MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

ALKALMAZOTT MATEMATIKA 2 tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 17.

Tartalomjegyzék

Interpolációs polinomok

Az interpoláció egy közelítő módszer, amely a függvény ismert értékei alapján ad közelítést a nem ismert értékeire.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Lagrange-féle interpolációs polinom megadja azt a polinomot, amely x_1-ben y_1-et, x_2-ben y_2-t és így tovább x_n-ben y_n értéket vesz föl. Általánosan így tudjuk legyártani:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \cdot y_j$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Newton interpoláció első lépése, hogy elkészítjük a Newton-együtthatókat:

$$N_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad N_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad N_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

$$N_4 = \frac{N_2 - N_1}{x_3 - x_1} \quad N_5 = \frac{N_3 - N_2}{x_4 - x_2}$$

$$N_6 = \frac{N_5 - N_4}{x_4 - x_1}$$

A polinomot pedig így kapjuk meg:

$$P(x) = y_1 + N_1(x - x_1) + N_4(x - x_1)(x - x_2) + N_6(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Hermite interpoláció abban különbözőik a Lagrange és Newton féle interpolációktól, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken nem csak az eredeti polinom-függvény értékeit, hanem a deriváltjait is nézzük.

A keresett polinomfüggvény mindig egyel kisebbfokú lesz, mint az interpolációs pontok száma (k) és a következő alakban keressük:

$$f(x) = a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

A polinom együtthatóit úgy kapjuk meg, hogy az ismert adatokat behelyettesítjük és egy egyenletrendszert alkotunk belőle, amit pl. Gauss eliminációval megoldhatunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az f függvény $n+1$-szer deriválható az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és x által kifeszített I intervallumon, akkor az interpoláció hibája:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \quad \xi_x \in I$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minimális feszítőfa, Dijkstra-algoritmus, keresések

Egy gráf feszítőfája a gráf minden csúcsát tartalmazó fa részgráf. Feszítőfából általában több is van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A minimális feszítőfa egy gráfban a legkisebb élsúlyú feszítőfa.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Kruskal algoritmus segítségével minimális feszítőfát lehet megtalálni.

Az első lépés, hogy keressük meg a gráfban a legkisebb súlyú élt. Ha több azonos súlyú él van, akkor válasszuk ki azt, amelyikhez kedvünk van.

Ezek után belépünk egy ciklusba, ahol minden lépésben az eddig még ki nem választott élekre alkalmazzuk az előző lépést úgy, hogy ne keletkezzen kör. Ha mégis kör keletkezne, akkor a legutolsó olyan élt, amelynek hozzávétele során a kört kapjuk, töröljük.

Ezt addig csináljuk, amíg kész nem vagyunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfok egy adott pontjából való feltérképezésére alkalmas módszer a szélességi keresés (BFS = Breadth-first search).

Működése:

Elindulunk egy adott pontból, és megkeressük az összes szomszédos pontot. Ezek az 1 egység távolságra lévő szomszédok és mindegyikre ragasztunk egy 1-es címkét.

Most ezeknek keressük meg az 1 egység távoli szomszédjait. De csak azokat, akiken még nincsen címke.

Ők a kiinduló ponttól 2 egység távolságra vannak és 2-es címkét kapnak.

Ha valamelyik 2-es szomszédba több él is vezet, akkor csak az egyiket hagyjuk meg. Mindegy melyiket.

Az algoritmus aztán így folytatódik, és szép lassan végez.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A DFS (Depth-first search) algoritmus a gráf mélységi bejárása.

A DFS algoritmus lényege, hogy elindulunk egy úton, és megyünk, amíg csak tudunk.

Amikor elakadunk, mert már nem tudunk úgy továbbmenni, hogy olyan pontba jussunk, ahol még nem jártunk, akkor visszamegyünk egészen addig, ahonnan még lehet földerítetlen pontok felé haladni.

Amikor újra elakadunk, megint visszamegyünk, és ezt ismételjük, amíg az egész gráfot be nem jártuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A BFS és DFS algoritmusok végrehajtása során a gráfnak egy-egy feszítőfáját kapjuk. Ezeket nevezzük BFS és DFS fának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf csúcsainak bejárására van egy nagyon speciális módszer, amit Hamilton körnek nevezünk, és az a lényege, hogy egy olyan körön haladunk végig a gráfban, amely a gráf összes pontját tartalmazza.

Hamilton kör létezésének szükséges feltétele:

Ha egy gráfból k darab csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a megmaradó gráfnak legfeljebb k darab komponense lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Hamilton út egy olyan út, amely a gráf minden csúcsát tartalmazza.

