

## Mátrixok, vektorok, vektorterek

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a)  $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Adjuk meg az alábbi [mátrixok](#) transzponált mátrixait!

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

b)  $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c)  $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a)  $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Számítsuk ki az alábbi két vektor által bezárt szöget.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Van itt néhány vektor, és végezzük el velük a következő műveleteket.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \langle 2 \ 5 \ 7 \rangle$$

a)  $A \cdot \underline{b}$

b)  $A \cdot C$

c)  $A \cdot C^*$

d)  $\underline{b}^* \cdot \underline{d}$

e)  $\underline{b} \cdot \underline{d}^*$

f)  $A^2$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Írjuk föl a  $P(7, 8, 9)$  ponton átmenő és  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  irányvektorú egyenes egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

a) Írjuk föl a  $P(3, 5)$  ponton átmenő és a  $4x + y = 6$  egyenletű egyenesre merőleges egyenes síkbeli egyenletét.

b) Írjuk föl a  $P(3, 5, 7)$  ponton átmenő és az  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-1}{9}$  egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík térbeli egyenletét.

c) Írjuk föl a  $P(1, 1)$  és  $Q(3, 5)$  ponton átmenő egyenes síkbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Írjuk föl a  $P(1, 4, 1)$  a  $Q(3, 5, 7)$  és az  $R(6, 5, 2)$  pontokon átmenő sík térbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Számítsuk ki az alábbi [vektorok](#) vektoriális szorzatát.

a)  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = ?$

b) Írjuk föl a  $P(1, 1)$  és  $Q(3, 5)$  ponton átmenő egyenes síkbeli egyenletét.

c) Írjuk föl a  $P(1, 4, 1)$  a  $Q(3, 5, 7)$  és az  $R(6, 5, 2)$  pontokon átmenő sík térbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Vektorteret alkotnak-e?

a) [Komplex számok](#)

b) Másodfokú polinomok

c) Legfeljebb másodfokú polinomok

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Döntsük el, hogy az alábbi [vektorok](#) lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Döntsük el, hogy az alábbi [vektorok](#) lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Töltsük ki az alábbi táblázatot.

| <a href="#">vektorok</a><br>száma | megadható-e ennyi vektor<br>úgy, hogy független legyen<br>$R^3$ -ban | megadható-e ennyi vektor,<br>hogy generátor-rendszer<br>legyen $R^3$ -ban |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1                                 |                                                                      |                                                                           |
| 2                                 |                                                                      |                                                                           |
| 3                                 |                                                                      |                                                                           |
| 4                                 |                                                                      |                                                                           |
| 5                                 |                                                                      |                                                                           |

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Legyen  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$  [vektorok](#). Az alábbi állítások közül melyik igaz?

- a) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$  is lineárisan független.
- b) Ha  $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$  generátor-rendszer, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is az.
- c) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}, \underline{c} - \underline{a}$  is lineárisan független.
- d) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$  is lineárisan független.
- e) Ha  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is lineárisan független.
- f) Ha  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$  generátor-rendszer, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is az.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Vizsgáljuk meg, hogy  $W$  altere-e  $\mathbb{R}^3$ -nak, ha igen, adjunk meg egy bázist  $W$ -ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy  $W$  altere-e  $\mathbb{R}^4$ -nek, ha igen, adjunk meg egy bázist  $W$ -ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ a = b \\ \text{és} \\ c = 3d \end{array} \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ -beli [vektorok](#). Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- a) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$  is lineárisan független.
- b) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan összefüggő, akkor  $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$  is lineárisan összefüggő.
- c) Ha  $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$  generátor-rendszer, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is az.
- d) Ha  $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is az.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vizsgáljuk meg, hogy  $W \subset V$  halmaz altére-e  $V$ -ben. Ha igen, adjunk meg a dimenzióját és egy bázisát.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az alábbi bázist alakítsuk át ortogonális bázissá a Gram-Schmidt-ortogonalizáció segítségével.

$$\underline{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---