# Független és összefüggő vektorok

Vektorteret alkotnak-e?

a) Komplex számok

b) Másodfokú polinomok

c) Legfeljebb másodfokú polinomok

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetelenek vagy összefüggőek.

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetelenek vagy összefüggőek.

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Töltsük ki az alábbi táblázatot.

| vektorok száma | megadható-e ennyi vektor úgy, hogy független legyen $R^3$-ban | megadható-e ennyi vektor, hogy generátor-rendszer legyen $R^3$-ban |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in R^n$ vektorok. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

c) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}, \underline{c}-\underline{a}$ is lineárisan független.

d) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ is lineárisan független.

e) Ha $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.

f) Ha $\underline{a}-\underline{b}, \underline{b}-\underline{c}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Bontsuk fel a $\underline{v}$ vektort az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokkal párhuzamos komponensekre.

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} \quad \underline{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \quad \underline{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

b) Egy síkban vannak-e az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok?

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad \underline{b}=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix} \quad \underline{c}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Vizsgáljuk meg, hogy $W$ altere-e $R^3$-nak, ha igen, adjunk meg egy bázist $W$-ben.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\a+1\end{pmatrix} \;\middle|\; a,b\in R\right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy $W$ altere-e $R^4$-nek, ha igen, adjunk meg egy bázist $W$-ben.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c}a,b,c,d\in R\\ a=b\\ \text{és}\\ c=3d\end{array}\right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ $R^n$-beli vektorok. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

a) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggő, akkor $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ is lineárisan összefüggő.

c) Ha $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ generátor-rendszer, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

d) Ha $\underline{a}+\underline{b}, \underline{b}+\underline{c}, \underline{c}+\underline{a}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is az.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Vizsgáljuk meg, hogy $W \subset V$ halmaz altére-e $V$-ben. Ha igen, adjunk meg a dimenzióját és egy bázisát.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in R \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az alábbi bázist alakítsuk át ortogonális bázissá a Gram-Schmidt-ortogonalizáció segítségével.

$$\underline{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Vizsgáljuk meg, hogy $V$ altere-e $R^3$-nak, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist $V$-ben.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : 3x-7y+4z=0 \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy $W$ altere-e $R^4$-nek, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist $W$-ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4 : 5x_1-8x_2+4x_3-x_4=0 \right\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan független vektorok $R^n$-ben. A $p$ valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a}=\underline{u}-\underline{v}, \underline{b}=\underline{u}+\underline{w}, \underline{c}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}, \underline{d}=p\cdot\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Döntsük el, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorokból álló vektorrendszer bázis-e $R^3$-ban, és ha igen, akkor határozzuk meg a $\underline{d}$ vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Határozzuk meg az alábbi, $R^3$-beli vektorok generált alterét. Amennyiben ez az eltér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $R^n$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}, 3\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ vektorok is biztosan lineárisan függetlenek?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a) Alteret akot-e $R^2$-ben azon $(x, y)$ vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

b) Alteret akot-e $R^3$-ban azon $(x, y, z)$ vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $xy = yz$?

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Adjunk meg $R^4$-ben egy, az $\underline{u}$, $\underline{v}$, és $\underline{w}$ vektorokat tartalmazó bázist, majd írjunk fel ebben a bázisban az $\underline{a}$ koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot