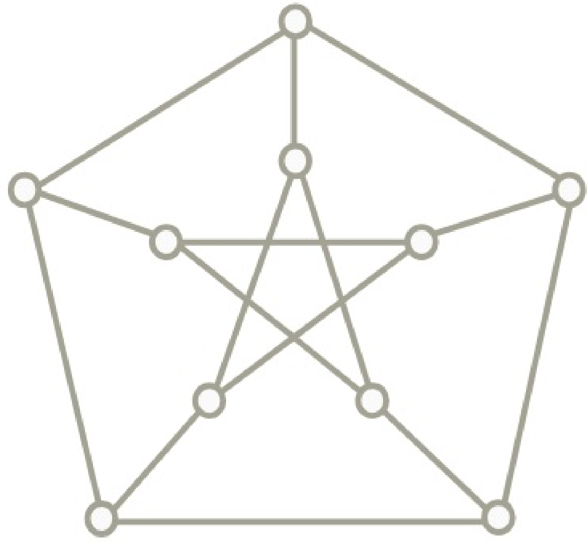


d) Egy G gráfban 1000 darab csúcstól eltekintve minden pont foka legfeljebb 999. Bizonyítsuk be, hogy a gráf kromatikus száma legfeljebb 1000.

e) Egy G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G)=\{1,2,3,\ldots,30\}$ és két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a különbségük legalább 6. Mekkora ennek a gráfnak a kromatikus száma?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Mennyi a Petersen gráf élkromatikus száma?



b) Egy 1001 csúcsú gráf úgy keletkezik, hogy egy 1000 csúcsot tartalmazó kör minden pontját összekötjük az 1001-edik csúccsal. Mekkora ennek a gráfnak az élkromatikus száma?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy 2000 csúcsú G gráf két darab egyenként 1000 csúcsot tartalmazó körből készítettünk, úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával.

Mekkora az így keletkező G gráf kromatikus száma és élkromatikus száma?

b) Számoljuk ki a Petersen gráf kromatikus számát.

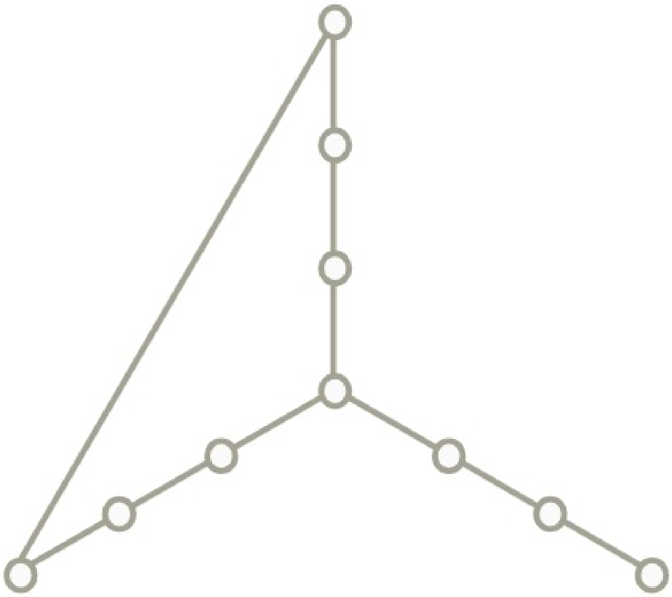
c) Egy G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ és két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a számok távolsága legalább 5. Mekkora ennek a gráfnak a kromatikus száma?

d) Egy másik gráf csúcshalmaza szintén a $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. A gráf $x, y \in V(G)$ csúcsai pontosan akkor legyenek szomszédosak, ha $|x - y| = 4$ vagy $|x - y| = 6$. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

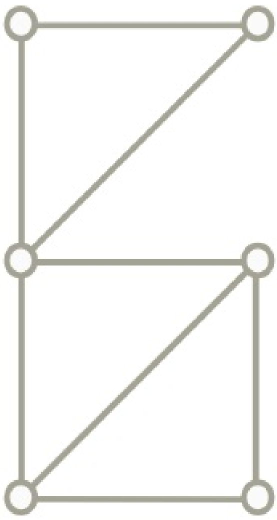
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallum gráfok-e.

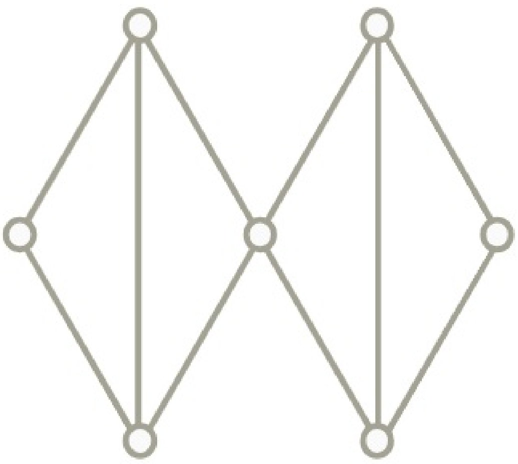
a)



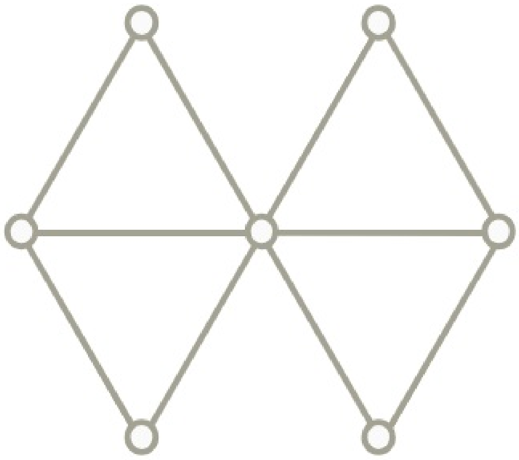
b)



c)



d)



Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x - y| = 3$ vagy $|x - y| = 5$. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát és $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

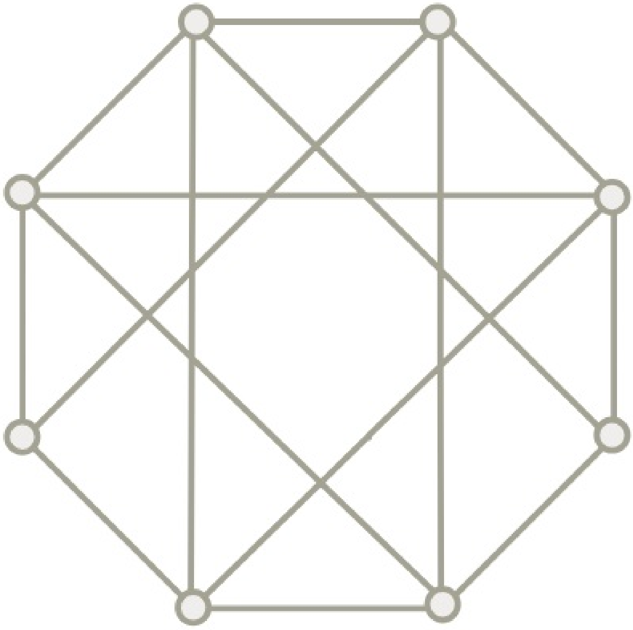
b) Egy 20 csúcsú fában 11 csúcs foka 1 és a maradék 9 csúcs foka is azonos. Határozzuk meg a fa élkromatikus számát.

c) Egy 1000 csúcsú gráfot úgy kaptunk, hogy vettünk két 500 pontú utat, és az egyik út minden pontját összekötöttük a másik út minden pontjával. Mekkora az így kelektező gráfnak a kromatikus száma és az élkromatikus száma?

d) Egy 1001 csúcsú G gráfot két körből, egy 500 pontú és egy 501 pontú körből készítünk úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötjük a másik kör minden csúcsával. Mekkora az így keletkező gráf kromatikus száma és élkromatikus száma?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi gráf kromatikus és élkromatikus számát.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 1000 csúcsú teljes gráfból elhagyjuk egy Hamilton-kör éleit. Mekkora lesz az így kapott gráf kromatikus száma?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A G gráf csúcshalmaza $V(G)=\{1,2,...,100\}$. Az $x,y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $10 \mid x \cdot y$.

