Paraméteres görbék

A ciklois egyenlete:

$$x = R(-\sin u + u) \qquad y = R(-\cos u + 1)$$

$$u = \frac{4}{R}t$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A paraméteres görbe egyenlete a görbén mozgó pont pillanatnyi koordinátáit írja le.

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

A paraméteres görbe deriválásával kapjuk a $v(t)$ sebességvektort, ami minden időpillanatban megadja a görbén mozgó P pont sebességének irányát és nagyságát:

$$v(t) = (x'(t), y'(t)) \qquad |\, v(t) \,| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A görbe ívhossza a t_0 és t_1 időpillanatokhoz tartozó pontok között:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \; dt$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $r(t)$ paraméteres görbe első deriváltja a görbe érintővektora vagy más néven sebességvektora.

Hogyha ezt elosztjuk a saját hosszával, akkor egy egységnyi hosszú vektort kapunk, amit $\underline{T}$-vel jelölünk.

$$\underline{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $r(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a görbe gyorsulásvektora. Ha ezt elosztjuk a saját hosszával:

$$\underline{N}(t) = \frac{r''(t)}{|r''(t)|}$$

Az így keletkező egységnyi hosszú vektor a görbe főnormálisvektora.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Binormálisvektornak nevezzük a görbe sebességvektorával és gyorsulásvektorával alkotott szorzatot:

$$\underline{B}(t) = \underline{T}(t) \times \underline{N}(t)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{T}(t)$, $\underline{N}(t)$ és $\underline{B}(t)$ vektorok együttes elnevezése kísérő triéder.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $r(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a gyorsulást írja le. Ezek avektorok egy síkot feszítenek ki, ezt a síkot a görbe simulósíkjának nevezzük. A simulósík normálvektora éppen $r'(t) \times r''(t)$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A görbület azt írja le, hogy a simulósíkon belül milyen erősen kanyarodik a görbe. A térgörbék azonban nem csak a simulósíkon belül kanyarodnak, hanem közben ki is csavarodnak abból. Azt, hogy egy térgörbe éppen milyen ütemben csavarodik ki a simulósíkjából, a torzió írja le.

Hogyha egy görbe minden pontjában nulla a torzió, az annak a jele, hogy ez a görbe egy síkgörbe. Egy görbe akkor tud kilépni a simulósíkjából, ha a torzió legalább egy pontban nem nulla. Vagyis olyankor, ha a görbe elmozdul a binormális vektor irányában is. A torzió kiszámításához szükségünk van a görbe harmadik deriváltjára:

$$\tau = \frac{(r'(t)\times r''(t))\cdot r'''(t)}{|r'(t)\times r''(t)|^2} = \frac{\det\begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{bmatrix}}{\left|\det\begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix}\right|^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $r(t) = (x(t), y(t))$ paraméteres görbe görbülete:

$$\kappa = \frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{|x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}^3}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hogyha a görbének egy P pontjában létezik nem nulla görbülete, akkor azt a kört, amel aP-ben érinti a görbét és a görbülete megegyezik a görbe P-beli görbületével és a középpontja a görbe konkáv részében található, a görbe$P$ pontbeli simulókörének nevezzük.

A simulókör sugarát a görög ró betűvel jelöljük, és

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A simulókörök középpontjai által kirajzolt alakzatot evolutának hívjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az ellipszis fél-nagytengelyének hossza a, fél-kistengelyének hossza b, akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a hiperbola fél-nagytengelyének hossza a, fél-kistengelyének hossza b, akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot