Divergencia és rotáció

A vektormező divergenciája egy olyan függvény, amely a vektormező minden pontjában megméri, hogy ott mennyi anyag áramlik a rendszerbe vagy épp mennyi tűnik el.

A képlete:

$$div\,(v(x,y)) = \frac{\delta v_1(x,y)}{\delta x} + \frac{\delta v_2(x,y)}{\delta y}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A rotáció a vektormező örvénylését írja le.

$$rot\,(v(x,y)) = \frac{\delta v_2(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta v_1(x,y)}{\delta y}$$

Azokban a pontokban, ahol $x = y$ a rotáció épp nulla.

Ha $x > y$ akkor a rotáció pozitív, és ha $x < y$ akkor negatív.

$R^3 \to R^3$ vektormező esetén:

$$rot(v) = \left(\frac{\delta v_3}{\delta y} - \frac{\delta v_2}{\delta z}\right) \cdot \underline{i} + \left(\frac{\delta v_1}{\delta z} - \frac{\delta v_3}{\delta x}\right) \cdot \underline{j} + \left(\frac{\delta v_2}{\delta x} - \frac{\delta v_1}{\delta y}\right) \cdot \underline{k} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektormező akkor forrásmentes, ha nincs benne forrás, vagyis nincs benne olyan pont, amelynek pozitív a divergenciája.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektormező akkor örvénymentes, ha a vektormező rotációja mindenütt nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konzervatív vektormezőre több különböző definíció van forgalomban attól függően, hogy fizikusok vagy matematikusok alkották-e meg magát a definíciót.

#0 A $v(x,y,z)$ egyszeresen összefűgő tartományon értelmezett vektormező pontosan akkor konzervatív, ha bármely pontjában a rotáció nulla.

#1 A $v(x,y,z)$ vektormező konzervatív, ha létezik primitív függvénye. Ezt a függvényt potenciál-függvénynek nevezzük, és íme, itt is van:

$$F(x,y,z) \qquad v(x,y,z) = \left(\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}, \frac{\delta F}{\delta z}\right)$$

#2 A $v(x,y,z)$ vektormező konzervatív, ha tetszőleges A és B pontjára igaz, hogy bármely A és B közti görbén ugyanakkora a vektormező integrálja:

$$\underset{A\to B}{\int_{r_1(t)}} v(x,y)\,ds = \underset{A\to B}{\int_{r_2(t)}} v(x,y)\,ds$$

#3 A $v(x,y,z)$ vektormező konzervatív, ha bármely zárt görbén a vektormező integrálja nulla.

$$\oint_{r(t)} v(x,y)\,ds = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A vektormező akkor konzervatív, ha létezik F primitív függvénye. Ez az F függvény a vektormező potenciál-függvénye.

A potenciál-függvény egy vektor-skalár függvény, és azt tudja, hogy a vektormező minden pontjához hozzárendel egy számot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Green-tétel #1 (zárt görbén vett örvénylés):

$$\oint_{r(t)} v(x,y)\,ds = \int_D rot(v)\,dydx$$

Az első Green-tétel azt írja le a rotáció segítségével, hogy mekkora egy vektormező örvénylése a zárt görbén.

Green-tétel #2 (zárt görbén vett fluxus)

A második Green-tétel pedig azt írja le a divergencia segítségével, hogy mekkora egy vektormező fluxusa a zárt görbén.

$$\oint_{r(t)} v(r(t)) \cdot n(t)\,dt = \int_D div(v)\,dydx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A második Green-tétel térbeli változata azt mondja, hogy egy vektormező integrálja az S kifelé irányított zárt felületen egyenlő a divergencia integráljával a felület által határolt D tartományon.

$$\oint_{S(t,u)} v\left(S(t,u)\right) \cdot S_t' \times S_u' \; dudt = \int_D div(v) \; dxdydz$$

Ezt a tételt divergencia-tételnek vagy másként Gauss-Osztrogradszkij-tételnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az első Green-tétel térbeli megfelelője azt mondja, hogy a vektormező örvénylése egy zárt görbén kiszámolható úgy is, ha a görbe által határolt S felületen integráljuk a vektormező rotációját.

$$\oint_{r(t)} v(x,y,z) \; ds = \int_S rot(v) \cdot \underline{n} \; ds$$

Ráadásul teljesen mindegy, hogy melyik felületen.

Az első Green-tétel térbeli változatát Stokes-tételnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot
