



**MATEKING.HU**

**Feladatgyűjtemény**

**ALKALMAZOTT MATEMATIKA 1 tantárgy**

Kiadás dátuma: 2026. 04. 17.

# Tartalomjegyzék

Komplex számok.....	<b>2</b>
Maradékosztályok.....	<b>5</b>
Független és összefüggő vektorok.....	<b>6</b>
Egy kis geometria.....	<b>11</b>
Mátrixok és vektorok.....	<b>14</b>
Determináns, sajátérték, sajátvektor.....	<b>17</b>
Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze.....	<b>21</b>
Lineáris leképezések.....	<b>28</b>
Oszthatóság.....	<b>31</b>
Euklideszi algoritmus & Diofantoszi egyenletek.....	<b>33</b>
Kongruenciák.....	<b>35</b>

## Komplex számok

Van itt két komplex szám:  $z_1 = 4 + 3i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ .

$$z_1 + z_2 = ? \quad z_1 \cdot z_2 = ?$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két komplex szám:  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 1 - 2i$ .

$$z_1 + z_2 = ? \quad z_1 - z_2 = ? \quad z_1 \cdot z_2 = ? \quad \frac{z_1}{z_2} = ?$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Alakítsuk szorzattá az alábbi polinomokat.

a)  $x^2 - 9$

b)  $x^2 + 4$

c)  $x^4 - 81$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi másodokú egyenletet.

$$x^2 + 6x + 13 = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hol helyezkednek el a komplex számsíkon azok a [komplex számok](#), amelyekre

a)  $|z - 4i| \leq |z + 2|$

b)  $|z - 3 + i| > 2$

c)  $|z + 6 + 3i| > |2z|$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Végezzük el az alábbi műveleteket.

a)  $(1 + i)^6 = ?$

b)  $(1 - \sqrt{3}i)^3 (-1 + i)^2 = ?$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg a  $z = 1 + \sqrt{3}i$  komplex szám ötödik gyökét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg a 8-adik egységgyököket

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$z = 1 + i \quad z^4 = ?$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vonjunk a  $z = 1 - \sqrt{3}i$  komplex számból harmadik gyököt.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mennyi lesz az  $n$ -edik egységgyökök szorzata és összege?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Végezzük el a következő műveleteket.

a)  $\sqrt[5]{\frac{-2+6i}{1+2i}}$

b)  $(1+i)^4 (\sqrt{3}+i)^5$

c)  $\frac{i}{1+\sqrt{3}i}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a [komplex számok](#) halmazán!

a)  $(6-i)^2 z + 9 + 2i^3 = \frac{-34i}{5-3i}$

b)  $4z^2 + 4z + 17 = 0$

c)  $z^2 + 6i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Végezzük el a következő műveleteket.

a)  $\left(\frac{-9+13i}{4-3i}\right)^{10}$

b)  $\sqrt[4]{\frac{16}{2-2i}} \cdot (-1-i)^3$

c)  $2i \cdot (\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ) \cdot (\sqrt{5} - i\sqrt{15})^{10}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a [komplex számok](#) halmazán!

a)  $(z^4 - i) \cdot (z^2 + 7) = 0$

b)  $(2 + \sqrt{3}i) \cdot z^5 + 2 - \sqrt{3}i = -3$

c)  $2z^6 + 4\sqrt{2}z^3 + 8 = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg exponenciális alakba:  $-\sqrt{3} + i$

b) Határozzuk meg az alábbi komplex szám valós és képzetes részének összegét.

$$(1 + i)^{12} + \frac{\sqrt{3} + i}{(1 - i)(\sqrt{3} - i)}$$

c) Adjuk meg a  $\left(\sqrt{2} \frac{i}{1+i}\right)^{999}$  komplex számot kanonikus alakban!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Egy a komplex számsíkon elhelyezkedő szabályos háromszög középpontja az origó, egyik csúcsa  $z_1 = 1 + i$ . Adjuk meg a további csúcsait!

b) Írjuk fel a komplex síkon annak a szabályos háromszögnek a csúcsait algebrai alakban, amelynek középpontja az origó, és egyik csúcsa a  $z_1 = 1 + 2i$  pont!

