Kettős és hármas integrál

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az x szerinti határokat adjuk meg és utána az y szerintit vagy fordítva.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A polárkoordinátás helyettesítés egy olyan helyettesítés, ami remekül alkalmazkodik a kör tulajdonságaihoz. A dolog lényege, hogy a körben a hagyományos x és y koordináták helyett új koordinátákat vezetünk be.

Az egyik azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk a kör középpontjától és ezt r-nek nevezzük.

A másik pedig egy forgásszög, és jele θ.

Az új koordinátákat polárkoordinátáknak nevezzük, a módszert pedig polárkoordinátás helyettesítésnek. A kapcsolat a régi és az új koordináták között a következő:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

A polárkoordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek. A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int\int_D f(x, y)\, dydx = \int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A henger-koordináták:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

A henger-koordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek.

A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int\int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, drd\theta dz$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A polárkoordináták háromdimenziós változatát gömbi koordinátáknak nevezzük.

Az r azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk az origótól, a φ és θ pedig két forgás-szög.

A régi x, y, z és az új gömbi koordináták közti kapcsolat:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta \quad y = r\sin\varphi\sin\theta \quad z = r\cos\varphi$$

A gömb koordinátás helyettesítés:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\, dxdydz = \int\int\int_D f\left(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\right) r^2 \sin\varphi\, drd\theta d\varphi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot