

Differenciálegyenletek

A [differenciálegyenletek](#) olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [szeparábilis differenciálegyenlet](#) így néz ki:

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az y' -t lecseréljük arra, hogy $\frac{dy}{dx}$.

Aztán jön a szétválasztás: minden y -os dolgot a dy -os oldalra viszünk és minden x -eset a dx -es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [differenciálegyenlet](#) homogén fokszámú, ha $y = ux$ helyettesítés után minden x -es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú [differenciálegyenletek](#) megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az $y(x) = xu(x)$ (röviden $y = xu$) helyettesítést, ekkor $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol y helyett most u -ra hajtunk. És amikor u már megvan, visszacsináljuk y -ra.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ [differenciálegyenlet](#) akkor egzakt, ha $p'_y(x, y) = q'_x(x, y)$, röviden $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$.

Az egzakt egyenletek megoldása $F(x, y) = C$, ahol $F'_x(x, y) = p(x, y)$ és $F'_y(x, y) = q(x, y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a [differenciálegyenlet](#) nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p} \text{ és } \frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$$

Ha ezek közül az első csak y-t tartalmaz, vagy a második csak x-et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$$u = e^{-\int f(y) dy} \text{ vagy } u = e^{\int g(x) dx}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű lineáris [differenciálegyenlet](#) általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy y' , és van benne egy elsőfokú y .

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy $v(x)$ függvényt:

$$v = e^{\int P(x) dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet $v(x)$ -el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)' dx = \int vQ(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x) dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy $C(x)$ függvény. És ezt a $C(x)$ függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x) dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban $C(x)$ helyére beírjuk, ami kijött.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósoknak, mert a $P(x)$ függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk a .

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

$$\text{A homogén egyenlet: } y' + ay = 0$$

$$\text{A homogén megoldás: } y_0 = Ce^{-ax}$$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvényről függ:

$$Q(x) = \text{másodfokú polinom: } y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$Q(x) = \text{harmadfokú polinom: } y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = Ae^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A\cos \alpha x + B\sin \alpha x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) partikuláris megoldásában szerepel $e^{\alpha x}$ és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet: $ar^2 + br + c = 0$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$$Q(x) = \text{polinom: } y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = A e^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)