



MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEK 2 DE tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 13.

Tartalomjegyzék

Kétváltozós függvények.....	2
Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság.....	6
Kettős és hármas intergrál, térfogati integrál.....	7
Paraméteres görbék.....	9
Vektormezők, görbementi és felületi integrálok.....	12
Divergencia és rotáció.....	13
Differenciálegyenletek.....	16
Izoklinák.....	20
Síkbeli és térbeli leképezések és mátrixaik.....	21

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x , y sík felett a függvény, ami egy felület.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x -essel, akkor marad

Az $f(x, y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y -ossal, akkor marad

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x, y) \quad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x, y)$$

Második lépés:

$$f'_x(x, y) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$f'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét [parciális derivált](#) nulla, az $f(x, y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \dots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű deriváltakból képzett [mátrix](#), amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f''} = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort derivált-vektornak vagy másként gradiensnek hívjuk.

Íme a derivált-vektor:

$$\underline{f}'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad \text{röviden} \quad \underline{f}' = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

A derivált-vektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges \underline{v} irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x, y)$ függvény \underline{v} iránymenti deriváltja az (x_0, y_0) pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{v}} = \underline{f}'(x_0, y_0) \cdot \underline{v}$$

(Itt \underline{v} egységvektor)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $F(x, y) = 0$ egy egyváltozós implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i , mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság

Az $f(x, y)$ [függvény határértéke](#) az $R(x_0, y_0)$ pontban B , ha minden $\epsilon > 0$ -ra van $\delta > 0$ úgy, hogy ha (x, y) eleme az $R(x_0, y_0)$ pont δ sugarú környezetének, vagyis ha

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

akkor

$$|f(x, y) - B| < \epsilon$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény totálisan differenciálható az (x_0, y_0) helyen, ha léteznek olyan A és B valós számok, hogy

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - (A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(x_0, y_0))}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$\lim_{(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = f'_x(x_0, y_0) = \frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta x}$$

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta y}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kettős és hármas intergrál, térfogati integrál

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az x szerinti határokat adjuk meg és utána az y szerintit vagy fordítva.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A polárkoordinátás helyettesítés egy olyan helyettesítés, ami remekül alkalmazkodik a kör tulajdonságaihoz. A dolog lényege, hogy a körben a hagyományos x és y koordináták helyett új koordinátákat vezetünk be.

Az egyik azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk a kör középpontjától és ezt r -nek nevezzük.

A másik pedig egy forgásszög, és jele θ .

Az új koordinátákat polárkoordinátáknak nevezzük, a módszert pedig polárkoordinátás helyettesítésnek. A kapcsolat a régi és az új koordináták között a következő:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

A polárkoordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek. A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int \int_D f(x, y) \, dy dx = \int \int_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A henger-koordináták:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

A henger-koordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek.

A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr d\theta dz$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A polárkoordináták háromdimenziós változatát gömbi koordinátáknak nevezzük.

Az r azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk az origótól, a φ és θ pedig két forgás-szög.

A régi x, y, z és az új [gömbi koordináták](#) közti kapcsolat:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \varphi$$

A gömb koordinátás helyettesítés:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_D f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Paraméteres görbék

A ciklois egyenlete:

$$x = R(-\sin u + u) \quad y = R(-\cos u + 1)$$

$$u = \frac{4}{R}t$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A paraméteres görbe egyenlete a görbén mozgó pont pillanatnyi koordinátáit írja le.

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

A paraméteres görbe deriválásával kapjuk a $v(t)$ sebességvektort, ami minden időpillanatban megadja a görbén mozgó P pont sebességének irányát és nagyságát:

$$v(t) = (x'(t), y'(t)) \quad |v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A görbe ívhossza a t_0 és t_1 időpillanatokhoz tartozó pontok között:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $r(t)$ paraméteres görbe első deriváltja a görbe érintővektora vagy más néven sebességvektora.