Határozzuk meg G kromatikus számát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 6 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 100 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 50 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A G gráf csúcshalmaza $V(G)=\{1,2,...,1000\}$. Az $x,y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $(x,y) \geq 10$. Határozzuk meg G kromatikus számát.

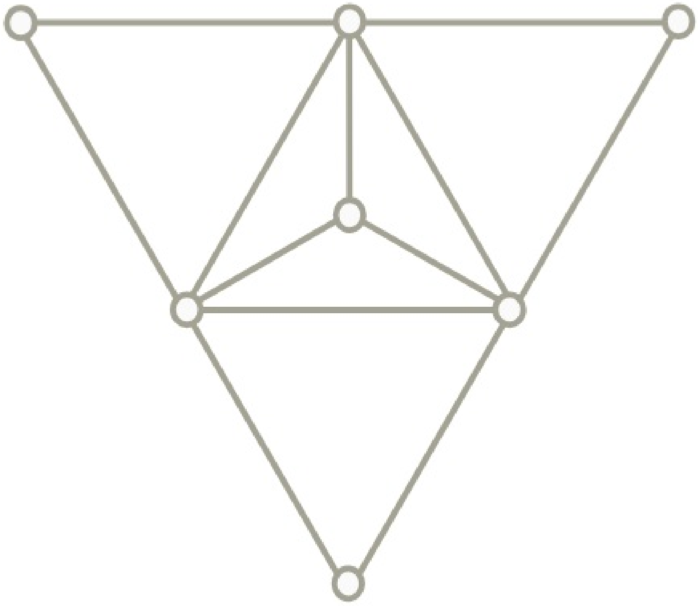
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg egy 6 csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

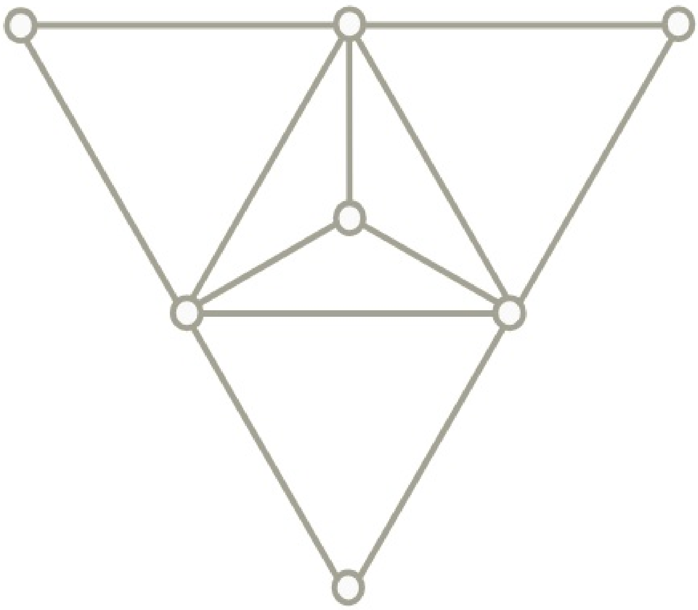
Gráfparaméterek, párosítások

Adjuk meg az alábbi gráfban a maximális független ponthalmaz és minimális lefogó ponthalmaz számát.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

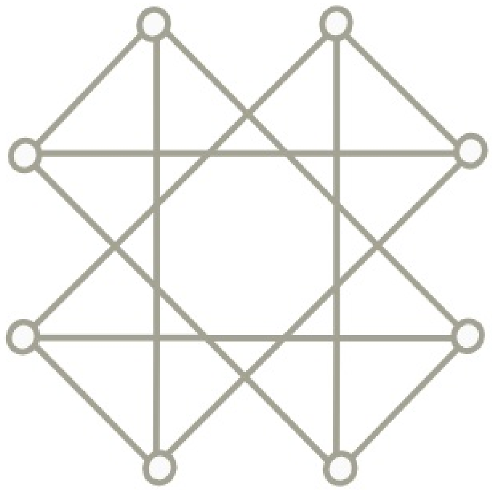
Adjuk meg az alábbi gráf maximális független élhalmazának és minimális lefogó élhalmazának számát.



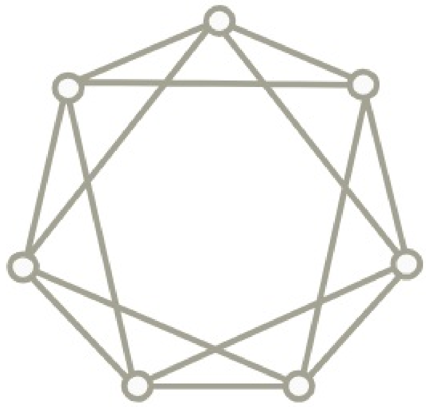
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi gráfokban a gráfparamétereket.

a)

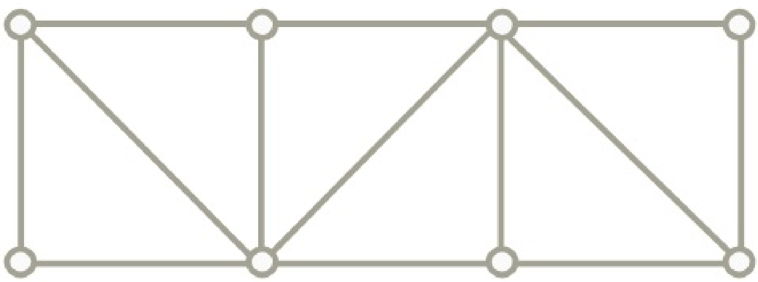


b)



Megnézem a kapcsolódó epizódot

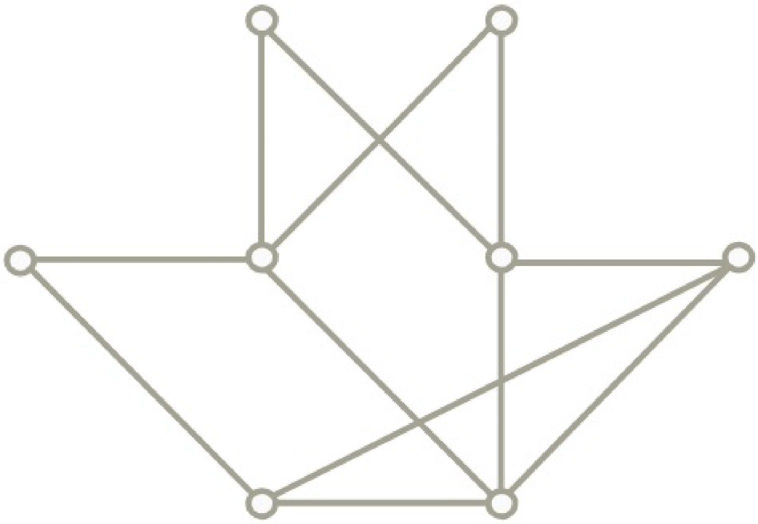
Próbáljuk megtalálni ebben a gráfban a maximális párosítást.



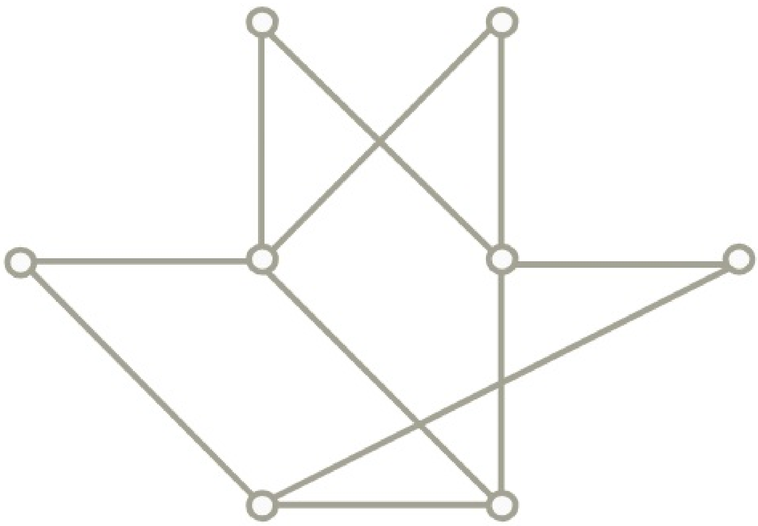
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbáljuk megtalálni az alábbi gráfokban a maximális párosításokat.

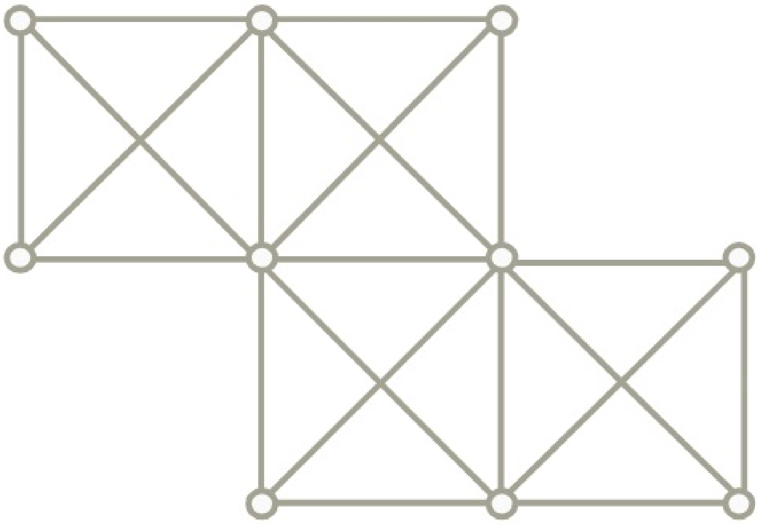
a)



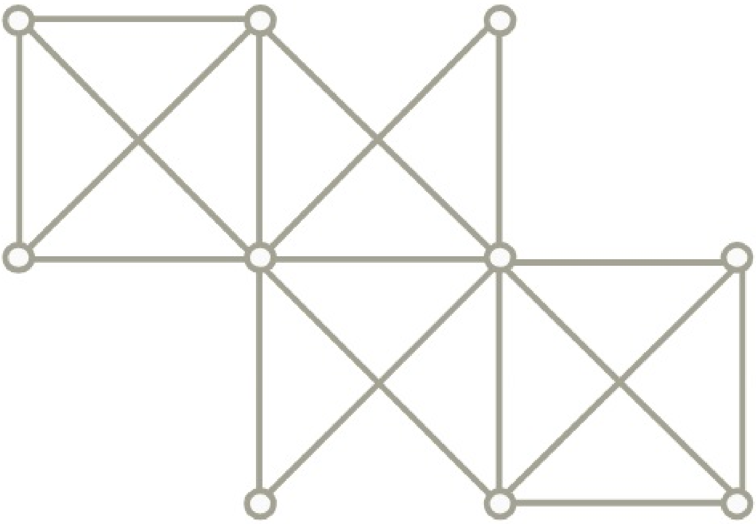
b)



c)

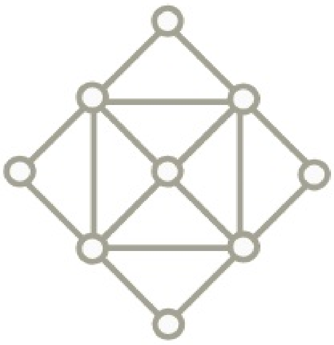


d)

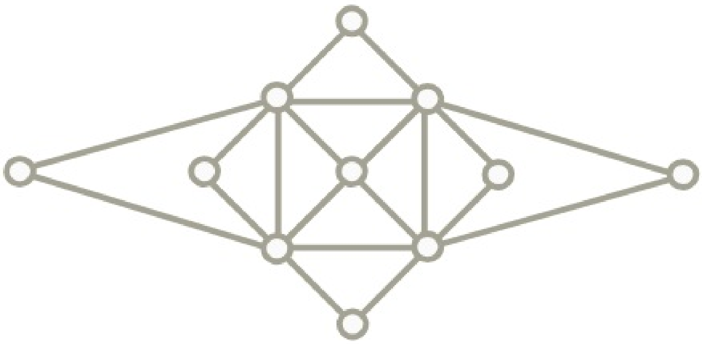


Megnézem a kapcsolódó epizódot

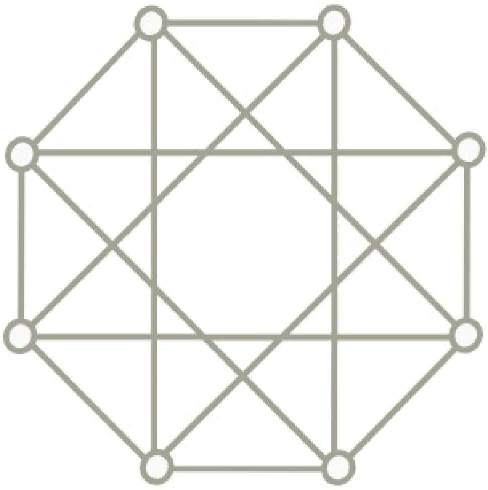
a) Adjuk meg a gráfparamétereit.



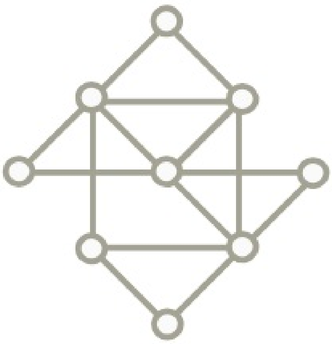
b) Adjuk meg a gráfparamétereit.



c) Adjuk meg a gráfparamétereit.



d) Adjuk meg a gráfparamétereit.



e) Egy gráfban $2n$ darab pont van, és minden pont foka legalább n. Legalább hány elemű egy lefogó élhalmaz a gráfban?

f) Egy 1001 pontú G egyszerű gráfban $\tau(G) = 1000$. Bizonyítsuk be, hogy G teljes gráf.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfra:

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$$

b) Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfra:

$$2\nu(G) \geq \tau(G)$$

c) Vajon minden G egyszerű gráfban teljesül-e, hogy

$$|E(G)| \leq \Delta(G) \cdot \tau(G)$$

d) Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfra:

$$\alpha(G)\left(\Delta(G)+1\right) \geq n$$

e) Bizonyítsuk be, hogy bármely G egyszerű gráfban:

$$\chi(G)+\alpha(G) \leq n+1$$

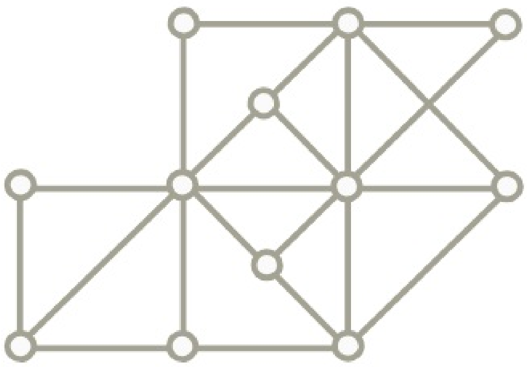
f) Bizonyítsuk be, hogy bármely G egyszerű gráfban:

$$\binom{\chi(G)}{2} \leq |E(G)|$$

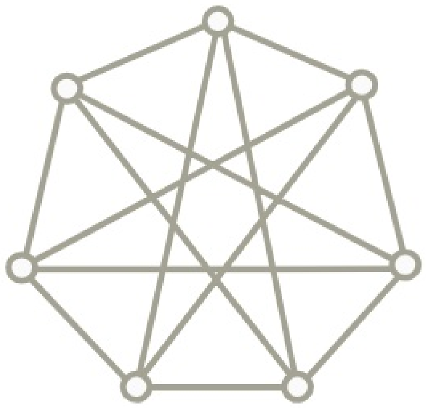
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi gráfoknak a gráfparamétereit.

a)



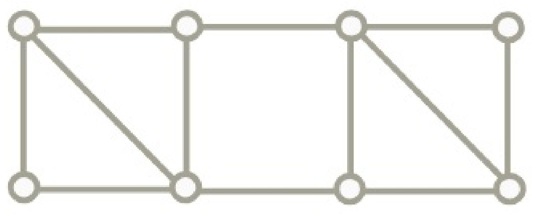
b)



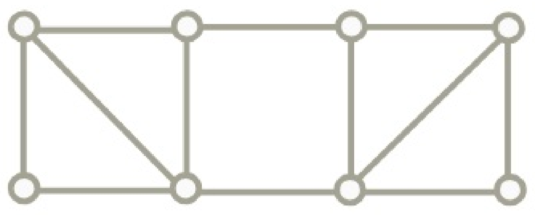
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi gráfoknak a gráfparamétereit.

a)



b)



Megnézem a kapcsolódó epizódot

A G gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, \ldots, 30\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek relatív prímek. Határozzuk meg a gráfparamétereket!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a hozzájuk tartozó számok szorzata osztható 4-gyel. Határozzuk meg $\alpha(G)$ és $\rho(G)$ értékeit!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 1000 csúcsú gráfban $\tau(G) = 400$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás.

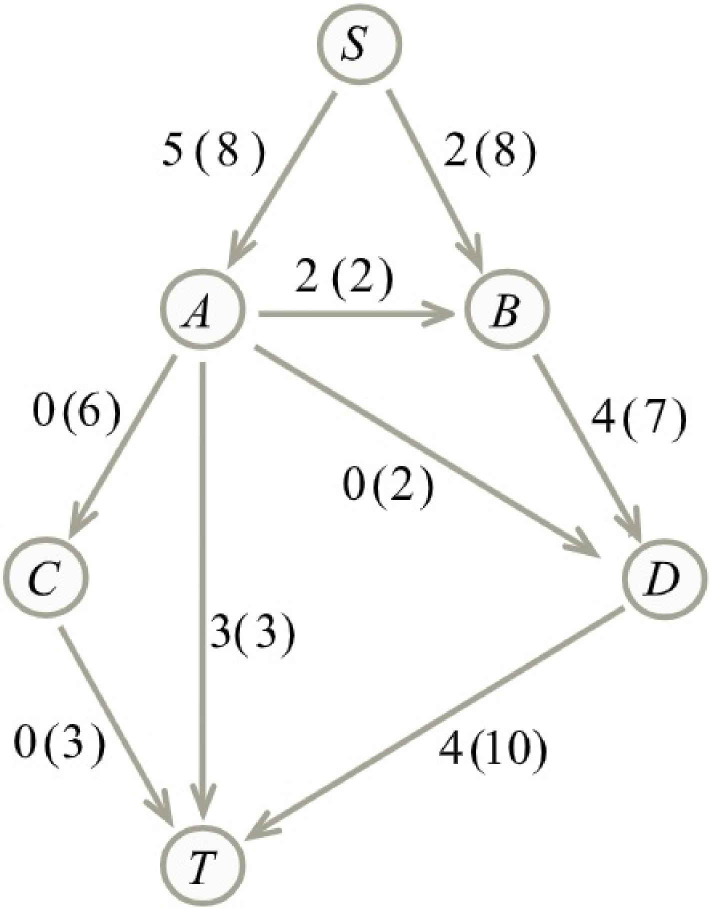
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Maximális folyam, Ford-Fulkerson-algoritmus

Itt egy csőrendszer, melyet irányított gráffal jelölünk.

Úgy tűnik, hogy 5+2=7 egység víz indul S-ből és 0+3+4=7 egység is érkezik meg.

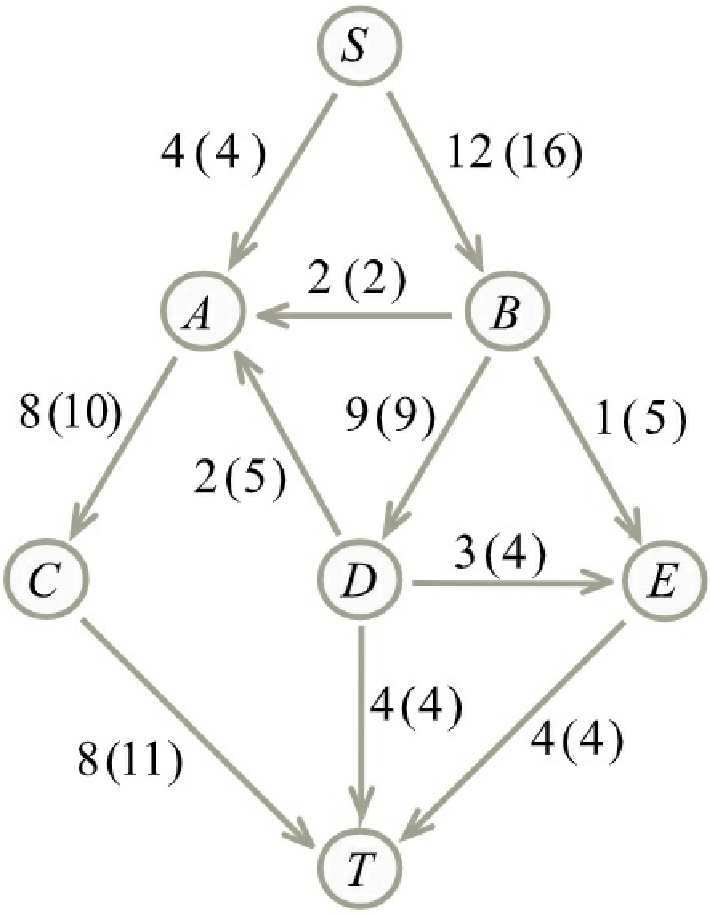
Próbáljunk meg ezen javítani.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a hálózat az élek kapacitásaival, és egy hálózatban futó folyammal.

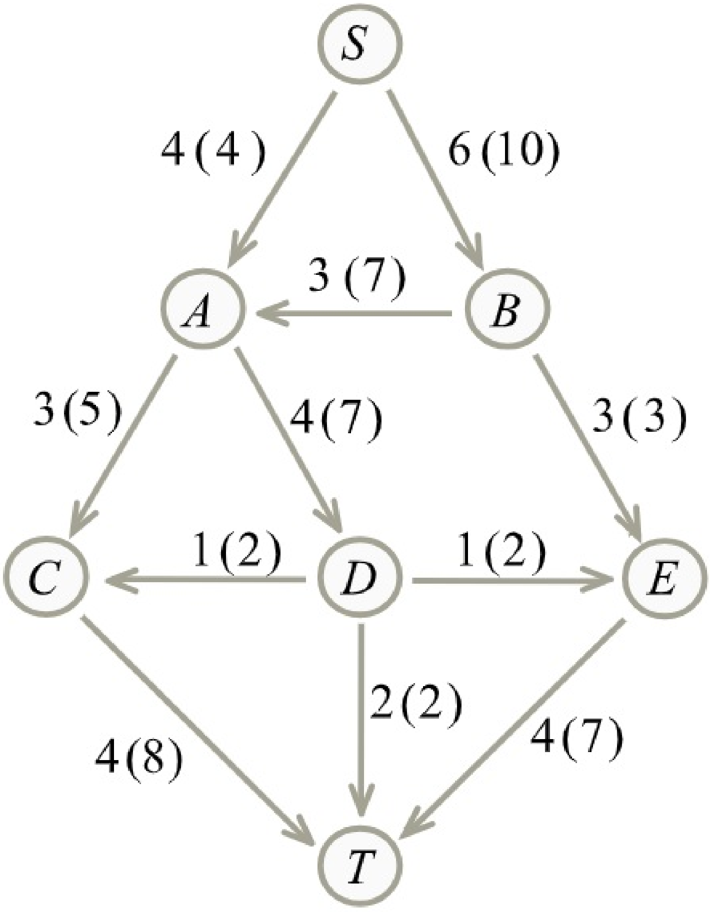
Ebből a folyamból kiindulva keressük meg az S-ből T-be vezető maximális folyamot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

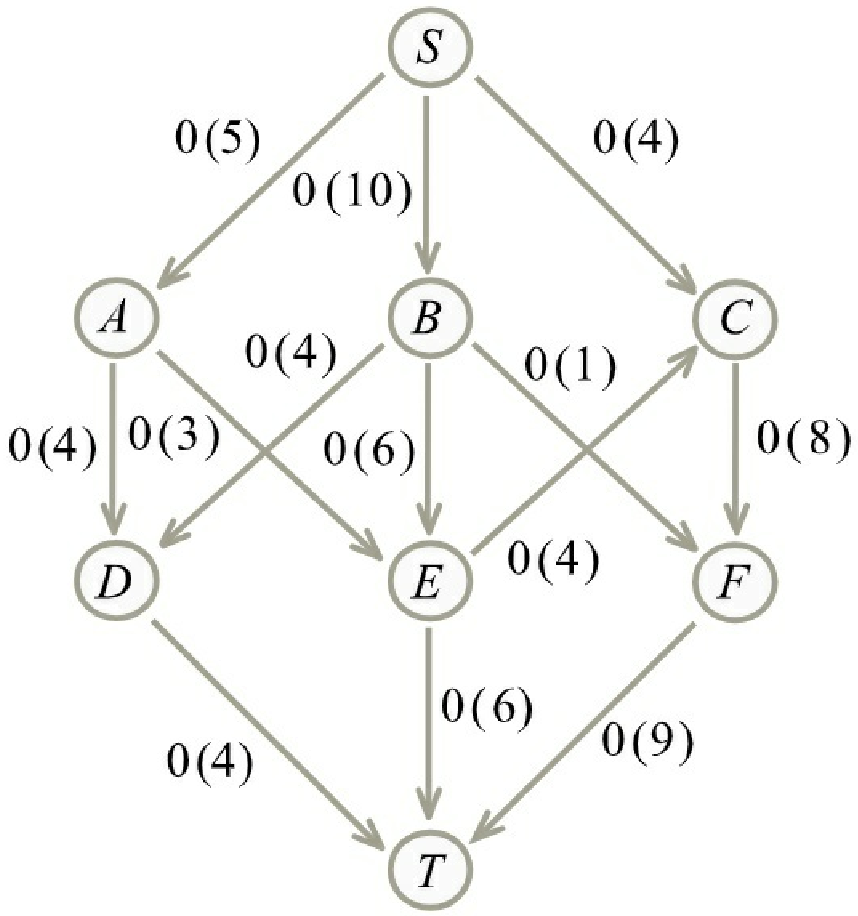
Itt van ez a hálózat, benne egy folyammal.

Készítsük el a javító gráfot.



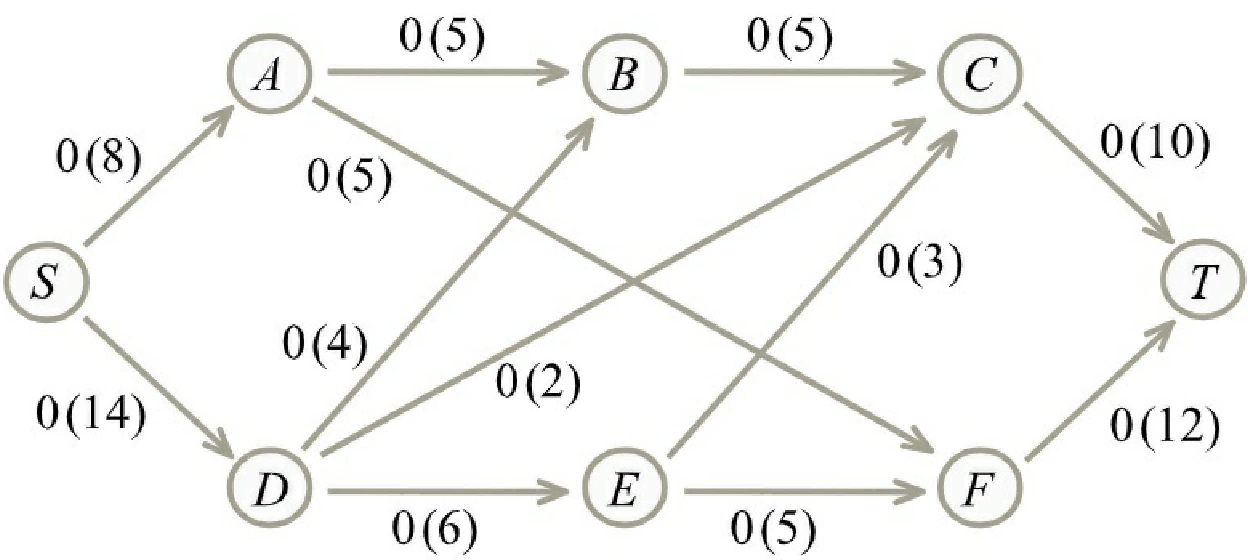
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



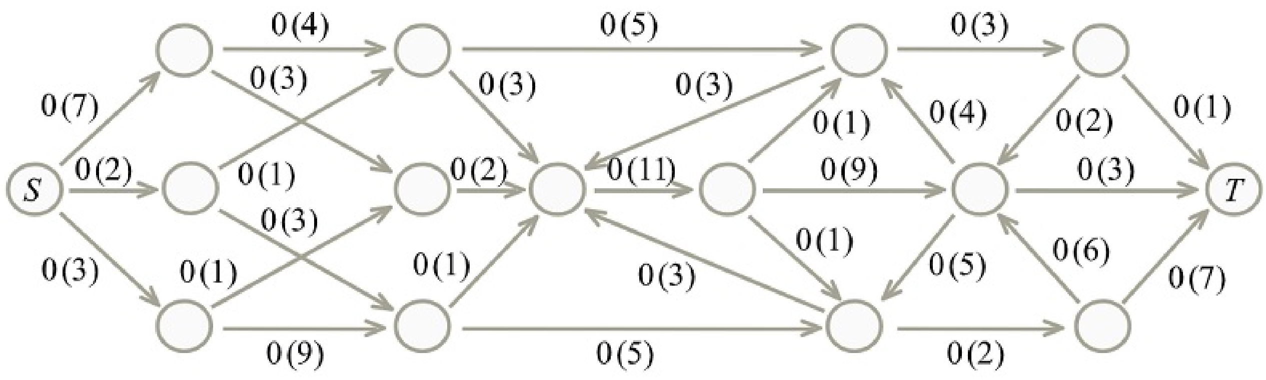
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



