

Lineáris tér, függetlenség

Vektorteret alkotnak-e?

- a) [Komplex számok](#)
- b) Másodfokú polinomok
- c) Legfeljebb másodfokú polinomok

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [vektorok](#) lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [vektorok](#) lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Töltsük ki az alábbi táblázatot.

vektorok száma	megadható-e ennyi vektor úgy, hogy független legyen \mathbb{R}^3 -ban	megadható-e ennyi vektor, hogy generátor-rendszer legyen \mathbb{R}^3 -ban
1		
2		
3		
4		
5		

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ [vektorok](#). Az alábbi állítások közül melyik igaz?

- a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ is lineárisan független.
- b) Ha $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.
- c) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}, \underline{c} - \underline{a}$ is lineárisan független.
- d) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ is lineárisan független.
- e) Ha $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.
- f) Ha $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Vizsgáljuk meg, hogy W altére-e \mathbb{R}^3 -nak, ha igen, adjunk meg egy bázist W -ben.

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} a \\ b \\ a+1 \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altére-e \mathbb{R}^4 -nek, ha igen, adjunk meg egy bázist W -ben.

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ a = b \\ \text{és} \\ c = 3d \end{array} \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ -beli [vektorok](#). Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ is lineárisan független.
- b) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggő, akkor $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ is lineárisan összefüggő.
- c) Ha $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.
- d) Ha $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vizsgáljuk meg, hogy $W \subset V$ halmaz altére-e V -ben. Ha igen, adjunk meg a dimenzióját és egy bázisát.

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} a \\ b \\ a-b \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az alábbi bázist alakítsuk át ortogonális bázissá a Gram-Schmidt-ortogonalizáció segítségével.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Vizsgáljuk meg, hogy V altere-e \mathbb{R}^3 -nak, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist V -ben.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy W altere-e \mathbb{R}^4 -nek, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist W -ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyenek $\underline{u}, \underline{v}$ és \underline{w} lineárisan független vektorok \mathbb{R}^n -ben. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}, \underline{b} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}, \underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorokból álló vektorrendszer bázis-e \mathbb{R}^3 -ban, és ha igen, akkor határozzuk meg \underline{d} vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozzuk meg az alábbi, \mathbb{R}^3 -beli [vektorok](#) generált alterét. Amennyiben ez az eltér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

$$\text{a) } \underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az \mathbb{R}^n -beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ [vektorok](#) lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}, 3\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ [vektorok](#) is biztosan lineárisan függetlenek?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Alteret alkot-e \mathbb{R}^2 -ben azon (x, y) [vektorok](#) halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

b) Alteret alkot-e \mathbb{R}^3 -ban azon (x, y, z) [vektorok](#) halmaza, melyekre teljesül, hogy $xy = yz$?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjunk meg \mathbb{R}^4 -ben egy, az $\underline{u}, \underline{v},$ és \underline{w} vektorokat tartalmazó bázist, majd írjunk fel ebben a bázisban az \underline{a} koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)