Hogyha ezt elosztjuk a saját hosszával, akkor egy egységnyi hosszú vektort kapunk, amit \underline{T} -vel jelölünk.

$$\underline{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $r(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a görbe gyorsulásvektora. Ha ezt elosztjuk a saját hosszával:

$$\underline{N}(t) = \frac{r''(t)}{|r''(t)|}$$

Az így keletkező egységnyi hosszú vektor a görbe főnormálisvektora.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Binormálisvektornak nevezzük a görbe sebességvektorával és gyorsulásvektorával alkotott szorzatot:

$$\underline{B}(t) = \underline{T}(t) \times \underline{N}(t)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{T}(t)$, $\underline{N}(t)$ és $\underline{B}(t)$ [vektorok](#) együttes elnevezése kíséző triéder.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{r}(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a gyorsulást írja le. Ezek a [vektorok](#) egy síkot feszítenek ki, ezt a síkot a görbe simulósíkjának nevezzük. A simulósík normálvektora éppen $\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A görbület azt írja le, hogy a simulósíkon belül milyen erősen kanyarodik a görbe. A térgörbék azonban nem csak a simulósíkon belül kanyarodnak, hanem közben ki is csavarodnak abból. Azt, hogy egy térgörbe éppen milyen ütemben csavarodik ki a simulósíkjából, a torzió írja le.

Hogyha egy görbe minden pontjában nulla a torzió, az annak a jele, hogy ez a görbe egy síkgörbe. Egy görbe akkor tud kilépni a simulósíkjából, ha a torzió legalább egy pontban nem nulla. Vagyis olyankor, ha a görbe elmozdul a binormális vektor irányában is. A torzió kiszámításához szükségünk van a görbe harmadik deriváltjára:

$$\tau = \frac{(\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)) \cdot \underline{r}'''(t)}{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|^2} = \frac{\det \begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{bmatrix}}{\left| \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix} \right|^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$ paraméteres görbe görbülete:

$$\kappa = \frac{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|}{|\underline{r}'(t)|^3} = \frac{|x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}^3}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hogyha a görbének egy P pontjában létezik nem nulla görbülete, akkor azt a kört, amel a P -ben érinti a görbét és a görbülete megegyezik a görbe P -beli görbületével és a középpontja a görbe konkáv részében található, a görbe P pontbeli simulókörének nevezzük.

A simulókör sugarát a görög ró betűvel jelöljük, és

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A simulókörök középpontjai által kirajzolt alakzatot evolutának hívjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az ellipszis fél-nagy tengelyének hossza a , fél-kis tengelyének hossza b , akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a hiperbola fél-nagy tengelyének hossza a , fél-kis tengelyének hossza b , akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektormezők, görbementi és felületi integrálok

A vektormező egy olyan függvény, ami egy tér pontjaihoz vektort rendel.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $v(x, y)$ vektormezőnek az $r(t) = (x(t), y(t))$ görbe mentén vett integrálja t_1 és t_2 között:

$$\int_r v(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} v(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A fluxus azt mondja meg, hogy egy adott felületen mekkora az átáramló anyag vagy energia.

A fluxust a vektormező vektorainak és a felület normálvektorainak skaláris szorzata adja.

$$\int_S v(x, y, z) ds = \int_A v(x, y, z) \cdot \underline{n} dA$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $v(x, y, z)$ vektormezőnek az $S(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$ felületi integrálja:

$$\int_S v(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{u_1}^{u_2} v(x(t, u), y(t, u), z(t, u)) \cdot S'_t \times S'_u dudt$$

ahol

$$S'_t \times S'_u = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{dx(t,u)}{dt} & \frac{dy(t,u)}{dt} & \frac{dz(t,u)}{dt} \\ \frac{dx(t,u)}{du} & \frac{dy(t,u)}{du} & \frac{dz(t,u)}{du} \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $v(x, y, z)$ vektormezőnek az $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ görbe mentén vett integrálja:

$$\int_r v(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} v(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Divergencia és rotáció

A vektormező divergenciája egy olyan függvény, amely a vektormező minden pontjában megméri, hogy ott mennyi anyag áramlik a rendszerbe vagy épp mennyi tűnik el.

A képlete:

$$\operatorname{div}(v(x, y)) = \frac{\delta v_1(x, y)}{\delta x} + \frac{\delta v_2(x, y)}{\delta y}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A rotáció a vektormező örvénylését írja le.

$$\operatorname{rot}(v(x, y)) = \frac{\delta v_2(x, y)}{\delta x} - \frac{\delta v_1(x, y)}{\delta y}$$

Azokban a pontokban, ahol $x = y$ a rotáció épp nulla.

Ha $x > y$ akkor a rotáció pozitív, és ha $x < y$ akkor negatív.

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező esetén:

$$\operatorname{rot}(v) = \left(\frac{\delta v_3}{\delta y} - \frac{\delta v_2}{\delta z} \right) \cdot \underline{i} + \left(\frac{\delta v_1}{\delta z} - \frac{\delta v_3}{\delta x} \right) \cdot \underline{j} + \left(\frac{\delta v_2}{\delta x} - \frac{\delta v_1}{\delta y} \right) \cdot \underline{k} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektormező akkor forrásmentes, ha nincs benne forrás, vagyis nincs benne olyan pont, amelynek pozitív a divergenciája.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektormező akkor örvénymentes, ha a vektormező rotációja mindenütt nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konzervatív vektormezőre több különböző definíció van forgalomban attól függően, hogy fizikusok vagy matematikusok alkották-e meg magát a definíciót.

#0 A $v(x, y, z)$ egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett vektormező pontosan akkor konzervatív, ha bármely pontjában a rotáció nulla.

#1 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha létezik primitív függvénye. Ezt a függvényt potenciál-függvénynek nevezzük, és íme, itt is van:

$$F(x, y, z) \quad v(x, y, z) = \left(\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}, \frac{\delta F}{\delta z} \right)$$

#2 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha tetszőleges A és B pontjára igaz, hogy bármely A és B közti görbén ugyanakkora a vektormező integrálja:

$$\int_{A \rightarrow B} v(x, y) ds = \int_{A \rightarrow B} v(x, y) ds$$

#3 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha bármely zárt görbén a vektormező integrálja nulla.

$$\oint_{r(t)} v(x, y) ds = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A vektormező akkor konzervatív, ha létezik F primitív függvénye. Ez az F függvény a vektormező potenciál-függvénye.

A potenciál-függvény egy vektor-skalár függvény, és azt tudja, hogy a vektormező minden pontjához hozzárendel egy számot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Green-tétel #1 (zárt görbén vett örvénylés):

$$\oint_{r(t)} v(x, y) ds = \int_D \text{rot}(v) dydx$$

Az első Green-tétel azt írja le a rotáció segítségével, hogy mekkora egy vektormező örvénylése a zárt görbén.

Green-tétel #2 (zárt görbén vett fluxus)

A második Green-tétel pedig azt írja le a divergencia segítségével, hogy mekkora egy vektormező fluxusa a zárt görbén.

$$\oint_{r(t)} v(r(t)) \cdot n(t) dt = \int_D \text{div}(v) dydx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A második Green-tétel térbeli változata azt mondja, hogy egy vektormező integrálja az S kifelé irányított zárt felületen egyenlő a divergencia integráljával a felület által határolt D tartományon.

$$\oint_{S(t,u)} v(S(t,u)) \cdot S'_t \times S'_u \, dudt = \int_D \operatorname{div}(v) \, dx dy dz$$

Ezt a tételt divergencia-tételnek vagy másként Gauss-Osztrogradskij-tételnek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az első Green-tétel térbeli megfelelője azt mondja, hogy a vektormező örvénylése egy zárt görbén kiszámolható úgy is, ha a görbe által határolt S felületen integráljuk a vektormező rotációját.

$$\oint_{r(t)} v(x,y,z) \, ds = \int_S \operatorname{rot}(v) \cdot \underline{n} \, ds$$

Ráadásul teljesen mindegy, hogy melyik felületen.

Az első Green-tétel térbeli változatát Stokes-tételnek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Differenciálegyenletek

A [differenciálegyenletek](#) olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [szeparábilis differenciálegyenlet](#) így néz ki:

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az y' -t lecseréljük arra, hogy $\frac{dy}{dx}$.