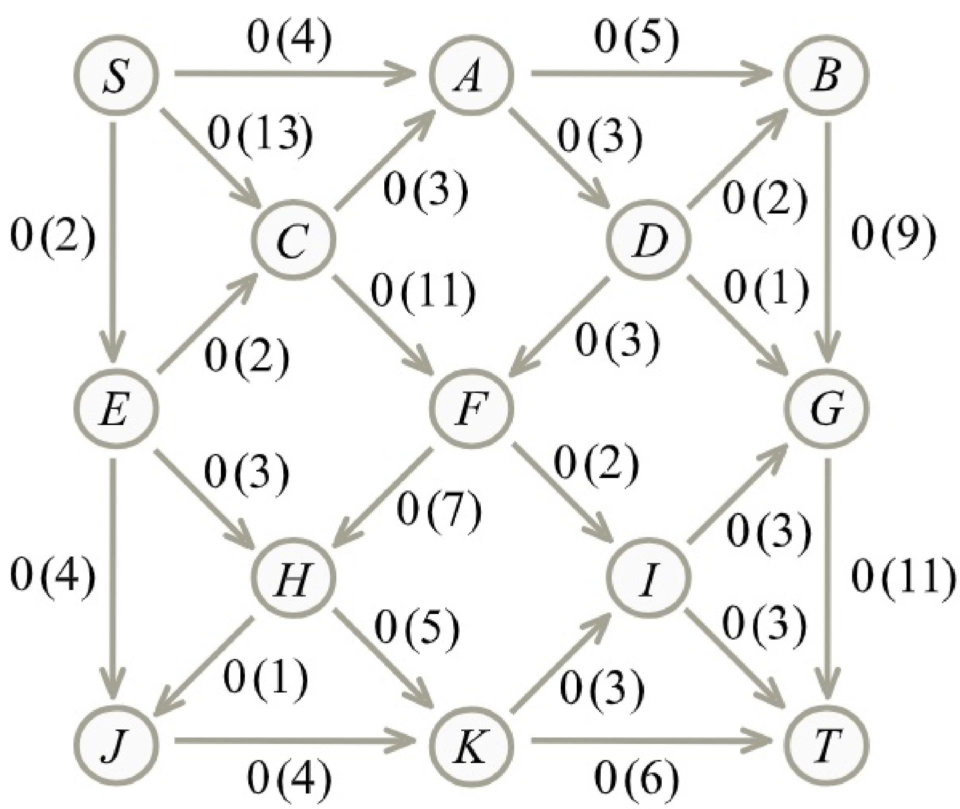
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



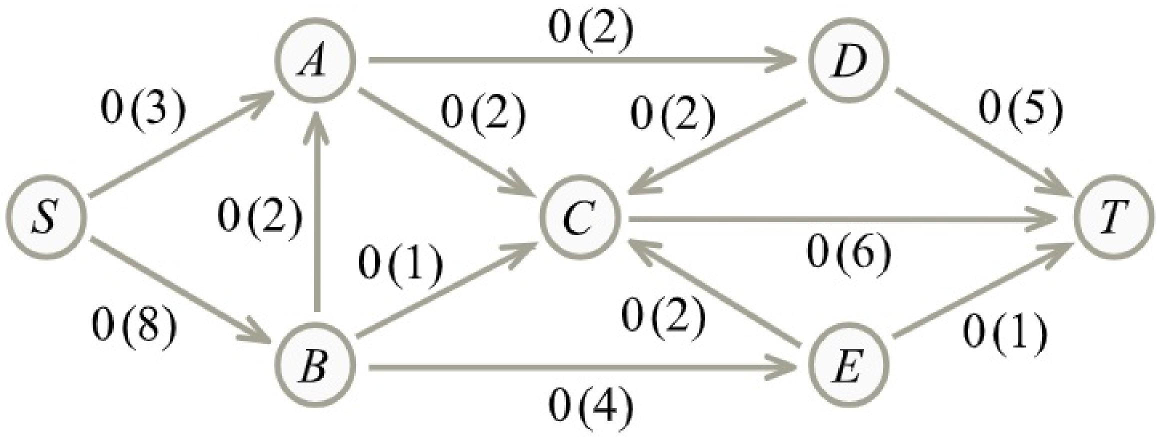
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



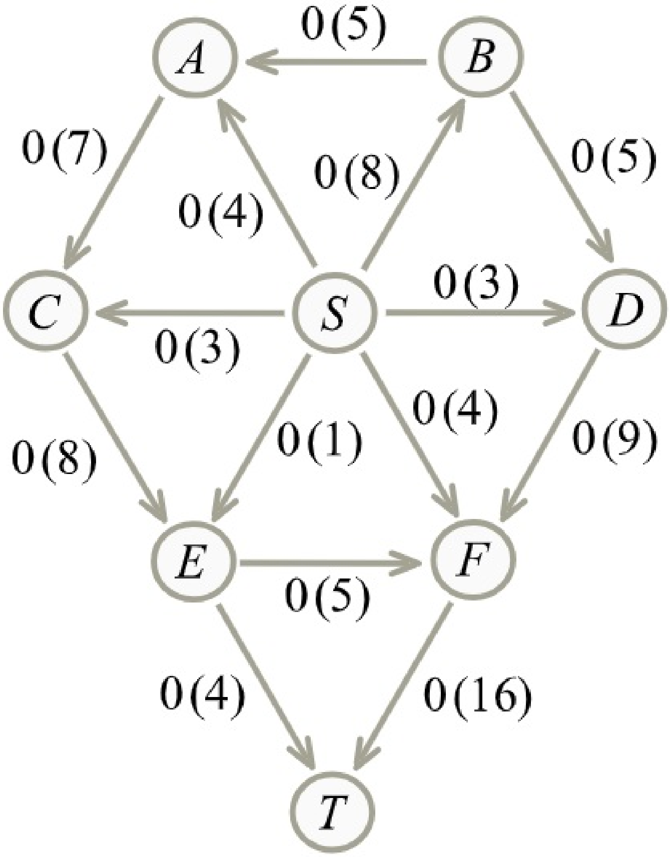
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mátrixok és vektorok

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi mátrixok transzponált mátrixait!

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Végezzük el az alábbi műveleteket.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$A \cdot \underline{l} = ?$$

$$\underline{l}^T \cdot A = ?$$

b) Mi történik, ha beszorozzuk az A mátrixot az $\underline{e}_2$ egységvektorral?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

a) Egy áruszállító cég hat különböző országba szállít 5-féle terméket. Az A mátrix azt írja le, hogy az egyes országokba hány darabot szállítanak a különböző termékekből. A B mátrix pedig a szállítási költséget adja meg termékenként és országonként EUR-ban.

$$A=\begin{pmatrix} 450 & 67 & 765 & 310 & 70 \\ 610 & 87 & 964 & 510 & 88 \\ 480 & 72 & 710 & 321 & 76 \\ 756 & 75 & 864 & 412 & 91 \\ 656 & 96 & 689 & 311 & 56 \\ 340 & 24 & 457 & 233 & 23 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Írjuk föl mátrixműveletek segítségével ezeket:

1) A Németországba (2. sor) szállított termékek száma összesen.

2) A 4-es termékből (4. oszlop) Svájcba (3. sor) szállított mennyiség.

3) A 2-es termék (2. oszlop) Olaszországba (5. sor) szállításának összköltsége.

4) A Németországba (2. sor) szállított összes termék teljes szállítási költsége.

5) Az összes elszállított termék.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt néhány vektor, és végezzük el velük a következő műveleteket.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \underline{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \underline{d}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E=<2\;5\;7>$$

a) $A\cdot \underline{b}$

b) $A\cdot C$

c) $A\cdot C^*$

d) $\underline{b^*}\cdot \underline{d}$

e) $\underline{b}\cdot \underline{d^*}$

f) A^2

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számítsuk ki az alábbi két vektor által bezárt szöget.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt néhány mátrix és vektor és el kéne végezni velük pár műveletet.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad C =< 3\,2\,1 >$$

a) $A + I) \cdot C = ?$

b) $(2\underline{b} + \underline{e}_1) \cdot \underline{b}^T = ?$

c) $(C^2 - I) \cdot A = ?$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt néhány mátrix és vektor és el kéne végezni velük pár műveletet.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + I = X + 2B \quad X = ?$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt néhány mátrix és vektor és el kéne végezni velük pár műveletet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2X = (B + I)A + X \quad X = ?$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt néhány mátrix és vektor és el kéne végezni velük pár műveletet.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B = ?$

b) $B \cdot A = ?$

c) $A \cdot \underline{c} = ?$

d) $A^T \cdot \underline{c} = ?$

e) $\underline{c} \cdot \underline{d}^T = ?$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektorterek, független és összefüggő vektorok

Vektorteret alkotnak-e?

a) Komplex számok

b) Másodfokú polinomok

c) Legfeljebb másodfokú polinomok

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetelenek vagy összefüggőek.