Hamilton út létezésének szükséges feltétele:

Ha egy gráfból k darab csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a megmaradó gráfnak legfeljebb $k+1$ darab komponense lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Dirac-tétel azt mondja ki, hogy ha egy G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú gráfban minden csúcs foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráfban van Hamilton kör.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az Ore-tétel azt mondja, hogy ha egy G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú gráfban bármely V_1 és V_j nem szomszédos csúcsra $d(V_i) + d(V_j) \geq n$ teljesül, akkor a gráfban van Hamilton kör.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

LU-felbontás és QR-felbontás

Egy mátrix LU felbontása azt jelenti, hogy a mátrixot felbontjuk egy alsó és egy felső háromszögmátrix szorzatára. Módszere a Gauss eliminációra épül.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy nxn-es mátrixnak akkor létezik LU-felbontása, ha az első n-1 főminora nem nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyha egy olyan mátrix LU felbontására van szükségünk, amelynek valamelyik (nem utolsó) főminora 0, akkor megtehetjük azt, hogy egy premutációs mátrix segítségével felcseréljük a sorait. Hiszen a sorcsere hatására a mátrix determinánsa, az egyenletrendszer megoldása stb. nem változnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az LU-felbontás módszere nem négyzetes mátrixokra ugyanolyan, mint eddig, a Gauss elimináció segítségével történik. Legfeljebb az U mátrix nem lesz négyzetes, így nem lesz valódi felső háromszögmátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A mátrix szimmetrikus és pozitív definit mátrix, akkor egyértelműen létezik olyan pozitív diagonálisú L alsó háromszögmátrix, amelyre:

$$A = L \cdot L^T$$

Ezt a felbontást Cholesky-felbontásnak nevezzük. Ez tulajdonképpen egy olyan LU-felbontás, ahol az Umátrix az L-nek a transzponáltja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyha az A egy olyan nxk-as mátrix, $n \geq k$, és a mátrix teljes oszloprangú, vagyis az oszlopvektorok rangja k, akkor létezik olyan nxn-es Q ortogonális mátrix, és olyan R felső háromszögmátrix, hogy

$$A = Q \cdot R$$

Ezt a felbontást nevezzük QR-felbontásnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

QR-felbontást kaphatunk akkor is, ha az A mátrixot addig-addig szorozgatjuk Givens forgatások mátrixaival, amíg felső háromszögmátrixot nem kapunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrixból először készítünk egy felső háromszögmátrixot a Householder-tükrözések segítségével.

Hogyha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ különböző vektorok, és teljesül rájuk, hogy $|\underline{a}\ |=|\ \underline{b}|$ akkor létezik olyan Householder-tükrözés, ami az $\underline{a}$ vektort a $\underline{b}$ vektorba transzformálja.

$$H = I - 2 \cdot \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}^T}{\underline{v}^T \cdot \underline{v}}$$

ahol $\underline{v} = \underline{a} - \underline{b}$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ford-Fulkerson algoritmus

Legyen X a $V(G)$-nek egy olyan részhalmaza, ami S-t tartalmazza. Ekkor az X-ből a $V(G)-X$-be vezető éleket (S,T) vágásnak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy (S,T) vágás kapacitása, a vágásban szereplő élek kapacitásainak összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Ford-Fulkerson algoritmus egy olyan algoritmus, amit a maximális folyam megkeresésére használunk. Az algoritmus lényege pedig az a javító gráf, amit az eredeti hálózat alapján készítünk el. A javító gráf megmutatja nekünk, hogy milyen útvonalon tudjuk növelni a meglévő folyamot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen G egy irányított gráf és értelmezzünk a gráf élein egy $E \to R_0^+$ függvényt, ami minden élhez hozzárendeli a $c(e)$ nem negatív számot, amit az él kapacitásának nevezünk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen G egy irányított gráf és értelmezzünk a gráf élein egy $E \to R_0^+$ függvényt, ami minden élhez hozzárendeli a $c(e)$ nem negatív számot, amit az él kapacitásának nevezünk.

Van továbbá két kitüntetett pont a gráfban, S (source = forrás) és T (target = cél).

Ekkor a (G,S,T,c) egy hálózat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hálózatban folyamnak nevezünk egy olyan $f(e)$ $E \to R_0^+$ függvényt, amire teljesül, hogy bármely e élre $0 \leq f(e) \leq c(e)$ és bármely T-től és S-től különböző V csúcsra:

$$\sum_{Vbe} f(e) - \sum_{Vki} f(e) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy folyam értékének az

$$m_f = \sum_{Ski} f(e) - \sum_{Sbe} f(e)$$

számot nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Ford-Fulkerson tétel azt mondja ki, hogy egy hálózatban a maximális folyam mindig megegyezik a minimális vágással.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mindig létezik egy olyan út, ami csak azokon a pontokon halad át, ahol a tartalékidő nulla, és az út hossza megegyezik a teljes folyamat hosszával. Ezt az utat kritikus útnak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot