

Halmazok, logikai műveletek, bizonyítási módszerek

Adottak az A és B halmazok:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \quad B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

Határozzuk meg...

a két halmaz metszetét!

a két halmaz unióját!

$$B \setminus A\text{-t!}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A halmaz legyen a $[2, 6]$ zárt intervallum, a B halmaz pedig az $]1, 4[$ nyílt intervallum.

Határozzuk meg ezeket:

$$A \cap B \quad A \cup B \quad A \setminus B$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Egy osztályban 12-en utálják a matekot és 18-an a fizikát. Összesen 20-an vannak, akik a kettő közül legalább az egyiket utálják. Hányan utálják mindkettőt?

b) Egy osztályba 20 tanuló jár. Az osztály összes tanulója közül 9-en szeretik a matekot és közülük 5 lány. Tudjuk még, hogy 5 fiú nem szereti a matekot. Hány lány jár az osztályba?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy osztályba 20-an járnak. Közülük 16-an vannak, akik a matekot és a fizikát is utálják. Hányan vannak, akik legalább az egyik tantárgyat szeretik?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adottak a G és H halmazok:

$$G = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \quad H = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

Határozzuk meg a $G \cap H$ és $G \setminus H$ halmazokat!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adjuk meg az $A \cap B$ és $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy városban 60 étterem, 56 bár és 36 reggeliző hely üzemel. Olyan, ami étterem és bár is egyben 16 darab van, ami reggelizőként és bárként is üzemel, olyanból 20 darab van, és ami reggeliző és étterem is, olyan 11 darab van. 4 olyan hely van, ami reggelizőként, étteremként és bárként egyszerre működik. Hány olyan bár működik a városban, ami nem étterem és nem reggeliző hely?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van három halmaz, $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 1 \leq x^2 \leq 24\}$ és C pedig a 15 pozitív osztóinak halmaza. Ábráoljuk ezeket a halmazokat és adjuk meg elemeinek felsorolásával az $A \cup B \cap C$ és az $A \cap B \setminus C$ halmazokat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Egyenlő-e ez a két halmaz?

$$A = \{4; 6; 5; 7\} \quad B = \{7, 6, 5, 4\}$$

b) Soroljuk fel az $A = \{x, y, z\}$ halmaz összes részhalmazát.

c) Hány elemű lesz B -nek a hatványhalmaza?

$$B = \{5, 6, 7, 8\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Igaz-e a következő?

$$(A \Delta B) \Delta A = A$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bizonyítsuk be, hogy

a) $(A \cup \overline{B}) \cap B = A \cap B$

b) $(A \setminus (B \setminus A)) = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

c) $A \Delta ((B \cup A) \Delta A) \Delta B = (A \cap B) \Delta (A \setminus B)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Hogyha A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cap B = A \cup B$, akkor vajon igaz-e, hogy $A \Delta B = A \setminus B$?

b) Hogyha A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \Delta B = B$, akkor vajon igaz-e, hogy $(A \cup B) \Delta (A \cap B) = B \setminus A$?

c) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B halmazokra teljesül, hogy:

$$(A \cup \overline{B}) \cap B \subseteq (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$$

d) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A , B és C halmazokra teljesül, hogy:

$$(A \cup B) \setminus (C \cap (B \setminus A)) = A \cup (B \setminus C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az $A = \{1, 2\}$ és $B = \{a, b, c\}$ halmazok Descartes-szorzatát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Végezzük el az alábbi feladatokat:

a) Egy vonaton 400-an utaznak. Bizonyítsuk be, hogy utazik rajta két olyan utas, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapja.

b) Mi történik, ha felszáll újabb 333 utas?

c) És ha 1200-an utaznak a vonaton?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Egy 5 kocsiból álló vonaton 460-an utaznak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan kocsi, amiben legalább 80 utas van.

b) Egy másik vonat szintén 5 kocsiból áll. Legalább hányan utaznak a vonaton, ha tudjuk, hogy biztosan van olyan kocsi, amiben legalább 40-en utaznak?

c) Az egyik kocsiban egy 10 tagú társaság utazik. Mindenki a társaságból legalább 7 másik embert ismer. Bizonyítsuk be, hogy bármely 3 embernek van közös ismerőse.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt ez az állítás: "Minden mamut sárga."

Válasszuk ki innen azokat, amik az állítás tagadása:

Egyik mamut sem sárga.

Van olyan mamut, ami sárga.

Van olyan mamut, ami nem sárga.

A legtöbb mamut nem sárga.

Nem minden mamut sárga.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Dontsük el az alábbi állításokról, hogy igazak, vagy hamisak.

- a) Esik az eső és a mamut piros.
- b) Esik az eső vagy a mamut piros.
- c) Ha esik az eső, akkor a mamut piros.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Készítsük el az alábbi állítások igazságtábláit.

- a) $\neg A \wedge \neg B$
- b) $A \wedge \neg B$
- c) $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$
- d) $\neg A \Rightarrow (A \wedge B)$
- e) $\neg A \wedge (A \vee B)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Van itt két láda. Az egyikben arany van, a másik üres, a ládákon lévő feliratok pedig lehetnek igazak vagy hamisak is. Anélkül, hogy hozzárénénk a ládához, meg tudjuk-e mondani, hogy melyikben van az arany?

A ládák feliratai: "Ha a másik ládában van az arany, akkor mindkét ládában hamis felirat van." és "Az arany nem ebben a ládában van."

b) Ezúttal már három láda van. Az egyikben arany van, a másik kettő üres, a ládákon lévő feliratok pedig lehetnek igazak vagy hamisak is.

A ládák feliratai:

"A másodikon ládán a felirat igaz."

"Az arany ebben a ládában van és az első ládán a felirat hamis."

"Az arany olyan ládában van, amin a felirat hamis."

c) Most pedig tegyünk egy kört a lovagok és lóköltők szigetén. Ezen a szigeten kétféle ember él, akik külsejük alapján teljesen egyformák. Csak éppen a lovagok mindig igazat mondanak, a lóköltők pedig mindig hazudnak. Találkozunk két szigetlakóval.

X azt mondja: "Ha Y lovag, akkor én lóköltő vagyok.". Y nem mond semmit. Milyen típusú X és Y?

d) Egy másik alkalommal három szigetlakóval találkozunk, akik ezt mondják:

X: "Y lóköltő és Z lovag."

Y: "Lóköltő vagyok és Z lovag."

Milyen típusú X, Y és Z?

e) Végül egy újabb esetben ismét három szigetlakóval találkozunk, akik ezt mondják:

X: Y lovag.

Y: X lóköltő és Z lovag.

Milyen típusú X, Y és Z?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Tagadjuk a következő állítást:

"Az áldozat a szobában van, és ha nem találják meg, akkor holnap is ott lesz."

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mi a teljes diszjunktív normálformája?

a) $A \Rightarrow (B \wedge C)$

b) $(A \Leftrightarrow B) \wedge \neg A$

c) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \vee B)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bizonyítsuk be, hogy $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ minden pozitív egész n esetén.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Igazoljuk teljes indukcióval, hogy minden n pozitív egész számra

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n \cdot (3n + 1) = n \cdot (n + 1)^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Igazoljuk teljes indukcióval, hogy minden n pozitív egész számra

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Igazoljuk teljes indukcióval, hogy minden n pozitív egész számra

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Igazoljuk teljes indukcióval, hogy minden n pozitív egész számra

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Igazoljuk teljes indukcióval, hogy n db. egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Írd fel a $2; 3; 4$ halmaznak azon részhalmazait, melyeknek a 2 eleme, és a 4 nem eleme!

b) Az A és B halmazokról a következőket tudjuk:

$$A \cap B = \{1; 2\} \quad A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad A \setminus B = \{5; 7\}$$

c) Adottak a következő halmazok:

$$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$$

$$B = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\}$$

$$C = \{1; 2; 3; 5; 8; 13\}$$

Elemeik felsorolásával adjuk meg a $C \setminus A$ és az $(A \cup B) \cap C$ halmazt!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a három sportot űzik. Készítsünk halmazábrát!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a - javítatlan - szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

- a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel?
- b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Egy biztosítóhoz az egyik hónapban 24 autós biztosítási kárigény érkezett, és ezek közül 8-an más kárigényt is benyújtottak. Lakásbiztosításra 7 igény érkezett, és egyéb igény 17. 30 olyan ügyfél volt, aki csak egy igényt nyújtott be, 1-1 olyan ügyfél volt, aki a lakáson kívül még pontosan egy kárigényt nyújtott be és nem volt olyan, aki mindhármát. Készítsünk ábrát, és állapítsuk meg, hogy hányan vannak, akik pontosan két kárigényt nyújtottak be!

b) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai egyesület közül legalább az egyikben. Az atlétikai egyesületnek 36 tanuló tagja, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda egyesületnek is tagja.

- 1) Ábrázoljuk az egyesületekben sportoló diákok megoszlását halmazokkal.
- 2) Hányan sportolnak a kosárlabda egyesületben?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étteremben legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

- a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?
- b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)