c) Adjuk meg az összes olyan komplex számot, amelynek az egyik hetedik gyöke megegyezik az egyik harmadik gyökével!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a [komplex számok](#) halmazán!

a)  $iz^3 = \frac{1}{2} \cdot (1 - i)^8$

b)  $(1 + i^{1001} + i \cdot z + z)(z^2 + 2z + 10) = 0$

c)  $z^6 - \frac{3-i}{2+i}z^2 = 0$

d)  $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a [komplex számok](#) halmazán!

a)  $z - |z| = 1 + i$

b)  $|z| + z = 2 + i$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Maradékosztályok

Mennyi  $\varphi(7)$  ?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Független és összefüggő vektorok

Vektorteret alkotnak-e?

- a) [Komplex számok](#)
- b) Másodfokú polinomok
- c) Legfeljebb másodfokú polinomok

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [vektorok](#) lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [vektorok](#) lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Töltsük ki az alábbi táblázatot.

<a href="#">vektorok</a> száma	megadható-e ennyi vektor úgy, hogy független legyen $\mathbb{R}^3$ -ban	megadható-e ennyi vektor, hogy generátor-rendszer legyen $\mathbb{R}^3$ -ban
1		
2		
3		
4		
5		

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$  [vektorok](#). Az alábbi állítások közül melyik igaz?

- a) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$  is lineárisan független.
- b) Ha  $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$  generátor-rendszer, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is az.
- c) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}, \underline{c} - \underline{a}$  is lineárisan független.
- d) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$  is lineárisan független.
- e) Ha  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is lineárisan független.
- f) Ha  $\underline{a} - \underline{b}, \underline{b} - \underline{c}$  generátor-rendszer, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is az.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Bontsuk fel a  $\underline{v}$  vektort az  $\underline{a}, \underline{b}$  és  $\underline{c}$  vektorokkal párhuzamos komponensekre.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Egy síkban vannak-e az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Vizsgáljuk meg, hogy  $W$  altere-e  $\mathbb{R}^3$ -nak, ha igen, adjunk meg egy bázist  $W$ -ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy  $W$  altere-e  $\mathbb{R}^4$ -nek, ha igen, adjunk meg egy bázist  $W$ -ben.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ a = b \\ \text{és} \\ c = 3d \end{array} \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$   $R^n$ -beli [vektorok](#). Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- a) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$  is lineárisan független.
- b) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan összefüggő, akkor  $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$  is lineárisan összefüggő.
- c) Ha  $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$  generátor-rendszer, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is az.
- d) Ha  $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is az.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vizsgáljuk meg, hogy  $W \subset V$  halmaz altére-e  $V$ -ben. Ha igen, adjunk meg a dimenzióját és egy bázisát.

$$W = \left\{ \left( \begin{array}{c} a \\ b \\ a-b \end{array} \right) \mid a, b \in R \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az alábbi bázist alakítsuk át ortogonális bázissá a Gram-Schmidt-ortogonalizáció segítségével.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Vizsgáljuk meg, hogy  $V$  altére-e  $R^3$ -nak, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist  $V$ -ben.

$$V = \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \in R^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\}$$

b) Vizsgáljuk meg, hogy  $W$  altére-e  $R^4$ -nek, ha igen, adjuk meg a dimenziószámát és egy bázist  $W$ -ben.

$$W = \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \in R^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyenek  $\underline{u}, \underline{v}$  és  $\underline{w}$  lineárisan független [vektorok](#)  $R^n$ -ben. A  $p$  valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az  $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}, \underline{b} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}, \underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$  [vektorok](#) szintén lineárisan függetlenek?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  vektorokból álló vektorrendszer bázis-e  $\mathbb{R}^3$ -ban, és ha igen, akkor határozzuk meg  $\underline{d}$  vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozzuk meg az alábbi,  $\mathbb{R}^3$ -beli [vektorok](#) generált alterét. Amennyiben ez az eltér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

$$\text{a) } \underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $\mathbb{R}^n$ -beli  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  [vektorok](#) lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az  $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ ,  $\underline{a} + \underline{b} + 3\underline{c}$ ,  $3\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$  [vektorok](#) is biztosan lineárisan függetlenek?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Alteret alkot-e  $\mathbb{R}^2$ -ben azon  $(x, y)$  [vektorok](#) halmaza, melyekre teljesül, hogy  $x^2 = y^2$ ?

