



MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEK 3 DE tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 13.

Tartalomjegyzék

Valszám alapok, Kombinatorika.....	2
Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel.....	3
Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény.....	4
Várható érték és szórás.....	7
Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások.....	8
Markov és Csebisev egyenlőtlenségek.....	11
Kétváltozós eloszlások.....	12
Becslések.....	14
Hipotézisvizsgálat.....	20
Interpolációs polinomok.....	25
Sorok & hatványsorok & Taylor-sorok.....	26
Differenciálegyenletek.....	29
Differenciálegyenletek, izoklinák.....	33
Fourier sorok.....	34
Laplace transzformáció.....	35
Geometriai valószínűség, Binomiális tétel.....	37

Valszám alapok, Kombinatorika

Eseményeknek nevezzük a valószínűségi kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteket.

Megkülönböztetünk elemi eseményeket, ilyen például, hogy egy dobókockával 1-est dobunk. Vannak azonban olyan események is amik több elemi eseményből épülnek fel, ilyen például az, hogy párosat dobunk.

Az eseményeket az ABC nagybetűivel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az [esemény](#) valószínűségét úgy kaphatjuk meg, hogy megszámoljuk hány elemi eseményből áll és ezt elosztjuk az összes [elemi esemény](#) számával.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A és B eseményt egymástól függetlennek nevezzük, ha teljesül rájuk, hogy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A és B eseményt kizárónak nevezünk, ha

$$A \cap B = \emptyset$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A [esemény valószínűsége](#), ha tudjuk, hogy a B [esemény](#) biztosan bekövetkezik:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges [esemény](#), akkor

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_n)P(B_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Bayes tételt akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett (B_k) [esemény](#) valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett (A) tükrében.

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges [esemény](#), akkor bármely B_k eseményre

$$P(B_k | A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\dots+P(A|B_n)P(B_n)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Folytonosnak nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik folytonos mennyiségeket mérnek, ilyen például az idő, a távolság. Ebben az esetben az [eloszlás](#) függvény is mindig folytonos függvény lesz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Diszkrétnek nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik megszámlálhatóan sok értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy vagy véges sokat, vagy végtelent, de úgy, hogy fel tudjuk sorolni az értékeit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az X [valószínűségi változó](#) eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(X < x)$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) diszkrét és értékei $X = a$, $X = b$, $X = c$ meg ilyenek, akkor az [eloszlásfüggvény](#) mindig egy lépcsőzetes függvény, ami minden számnál pontosan akkorát ugrik, mint az adott szám valószínűsége, amíg el nem érjük az 1-et.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ P(X = a) & \text{ha } a < x \leq b \\ P(X = a) + P(X = b) & \text{ha } b < x \leq c \\ \dots \\ 1 \end{cases}$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) folytonos, akkor az a és b számok között bármilyen valós értéket fölvehet. Ilyenkor az [eloszlásfüggvény](#) is folytonos, ami a -ig nullát vesz föl, a és b közt növekszik és b után végig egyet vesz föl. Vagyis ahol az X [valószínűségi változó](#) működik, ott a függvény életre kel, előtte és utána pedig hibernált állapotban van.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sűrűségfüggvény](#) úgy működik, hogy a valószínűségeket a görbe alatti területek adják meg. Az [eloszlásfüggvény](#) jele $F(x)$ volt, a [sűrűségfüggvény](#) jele $f(x)$. Az $a < X < b$ valószínűség éppen a görbe alatti terület a -tól b -ig.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Ha az $X < a$ valószínűséget szeretnénk kiszámolni:

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Ha a $b < X$ valószínűséget:

$$P(b < X) = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

Ha ezt a három területet összeadjuk, akkor éppen a teljes görbe alatti területet kapjuk, ami a 100%-ot jelenti, így hát ez a terület éppen 1.