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetelenek vagy összefüggőek.

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Töltsük ki az alábbi táblázatot.

vektorok száma	megadható-e ennyi vektor úgy, hogy független legyen R^3-ban	megadható-e ennyi vektor, hogy generátor-rendszer legyen R^3-ban
1		
2		
3		
4		
5		

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in R^n$ vektorok. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

c) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}, \underline{c}-\underline{a}$ is lineárisan független.

d) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ is lineárisan független.

e) Ha $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.

f) Ha $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^3-nak, ha igen, adjunk meg egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in R \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^4-nek, ha igen, adjunk meg egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a, b, c, d \in R \\ a = b \\ \text{és} \\ c = 3d \end{array} \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vizsgáljuk meg, hogy $W \subset V$ halmaz altére-e V-ben. Ha igen, adjunk meg a dimenzióját és egy bázisát.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in R \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy vektorteret alkotnak-e...

a) Harmadfokú polinomok a valós számok felett.

b) Legfeljebb harmadfokú polinomok.

c) Azok a polinomok, amiknek az x=2 gyöke.

d) Azok a legfeljebb harmadfokú polinomok, amiknek az x=2 és az x=3 is gyöke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bontsuk fel a $\underline{v}$ vektort az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokkal párhuzamos komponensekre.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Egy síkban vannak-e az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ R^n-beli vektorok. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggő, akkor $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ is lineárisan összefüggő.

c) Ha $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

d) Ha $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Vizsgáljuk meg, hogy V altere-e R^3-nak, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist V-ben.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e R^4-nek, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist W-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan független vektorok R^n-ben. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}, \underline{b} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}, \underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorokból álló vektorrendszer bázis-e R^3-ban, és ha igen, akkor határozzuk meg a $\underline{d}$ vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozzuk meg az alábbi, R^3-beli vektorok generált alterét. Amennyiben ez az eltér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az R^n-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}, 3\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ vektorok is biztosan lineárisan függetlenek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Alteret akot-e R^2-ben azon (x, y) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

b) Alteret akot-e R^3-ban azon (x, y, z) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $xy = yz$?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjunk meg R^4-ben egy, az $\underline{u}$, $\underline{v}$, és $\underline{w}$ vektorokat tartalmazó bázist, majd írjunk fel ebben a bázisban az $\underline{a}$ koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok rangja és inverze

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert bázis transzformációval.

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$

$x_1 - x_3 + x_4 = 2$

$2x_2 + x_4 = 8$

$x_1 + x_4 = 5$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss eliminációval.

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$

$x_1 - x_3 + x_4 = 2$

$2x_2 + x_4 = 8$

$x_1 + x_4 = 5$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a bázis transzformáció segítségével.

a)

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + x_2 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

b)

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + x_2 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a Gauss elimináció segítségével.

a)

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + x_2 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

b)

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + x_2 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert bázis transzformáció segítségével.

$2x_1 - x_4 = 4$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$

$8x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$

$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Gauss elimináció segítségével.

$2x_1 - x_4 = 4$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$

$8x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$

$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az α és β paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? A feladatot a bázis transzformáció segítségével oldjuk meg.

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az α és β paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? A feladatot a Gauss elimináció segítségével oldjuk meg.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az α, β és γ paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? (Oldjuk meg bázis transzformációval)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \beta$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_2 + 4x_3 + \gamma x_4 = 4$$
$$3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = \alpha$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az α, β és γ paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? (Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \beta$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_2 + 4x_3 + \gamma x_4 = 4$$
$$3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = \alpha$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bázis transzformáció segítségével számítsuk ki a

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló vektorrendszer rangját, illetve állapítsuk meg, hogy előállítható-e segítségükkel az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss elimináció segítségével számítsuk ki a

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló vektorrendszer rangját, illetve állapítsuk meg, hogy előállítható-e segítségükkel az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval az alábbi egyenletrendszereket.

a)

$2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 4$

$3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 27$

$4x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$

b)

$2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 4$

$3x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 16$

$x_1 + 7x_2 - 18x_3 - 6x_4 = -8$

c)

$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 9$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 10$

$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 11x_4 = 4$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt van ez a mátrix. Számoljuk ki a rangját, és döntsük el, hogy teljes oszloprangú vagy teljes sorrangú-e.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az A mátrix rangját, keressük meg az oszlop-vektorterének egy bázisát, és adjuk meg ebben a bázisban az A mátrix oszlopvektorainak koordinátáit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 2 & 10 \\ 3 & 9 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}$ független vektorok, és

$$\underline{v_1} = \underline{a_1} - 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$$

$$\underline{v_2} = \underline{a_1} + \underline{a_3}$$

$$\underline{v_3} = 3\underline{a_1} + 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$$

Mekkora a $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ vektorrendszer rangja, illetve előállítható-e velük a $\underline{b} = \underline{a_1} + 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$ vektor? Számításainkat a bázis transzformáció segítségével végezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}$ független vektorok, és

$$\underline{v_1} = \underline{a_1} - 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$$

$$\underline{v_2} = \underline{a_1} + \underline{a_3}$$

$$\underline{v_3} = 3\underline{a_1} + 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$$

Mekkora a $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ vektorrendszer rangja, illetve előállítható-e velük a $\underline{b} = \underline{a_1} + 2\underline{a_2} + \underline{a_3}$ vektor? Számításainkat a Gauss elimináció segítségével végezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az alábbi mátrix inverzét a bázis transzformáció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az alábbi mátrix inverzét a Gauss elimináció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az alábbi mátrix inverzeit a bázis transzformáció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az alábbi mátrix inverzeit a Gauss elimináció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát. Ha az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást. (Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 8$$

$$4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 = 23$$

$$5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 = 14$$

$$2x_1 + p \cdot x_4 = q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát. Ha az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást. (Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 8$$

$$4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 = 23$$

$$5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 = 14$$

$$2x_1 + p \cdot x_4 = q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 - 3x_2 - 14x_3 = -17$$

$$2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 = q - 34$$

$$3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 = 4q - 37$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek.

Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$x_1 - 3x_2 - 14x_3 = -17$$

$$2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 = q - 34$$

$$3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 = 4q - 37$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy a p valós paraméterek mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

$$2x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 17$$

$$x_1 + p \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 5$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy a p valós paraméterek mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

$$2x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 17$$

$$x_1 + p \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 5$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét, majd döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire nem létezne az inverzmátrix.

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét, majd döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire nem létezne az inverzmátrix.

(Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Determináns, sajátérték, sajátvektor

Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsait.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -5 \\ -4 & -1 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsait.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az alábbi mátrixnak milyen p paraméter esetén létezik inverze, milyen p paraméterre lesz a determinánsa éppen 0, illetve milyen p paraméterre lesz az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Adott az A 2x2-es mátrix, és nézzük meg, hogy sajátvektora-e ennek az $\underline{u}$, és a $\underline{v}$ vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Számoljuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Számításaink során a bázis transzformációt használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Adott az A 2x2-es mátrix, és nézzük meg, hogy sajátvektora-e ennek az $\underline{u}$, és a $\underline{v}$ vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Számoljuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Számításaink során a Gauss eliminációt használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázis transzformáció segítségével nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss elimináció segítségével nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázis transzformáció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss elimináció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki, hogy mennyi A^{10}.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vannak itt ezek a mátrixok, döntsük el, hogy milyen definitek.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számoljuk ki az A mátrixhoz és $\underline{x}$ vektorhoz tartozó kvadratikus alakokat.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

c) Adott a $Q(\underline{x})$ kvadratikus alak, határozzuk meg ebből az A mátrixot.

$$Q(\underline{x}) = 5x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 7x_1x_3 - 6x_2x_3$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el az alábbi kvadratikus alakok definitségét.

a) $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$

b) $Q(\underline{x}) = -5x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris leképezések

Adjuk meg az x tengelyre való tükrözés mátrixát R^2 -ben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Tükrözzük az x tengelyre a $\underline{v}$ vektort, ha

a) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a bázis vektorok: $\underline{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a bázis vektorok: $\underline{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

a) $R^2 \to R^2 \qquad \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix} \qquad a,b \in R$

b) $R^2 \to R^2 \qquad \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a,b \in R$

c) $R^3 \to R^3 \qquad \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \cdot b \\ c \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

$R^3 \to R^3 \qquad \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját:

$R^3 \to R^3 \qquad \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát, adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját.

$$R^3 \to R^3 \qquad \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík transzformációi közül melyek dimenzió tartó transzformációk?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlóak.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Létezik-e olyan $\varphi : R^2 \to R^2$ lineáris transzformáció, mely az $(1,0)$ vektorhoz, az $(1,1)$ vektorhoz, és az $(1,2)$ vektorhoz is az $(1,2)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

b) Létezik-e olyan $\varphi : R^2 \to R^2$ lineáris transzformáció, mely az $(1,2)$ vektorhoz, az $(5,4)$ vektorhoz, és a $(3,3)$ vektorhoz is a $(2,1)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

c) Létezik-e olyan $\varphi : R^2 \to R^3$ lineáris transzformáció, mely az $(1,2)$ vektorhoz, a $(2,5,5)$ vektort, és a $(2,1)$ vektorhoz is a $(4,1,1)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\varphi : R^2 \to R^2$ lineáris transzformáció az $(1,2)$ és a $(3,4)$ vektorhoz is az $(5,6)$ vektort rendeli. Írjuk fel φ mátrixát, majd határozzuk meg $\dim Im\varphi$ és $\dim Ker\varphi$ értékét.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott egy $\varphi : R^3 \to R^3$ lineáris transzformáció mátrixa. Határozzuk meg $\dim Im\varphi$ és $\dim Ker\varphi$ értékét.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oszthatóság

Végezzük el az alábbi feladatokat:

a) Az 5728 osztható-e 3-mal?

b) A 4758 osztható-e 3-mal?

c) Az 52742 osztható-e 4-gyel?

d) A 61524 osztható-e 4-gyel?

e) A 3714 osztható-e 6-tal?

f) A 4326 osztható-e 9-cel?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mennyi a 36 és 25 legnagyobb közös osztója?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bizonyítsuk be, hogy a 3-nál nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel!

b) Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $2p-1$ és $2p+1$ is prím?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adjuk meg az 1960 prímtényezős felbontását!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyan bontható fel a 360 a $2k$ alakú számok világában?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egészek, akkor legalább az egyik befogó mérőszáma páros.

b) Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egészek, akkor az egyik befogó mérőszáma osztható 3-mal.

c) Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egészek, akkor van köztük legalább egy öttel osztható.

d) Igazoljuk, hogy bármely páratlan szám négyzetéből 1-et elvéve 8-cal osztható számot kapunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Igazoljuk, hogy ha n páratlan szám, akkor 9 osztója $11^n + 7^n$-nek.

b) Milyen n természetes szám esetén osztható az alábbi kifejezés 16-tal?

$17^n + n$

c) Igazoljuk, hogy ha n páratlan, akkor 37 osztója az alábbi kifejezésnek.

$1 + 2^{19} + 3^{19} + 4^{19} + \cdots + 36^{19}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Milyen pozitív egész n-re lesz a 6 osztója az $1 + n^2 + n^4 + 3^n$-nek?

b) Bizonyítsuk be, hogy 7 osztója $333^{444} + 444^{333}$ -nak.

c) Bizonyítsuk be, hogy 9 osztója $4^n - 3n - 1$-nek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy 5-nél nagyobb prímszám négyzetét 30-cal osztjuk, akkor maradékul 1-et vagy 19-et kapunk.

b) Határozzuk meg a p, q, r prímeket úgy, hogy a $p^4 + q^4 + r^4 - 3$ kifejezés értéke szintén prím legyen.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prímszám, akkor n is prímszám!

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Euklideszi algoritmus & Diofantoszi egyenletek

Az Euklideszi algoritmus használatával állapítsuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját.

a) 161 és 119

b) 221 és 299

c) 189 és 161

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenleteket.

a) $13x+8y=17$

b) $12x+8y=10$

c) $12x+20y=28$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bizonyítsuk be, hogy $a=2n+5$ és $b=2n+3$ relatív prímek bármely n egész számra.

b) Van itt ez a tört:

$\frac{12n+7}{7n+4}$

Létezik-e olyan n egész szám, amire ez a tört egyszerűsíthető 5-tel?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$24x+39y=10$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$10x+4y=12$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$26x+10y=12$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$$8x + 6y = 16$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$$46x + 26y = 154$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kongruenciák

a) Bizonyítsuk be, hogy $a \equiv b \bmod m \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \bmod m$

b) Bizonyítsuk be, hogy $a \cdot c \equiv b \cdot c \bmod m \Rightarrow a \equiv b \bmod m$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mennyi $\varphi(7)$?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mennyi $\varphi(12)$, $\varphi(16)$ és $\varphi(100)$?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bizonyítsuk be az Euler-Fermat tételt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Mi az utolsó két számjegye a 1789^{2046} -nak?

b) Mi az utolsó két számjegye az alábbi számnak?

$39^{49^{59}}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Keressük azokat az x egész számokat, amikre

a) $24x \equiv 13 \bmod 7$

b) $13x \equiv 11 \bmod 120$

c) $13x \equiv 611 \bmod 120$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Keressük azokat az x egész számokat, amikre

a) $59x \equiv 11 \bmod 120$

b) $23x \equiv 63 \bmod 43$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Keressük azokat az x egész számokat, amikre

a) $2x \equiv 14 \mod 12$

b) $4x \equiv 36 \mod 16$

c) $14x \equiv 30 \mod 18$

d) $6x \equiv 10 \mod 22$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenleteket.

a) $3x + 4y = 13$

b) $13x + 36y = 56$

c) $4x + 6y = 13$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi kongruencia rendszereket

a)

$$x \equiv 7 \mod 12$$
$$x \equiv 9 \mod 10$$

b)

$$4x \equiv 3 \mod 5$$
$$5x \equiv 6 \mod 7$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Milyen maradékot ad 66-tal osztva ez a szám?

$$66^{63^{61}}$$

b) Milyen maradékot ad 1023-mal osztva ez a szám?

$$1025^{1005}$$

c) Milyen maradékot ad 65-tel osztva ez a szám?

$$138^{139}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mi lesz az utolsó két számjegye ennek az alábbi számoknak?

a) 303^{404}

b) $33^{21^{34}}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mi lesz az utolsó két számjegye ennek az alábbi számoknak?

a) 159^{161}

b) $49^{49^{50}}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat.

a) $8x \equiv 30 \bmod 28$

b) $2x \equiv 7 \bmod 33$

c) $47x \equiv 1 \bmod 53$

d) $9x \equiv 1 \bmod 88$

e) $8x \equiv 29 \bmod 27$

f) $32x \equiv 7 \bmod 47$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Egy n egész szám 115-szöröse 110-zel nagyobb maradékot ad 344-gyel osztva, mint maga az n szám. Milyen maradékot adhat n 344-gyel osztva?

b) Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mely egész számokra teljesül, hogy 7-tel osztva 2, 9-cel osztva 3 maradékot adnak?

Megnézem a kapcsolódó epizódot