b) Alteret alkot-e  $\mathbb{R}^3$ -ban azon  $(x, y, z)$  [vektorok](#) halmaza, melyekre teljesül, hogy  $xy = yz$ ?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjunk meg  $\mathbb{R}^4$ -ben egy, az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ , és  $\underline{w}$  vektorokat tartalmazó bázist, majd írjunk fel ebben a bázisban az  $\underline{a}$  koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Egy kis geometria

Adott egy kocka. Az A csúcsából kiinduló 3 oldalvektor segítségével fejezzük ki az alábbi vektorokat.

a)  $\overrightarrow{AG} = ?$

b)  $\overrightarrow{FH} = ?$

c)  $\overrightarrow{CE} = ?$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Milyen hosszú az  $\underline{a} = (2, 4)$  vektor?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Állapítsuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $\underline{a} = (x, 3)$  és  $\underline{b} = (5, 2)$  [vektorok](#) egymásra merőlegesek legyenek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az  $\underline{a} = (3, 2)$  vektor  $+90^\circ$ -os és  $-90^\circ$ -os elforgatottját.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Írjuk föl a  $P(7, 8, 9)$  ponton átmenő és  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  irányvektorú egyenes egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Írjuk föl a  $P(3, 5)$  ponton átmenő és a  $4x + y = 6$  egyenletű egyenesre merőleges egyenes síkbeli egyenletét.

b) Írjuk föl a  $P(3, 5, 7)$  ponton átmenő és az  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-1}{9}$  egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík térbeli egyenletét.

c) Írjuk föl a  $P(1, 1)$  és  $Q(3, 5)$  ponton átmenő egyenes síkbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Írjuk föl a  $P(1, 4, 1)$  a  $Q(3, 5, 7)$  és az  $R(6, 5, 2)$  pontokon átmenő sík térbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számítsuk ki az alábbi [vektorok](#) vektoriális szorzatát.

$$\text{a) } \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = ?$$

b) Írjuk föl a  $P(1, 1)$  és  $Q(3, 5)$  ponton átmenő egyenes síkbeli egyenletét.

c) Írjuk föl a  $P(1, 4, 1)$  a  $Q(3, 5, 7)$  és az  $R(6, 5, 2)$  pontokon átmenő sík térbeli egyenletét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adjuk meg ezeknek az egyeneseknek a metszéspontját.

$$e_1 : \frac{x-7}{4} = \frac{y-9}{5} = \frac{z-4}{3}$$

$$e_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+2}{3}$$

b) Adjuk meg a  $7x - 4y + 2z = 7$  és a  $16 - 7y + z = 21$  egyenletű síkok metszésvonalának egyenletrendszerét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $2x + y - 3z = 2$  egyenletű  $S_1$  és az  $x + 7y + 3z = 21$  egyenletű  $S_2$  síkokról döntsük el, hogy

a) rajta van-e a  $P(5; 1; 3)$  pont az  $S_1$  és az  $S_2$  metszésvonalán,

b) merőleges-e egymásra  $S_1$  és  $S_2$ ?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Átmege-e az origón az  $S$  sík, amely tartalmazza a  $P(2; -1; 4)$  pontot és az  $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{5} = \frac{z-3}{6}$  egyenletrendszerű  $e$  egyenest?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Tartalmazza-e az  $R(1; 3; 4)$  pontot az a sík, amelyet a  $P(1; 7; -1)$  és a  $Q(11; 9; -5)$  pontokat összekötő egyenes a  $P$ -ben merőlegesen dőf?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $e$  egyenesről tudjuk, hogy merőlegesen dőfi az  $x + 2y + 3z = 6$  egyenletű síkot az  $(1; 1; 1)$  pontban, az  $f$  egyenesről pedig, hogy átmege az  $(5; 2; -1)$  ponton és a  $(13; 4; -5)$  ponton. Döntsük el, hogy  $e$ -nek és  $f$ -nek van-e közös pontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van-e az  $A(-1; -2; 1)$ ,  $B(3; 1; 3)$ , és  $C(7; 6; 3)$  pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az  $y$ -tengelyre esik? Ha igen, melyik?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $e$  egyenes egyenletrendszere  $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ , az  $f$  egyenes egyenletrendszere pedig  $\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}$ .