Aztán jön a szétválasztás: minden y -os dolgot a dy -os oldalra viszünk és minden x -eset a dx -es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [differenciálegyenlet](#) homogén fokszámú, ha $y = ux$ helyettesítés után minden x -es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú [differenciálegyenletek](#) megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az $y(x) = xu(x)$ (röviden $y = xu$) helyettesítést, ekkor $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol y helyett most u -ra hajtunk. És amikor u már megvan, visszacsináljuk y -ra.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ [differenciálegyenlet](#) akkor egzakt, ha $p'_y(x, y) = q'_x(x, y)$, röviden $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$.

Az egzakt egyenletek megoldása $F(x, y) = C$, ahol $F'_x(x, y) = p(x, y)$ és $F'_y(x, y) = q(x, y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a [differenciálegyenlet](#) nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p} \text{ és } \frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$$

Ha ezek közül az első csak y -t tartalmaz, vagy a második csak x -et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$$u = e^{-\int f(y) dy} \text{ vagy } u = e^{\int g(x) dx}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű lineáris [differenciálegyenlet](#) általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy y' , és van benne egy elsőfokú y .

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy $v(x)$ függvényt:

$$v = e^{\int P(x) dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet $v(x)$ -el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)' dx = \int vQ(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x) dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy $C(x)$ függvény. És ezt a $C(x)$ függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x) dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban $C(x)$ helyére beírjuk, ami kijött.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósoknak, mert a $P(x)$ függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk a .

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

$$\text{A homogén egyenlet: } y' + ay = 0$$

$$\text{A homogén megoldás: } y_0 = Ce^{-ax}$$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvényről függ:

$$Q(x) = \text{másodfokú polinom: } y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$Q(x) = \text{harmadfokú polinom: } y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = Ae^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A\cos \alpha x + B\sin \alpha x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) partikuláris megoldásában szerepel $e^{\alpha x}$ és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet: $ar^2 + br + c = 0$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$$Q(x) = \text{polinom: } y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = A e^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Izoklinák

Azon pontok halmazát, melyekben a megoldásfüggvények meredeksége egy adott számmal egyenlő, a [differenciálegyenlet](#) izoklinájának nevezzük.

Az $y' = f(x, y(x))$ izoklináinak egyenlete:

$$f(x, y(x)) = K$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Síkbeli és térbeli leképezések és mátrixaik

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezésnél V_2 -nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1 -beli [vektorok](#) képe is nullvektor lesz. Ezen [vektorok](#) halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a [mátrixok](#) pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1 -ben és a bázis[vektorok](#) képeit egymás mellé írjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

$$\varphi^{-1} \text{ mátrixa } (\varphi)_b^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az x tengelyre tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Az y tengelyre tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az $y=x$ tengelyre tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az origón átmenő \underline{a} normálvektorú egyenesre tükrözés mátrixa:

$$R = I - 2 \cdot \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}^T}{\underline{a}^T \cdot \underline{a}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az α szögű forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az origóra való középpontos tükrözés egy 180° -os forgatásnak felel meg, így mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az i és j koordinátatengelyek síkjában történő Givens forgatás mátrixát úgy kapjuk, hogy arra a négy helyre ahol az egység mátrix i -edik és j -edik sora és oszlopa metszi egymást beírjuk szépen az α szögű forgatás mátrixának elemeit.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az origón átmenő síkokra való tükrözést Householder-tükrözésnek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hogyha egy origón átmenő sík normálvektora az \underline{a} vektor, akkor az erre a síkra tükrözés mátrixa:

$$H = I - 2 \cdot \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}^T}{\underline{a}^T \cdot \underline{a}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az x tengelyre merőleges vetítés mátrixa:

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az y tengelyre merőleges vetítés mátrixa:

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az x tengelyre merőleges vetítés mátrixa:

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az y tengelyre merőleges vetítés mátrixa:

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A \underline{v} irányvektorú origón átmenő egyenesre történő merőleges vetítés mátrixa:

$$P = \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}^T}{\underline{v}^T \cdot \underline{v}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A projekció mátrixa:

$$P = I - \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}^T}{\underline{a}^T \cdot \underline{a}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)
