Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések

Ha az A egy $n\ x\ n$-es mátrix, akkor determinánsa

$$det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}$$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 2x2-es mátrix determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A 3x3-as mátrixok determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A egy nxn-es mátrix, akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az A mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG<n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG=n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A mátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix sajátértéke egy olyan λ valós szám, amelyhez van valami $\underline{v}$ nem nullvektor, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátérték lényege, hogy vannak olyan mátrixok, és olyan vektorok, hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. Az egységmátrixpéldául ilyen: ha az egységmátrixszal megszorzunk egy tetszőleges vektort, akkor ugyanazt a vektort kapjuk. Ilyenkor minden vektor sajátvektor és a sajátérték 1, mert minden vektorból az 1-szerese lesz.

A sajátvektorok és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le. A síkbeli tükrözés az x tengelyre például egy geometriai transzformáció, aminek a mátrixa két sajátértékkel rendelkezik. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Az y tengelyen lévő vektorok viszont az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátértékei. Az 1 és a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix sajátvektora egy olyan $\underline{v}$ nem nullvektor, amelyhez van valami λ valós szám, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátvektor lényege, hogy vannak olyan mátrixok, és olyan vektorok, hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. A sajátvektorok és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le.

Vegyük például a síkbeli tükrözést az x tengelyre. Ez egy geometriai transzformáció. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Vagyis ezek a vektorok egytől egyig sajátvektorok, mert teljesítik azt amit egy sajátvektornak tudnia kell: ha megszorozzuk a mátrixokt a vektorral, akkor az eredeti vektor számszorosát kapjuk. Itt most éppen az eredeti vektor 1-szeresét kapjuk. Az y tengelyen lévő vektorok szintén sajátvektorok, mert az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. Vagyis ezek a vektorok saját maguk -1-szeresei lesznek. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátvektorai: az x tengely és az y tengely vektorai. Az x tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték az 1, míg az y tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A karakterisztikus egyenlet a sajátértékek kiszámolásához szükséges egyenlet:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet segít nekünk kiszámolni egy mátrix sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Az egyenletet karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy nxn-es mátrix karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5x5-ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda \cdot I)$$

A karakterisztikus polinom segít nekünk kiszámolni egy mátrix sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Vagyis a sajátértékek mindig a karakterisztikus polinom gyökei. Előfordul, hogy egy sajátérték többszörös gyök, és az is megeshet, hogy komplex gyökei vannak a karakterisztikus polinomnak.

Azt az egyenletet, amikor a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy nxn-es mátrix karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5x5-ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A mátrix egy n x n-es diagonalizálható mátrix, akkor a sajátfelbontása:

$$A = X \cdot diag(A) \cdot X^{-1}$$

Itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_n \end{pmatrix}$ vagyis egyszerűen úgy keletkezi, hogy a sajátvektorokat fogjuk, és leírjuk egymás mellé és

$$diag(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A spektrálfelbontás segítségével könnyebben hatványozhatunk:

$$A^n = X \cdot (diag(A))^n \cdot X^{-1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix sarok főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarok mátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarokmátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + - +$ de mínusszal indul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A nxn-es szimmetrikus mátrix és $\underline{x}$ egy vektor R^n-ben, akkor a

$$Q(x) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$
$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezésnél V_2-nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1-beli vektorok képe is nullvektor lesz. Ezen vektorok halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a mátrixok pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1-ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

φ^{-1} mátrixa $(\varphi)_b^{-1}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ lineáris leképezésnek a $\underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \ldots\ \underline{b}_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1)\ \varphi(\underline{b}_2)\ \varphi(\underline{b}_3)\ \ldots\ \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is V_1-ben, a leképezés mátrixa mindig egy nxn-es mátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak V_1-ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret $Hom(V_1, V_2)$-nek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A és B olyan mátrixok, hogy létezik egy C mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

Megnézem a kapcsolódó epizódot