Döntsük el, hogy  $e$  és  $f$  párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozzuk meg az  $x - 4 = \frac{y+5}{4} = \frac{2-z}{3}$  egyenletrendszerű  $e$  egyenes minden olyan  $P$  pontját, amelyre a  $P$ -t a  $Q(7; 12; 4)$  ponttal összekötő  $f$  egyenes merőleges  $e$ -re.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $p$  paraméter milyen értékére esnek egy síkba az  $A(2; 3; 3)$ ,  $B(3; 4; 1)$ ,  $C(4; 6; 2)$ , és  $D(p; 2; 5)$  pontok?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Párhuzamos-e az  $\frac{5x+3}{10} = \frac{4-y}{5} = \frac{5-2z}{2}$  egyenletrendszerű egyenes a  $6x + y + 7z = 91$ , illetve az  $5x + 2y = 79$  egyenletű síkok metszésvonalával?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a  $P(12; 1; 7)$  ponton és merőlegesen metszi az  $x - 3 = \frac{y-2}{3} = \frac{-z-1}{4}$  egyenletrendszerű egyenest.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Mátrixok és vektorok

Végezzük el az alábbi műveleteket.

$$\text{a) } 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Adjuk meg az alábbi [mátrixok](#) transzponált mátrixait!

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Végezzük el az alábbi műveleteket.

$$\text{a) } 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } (3 \ 2 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 1 \ 2)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Számítsuk ki az alábbi két vektor által bezárt szöveget.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Van itt néhány vektor, és végezzük el velük a következő műveleteket.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \langle 2 \ 5 \ 7 \rangle$$

a)  $A \cdot \underline{b}$

b)  $A \cdot C$

c)  $A \cdot C^*$

d)  $\underline{b}^* \cdot \underline{d}$

e)  $\underline{b} \cdot \underline{d}^*$

f)  $A^2$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Determináns, sajátérték, sajátvektor

Számítsuk ki az alábbi [mátrixok](#) determinánsait.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Számítsuk ki az alábbi [mátrix](#) determinánsát.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -5 \\ -4 & -1 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Számítsuk ki az alábbi [mátrixok](#) determinánsait.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Az alábbi mátrixnak milyen  $p$  paraméter esetén létezik inverze, milyen  $p$  paraméterre lesz a determinánsa éppen 0, illetve milyen  $p$  paraméterre lesz az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  egyenletrendszernek végtelen sok megoldása.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adott az  $A$  2x2-es [mátrix](#), és nézzük meg, hogy sajátvektora-e ennek az  $\underline{u}$ , és a  $\underline{v}$  vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Számoljuk ki az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$  [mátrix](#) sajátértékeit és sajátvektorait.

Számításaink során a bázis transzformációt használjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Adott az  $A$  2x2-es [mátrix](#), és nézzük meg, hogy sajátvektora-e ennek az  $\underline{u}$ , és a  $\underline{v}$  vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Számoljuk ki az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$  [mátrix](#) sajátértékeit és sajátvektorait.

Számításaink során a Gauss eliminációt használjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázis transzformáció segítségével nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss elimináció segítségével nézzük meg ennek a 3x3-as mátrixnak a sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázis transzformáció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss elimináció segítségével állítsuk elő ennek a 3x3-as mátrixnak a diagonális alakját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vannak itt ezek a [mátrixok](#), döntsük el, hogy milyen definiték.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az  $A$  mátrixhoz és  $\underline{x}$  vektorhoz tartozó kvadratikus alakokat.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

c) Adott a  $Q(\underline{x})$  kvadratikus alak, határozzuk meg ebből az  $A$  mátrixot.

$$Q(\underline{x}) = 5x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 7x_1x_3 - 6x_2x_3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Döntsük el az alábbi kvadratikus alakok definittségét.

$$\text{a) } Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$$

$$\text{b) } Q(\underline{x}) = -5x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert bázis transzformációval.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1 + x_4 = 5$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss eliminációval.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1 + x_4 = 5$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a bázis transzformáció segítségével.

a)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

b)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a Gauss elimináció segítségével.

a)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

b)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert bázis transzformáció segítségével.

$$2x_1 - x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$

$$8x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Gauss elimináció segítségével.

$$2x_1 - x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$

$$8x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? A feladatot a bázis transzformáció segítségével oldjuk meg.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? A feladatot a Gauss elimináció segítségével oldjuk meg.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \beta$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? (Oldjuk meg bázis transzformációval)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \beta$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_2 + 4x_3 + \gamma x_4 = 4$$

$$3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = \alpha$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  paraméterek milyen értékeire lesz nulla darab, egy darab illetve végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek? (Oldjuk meg a Gauss elimináció segítségével)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \beta$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_2 + 4x_3 + \gamma x_4 = 4$$

$$3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = \alpha$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris transzformáció az  $(1, 2)$  és a  $(3, 4)$  vektorhoz is az  $(5, 6)$  vektort rendeli. Írjuk fel  $\varphi$  mátrixát, majd határozzuk meg  $\dim \text{Im} \varphi$  és  $\dim \text{Ker} \varphi$  értékét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bázis transzformáció segítségével számítsuk ki a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló vektorrendszer rangját, illetve állapítsuk meg, hogy előállítható-e segítségével az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektor.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss elimináció segítségével számítsuk ki a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló vektorrendszer rangját, illetve állapítsuk meg, hogy előállítható-e segítségével az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektor.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$  független [vektorok](#), és

$$\underline{v}_1 = \underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_2 = \underline{a}_1 + \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_3 = 3\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

Mekkora a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  vektorrendszer rangja, illetve előállítható-e velük a  $\underline{b} = \underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$  vektor?

Számításainkat a bázis transzformáció segítségével végezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$  független [vektorok](#), és

$$\underline{v}_1 = \underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_2 = \underline{a}_1 + \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_3 = 3\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

Mekkora a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  vektorrendszer rangja, illetve előállítható-e velük a  $\underline{b} = \underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + \underline{a}_3$  vektor?

Számításainkat a Gauss elimináció segítségével végezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az alábbi [mátrix](#) inverzét a bázis transzformáció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az alábbi [mátrix](#) inverzét a Gauss elimináció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az alábbi [mátrix](#) inverzeit a bázis transzformáció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Számoljuk ki az alábbi [mátrix](#) inverzeit a Gauss elimináció segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $p$  és  $q$  valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát. Ha az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a  $p$  és  $q$  ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást. (Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 8$$

$$4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 = 23$$

$$5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 = 14$$

$$2x_1 + p \cdot x_4 = q$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $p$  és  $q$  valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát. Ha az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a  $p$  és  $q$  ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást. (Oldjuk meg a Gauss elimináció segítségével)

$$x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 8$$

$$4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 = 23$$

$$5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 = 14$$

$$2x_1 + p \cdot x_4 = q$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy a  $p$  és  $q$  valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 - 3x_2 - 14x_3 = -17$$

$$2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 = q - 34$$

$$3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 = 4q - 37$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy a  $p$  és  $q$  valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek.

Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$x_1 - 3x_2 - 14x_3 = -17$$

$$2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 = q - 34$$

$$3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 = 4q - 37$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy a  $p$  valós paraméterek mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

$$2x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 17$$

$$x_1 + p \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 5$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy a  $p$  valós paraméterek mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

(Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

$$2x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 17$$

$$x_1 + p \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 5$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az alábbi [mátrix](#) inverzét, majd döntsük el, hogy a  $p$  valós paraméter mely értékeire nem létezne az inverz [mátrix](#).

(Oldjuk meg a bázis transzformáció segítségével)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg az alábbi [mátrix](#) inverzét, majd döntsük el, hogy a  $p$  valós paraméter mely értékeire nem létezne az inverz [mátrix](#).

(Oldjuk meg a Gauss elinimáció segítségével)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Lineáris leképezések

Adjuk meg az x tengelyre való tükrözés mátrixát  $\mathbb{R}^2$ -ben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Tükrözzük az x tengelyre a  $\underline{v}$  vektort, ha

a)  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  és a bázis [vektorok](#):  $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  és  $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  és a bázis [vektorok](#):  $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  és  $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

a)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$      $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix}$      $a, b \in \mathbb{R}$

b)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$      $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix}$      $a, b \in \mathbb{R}$

c)  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$      $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \cdot b \\ c \end{pmatrix}$      $a, b, c \in \mathbb{R}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát.

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$      $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix}$      $a, b, c \in \mathbb{R}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját:

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$      $\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ c \end{pmatrix}$      $a, b, c \in \mathbb{R}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e, ha igen adjuk meg a képteret, a magteret és a transzformáció mátrixát, adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, ha van, akkor a sajátbázisát és a diagonális alakját.

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adjuk meg a  $\mathbb{R}^2$ -ben az x tengelyre tükrözés, az origó középpontú  $\alpha$ -szögű forgatás, és az origóra tükrözés mátrixait.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík transzformációi közül melyek dimenzió tartó transzformációk?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Döntsük el, hogy az alábbi [mátrixok](#) közül melyek hasonlóak.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

a) Létezik-e olyan  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris transzformáció, mely az  $(1, 0)$  vektorhoz, az  $(1, 1)$  vektorhoz, és az  $(1, 2)$  vektorhoz is az  $(1, 2)$  vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

b) Létezik-e olyan  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris transzformáció, mely az  $(1, 2)$  vektorhoz, az  $(5, 4)$  vektorhoz, és a  $(3, 3)$  vektorhoz is a  $(2, 1)$  vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

c) Létezik-e olyan  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris transzformáció, mely az  $(1, 2)$  vektorhoz, a  $(2, 5, 5)$  vektort, és a  $(2, 1)$  vektorhoz is a  $(4, 1, 1)$  vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris transzformáció az  $(1, 2)$  és a  $(3, 4)$  vektorhoz is az  $(5, 6)$  vektort rendeli. Írjuk fel  $\varphi$  mátrixát, majd határozzuk meg  $\dim \operatorname{Im} \varphi$  és  $\dim \operatorname{Ker} \varphi$  értékét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Adott egy  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris transzformáció mátrixa. Határozzuk meg  $\dim \operatorname{Im} \varphi$  és  $\dim \operatorname{Ker} \varphi$  értékét.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Oszthatóság

Végezzük el az alábbi feladatokat:

- a) Az 5728 osztható-e 3-mal?
- b) A 4758 osztható-e 3-mal?
- c) Az 52742 osztható-e 4-gyel?
- d) A 61524 osztható-e 4-gyel?
- e) A 3714 osztható-e 6-tal?
- f) A 4326 osztható-e 9-cel?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Mennyi a 36 és 25 legnagyobb közös osztója?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

- a) Bizonyítsuk be, hogy a 3-nál nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel!
- b) Melyek azok a  $p$  prímszámok, amelyekre  $2p - 1$  és  $2p + 1$  is prím?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Adjuk meg az 1960 prímtenyezős felbontását!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Hogyan bontható fel a 360 a  $2^k$  alakú számok világában?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

- a) Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egészek, akkor legalább az egyik befogó mérőszáma páros.
- b) Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egészek, akkor az egyik befogó mérőszáma osztható 3-mal.
- c) Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egészek, akkor van köztük legalább egy öttel osztható.
- d) Igazoljuk, hogy bármely páratlan szám négyzetéből 1-et elvéve 8-cal osztható számot kapunk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

- a) Igazoljuk, hogy ha  $n$  páratlan szám, akkor 9 osztója  $11^n + 7^n$ -nek.  
 b) Milyen  $n$  természetes szám esetén osztható az alábbi kifejezés 16-tal?

$$17^n + n$$

- c) Igazoljuk, hogy ha  $n$  páratlan, akkor 37 osztója az alábbi kifejezésnek.

$$1 + 2^{19} + 3^{19} + 4^{19} + \dots + 36^{19}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

- a) Milyen pozitív egész  $n$ -re lesz a 6 osztója az  $1 + n^2 + n^4 + 3^n$ -nek?  
 b) Bizonyítsuk be, hogy 7 osztója  $333^{444} + 444^{333}$ -nak.  
 c) Bizonyítsuk be, hogy 9 osztója  $4^n - 3n - 1$ -nek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

- a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy 5-nél nagyobb prímszám négyzetét 30-cal osztjuk, akkor maradékul 1-et vagy 19-et kapunk.  
 b) Határozzuk meg a  $p, q, r$  prímeket úgy, hogy a  $p^4 + q^4 + r^4 - 3$  kifejezés értéke szintén prím legyen.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bizonyítsuk be, hogy ha  $2^n - 1$  prímszám, akkor  $n$  is prímszám!

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Euklideszi algoritmus & Diofantoszi egyenletek

Az Euklideszi algoritmus használatával állapítsuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját.

a) 161 és 119

b) 221 és 299

c) 189 és 161

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenleteket.

a)  $13x + 8y = 17$

b)  $12x + 8y = 10$

c)  $12x + 20y = 28$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

a) Bizonyítsuk be, hogy  $a = 2n + 5$  és  $b = 2n + 3$  relatív prímekek bármely  $n$  egész számra.

b) Van itt ez a tört:

$$\frac{12n+7}{7n+4}$$

Létezik-e olyan  $n$  egész szám, amire ez a tört egyszerűsíthető 5-tel?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$$24x + 39y = 10$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$$10x + 4y = 12$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$$26x + 10y = 12$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$$8x + 6y = 16$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenletet.

$$46x + 26y = 154$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Kongruenciák

a) Bizonyítsuk be, hogy  $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$

b) Bizonyítsuk be, hogy  $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Mennyi  $\varphi(7)$  ?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Mennyi  $\varphi(12)$ ,  $\varphi(16)$  és  $\varphi(100)$  ?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Bizonyítsuk be az Euler-Fermat tételt.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

a) Mi az utolsó két számjegye a  $1789^{2046}$ -nak?

b) Mi az utolsó két számjegye az alábbi számnak?

$39^{49^{59}}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Keressük azokat az  $x$  egész számokat, amikre

a)  $24x \equiv 13 \pmod{7}$

b)  $13x \equiv 11 \pmod{120}$

c)  $13x \equiv 611 \pmod{120}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Keressük azokat az  $x$  egész számokat, amikre

a)  $59x \equiv 11 \pmod{120}$

b)  $23x \equiv 63 \pmod{43}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Keressük azokat az  $x$  egész számokat, amikre

a)  $2x \equiv 14 \pmod{12}$

b)  $4x \equiv 36 \pmod{16}$

c)  $14x \equiv 30 \pmod{18}$

d)  $6x \equiv 10 \pmod{22}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi Diofantoszi egyenleteket.

a)  $3x + 4y = 13$

b)  $13x + 36y = 56$

c)  $4x + 6y = 13$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi kongruencia rendszereket

a)

$$x \equiv 7 \pmod{12}$$

$$x \equiv 9 \pmod{10}$$

b)

$$4x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$5x \equiv 6 \pmod{7}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

a) Milyen maradékot ad 66-tal osztva ez a szám?

$$66^{63^{61}}$$

b) Milyen maradékot ad 1023-mal osztva ez a szám?

$$1025^{1005}$$

c) Milyen maradékot ad 65-tel osztva ez a szám?

$$138^{139}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Mi lesz az utolsó két számjegye ennek az alábbi számoknak?

a)  $303^{404}$

b)  $33^{21^{34}}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Mi lesz az utolsó két számjegye ennek az alábbi számoknak?

a)  $159^{161}$

b)  $49^{49^{50}}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat.

a)  $8x \equiv 30 \pmod{28}$

b)  $2x \equiv 7 \pmod{33}$

c)  $47x \equiv 1 \pmod{53}$

d)  $9x \equiv 1 \pmod{88}$

e)  $8x \equiv 29 \pmod{27}$

f)  $32x \equiv 7 \pmod{47}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

a) Egy  $n$  egész szám 115-szöröse 110-zel nagyobb maradékot ad 344-gyel osztva, mint maga az  $n$  szám. Milyen maradékot adhat  $n$  344-gyel osztva?

b) Az  $n$  pozitív egész számra  $43n - 1$  utolsó két számjegye megegyezik  $2n + 2$  utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Mely egész számokra teljesül, hogy 7-tel osztva 2, 9-cel osztva 3 maradékot adnak?

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---