A [sűrűségfüggvény](#) tulajdonságai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

nem negatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

1. $\lim_{-\infty} F(x) = 0$

2. $\lim_{\infty} F(x) = 1$

3. monoton nő

4. balról folytonos

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

2. nem negatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(b < X) = 1 - F(b) = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az X [valószínűségi változó](#) $F(x)$ eloszlásfüggvényéből úgy kapjuk meg az $f(x)$ sűrűségfüggvényét, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt deriváljuk, azaz:

$$F'(x) = f(x)$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) $f(x)$ sűrűségi függvényét ismerjük, és meg akarjuk adni az $F(x)$ eloszlásfüggvényét, akkor azt pedig így tehetjük:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Várható érték és szórás

A [várható érték](#) jele $E(X)$.

Diszkrét esetben úgy kell kiszámolni, hogy

$$E(X) = \sum X_i P(X_i)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A szórás azt mutatja meg, hogy a [várható érték](#) körül milyen nagy ingadozásra számíthatunk.

Jele: $D(X)$

Kiszámításának módja diszkrét esetben:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

[Folytonos valószínűségi változók](#) esetén a [várható érték](#):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Folytonos [valószínűségi változó](#) esetén a szórást ugyanúgy kell számolni, mint diszkrét [valószínűségi változó](#) esetén:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások

A [hipergeometriai eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#).

Ismert, hogy mennyi az összes elem és az összes selejt, vagyis N , K és n .

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A [hipergeometriai eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = n \frac{K}{N}$$

A [hipergeometriai eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [binomiális eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#).

Csak valami %-os izé ismert, a [várható érték](#), az átlag, az arány, a valószínűség, továbbá X korlátos diszkrét [valószínűségi változó](#).

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

A [binomiális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = np$$

A [binomiális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [Poisson eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#), ahol előre ismert a [várható érték](#), és a [valószínűségi változó](#) nem korlátos, vagyis tetszőleges bármilyen nagy érték is lehet.

Például valamilyen anyagban a hibák száma, vagy egy adott idő alatt bekövetkező események száma. A [Poisson](#) eloszlásos feladatokban általában valamilyen százalék vagy arány vagy [várható érték](#) vagy átlag vagy valószínűség van megadva. Mondjuk egy könyvben az oldalak 80%-ában nincs hiba, vagy az 20 méter hosszú ruhaszövetek harmadában nincs hiba, vagy egy üzletben óránként várhatóan 13 vevő érkezik, vagy egy bankban percenként átlag 24 tranzakció történik, vagy 0,2 a valószínűsége, hogy 10 perc alatt nem érkezik segélyhívás. Ezek mind Poisson eloszlások, ahol az X nem korlátos diszkrét [valószínűségi változó](#).

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

A [Poisson eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \lambda$$

A [Poisson eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{\lambda}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [exponenciális eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Az [exponenciális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Az [exponenciális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [egyenletes eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq A \\ \frac{x-A}{B-A} & \text{ha } A < x \leq B \\ 1 & \text{ha } B < x \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & \text{ha } A < x \leq B \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Az [egyenletes eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \frac{A+B}{2}$$

Az [egyenletes eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \frac{B-A}{\sqrt{12}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [normális eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

A [normális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \mu$$

A [normális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sigma$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Markov és Csebisev egyenlőtlenségek

A Markov-egyenlőtlenség egy nagyon egyszerű dolgot állít. Az, hogy az X [valószínűségi változó](#) sokkal nagyobb legyen a várható értéknél nem túl valószínű:

$$P(X \geq t \cdot E(X)) \leq \frac{1}{t}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [Csebisev egyenlőtlenség](#) arról szól, hogy a várható értéktől való eltérés nem lehet túl nagy.

Ha ez az eltérés nagyobb, mint a szórás t -szerese, akkor ennek a valószínűsége kicsi:

$$P(|X - E(X)| \geq t \cdot D(X)) \leq \frac{1}{t^2}$$

Ha az eltérés kisebb, mint a szórás t -szerese, akkor ennek valószínűsége nagy:

$$P(|X - E(X)| < t \cdot D(X)) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy [esemény](#) bekövetkezésének elméleti valószínűsége p , akkor minél többször végezzük el a kísérletet, a relatív gyakoriság és az elméleti valószínűség eltérése annál kisebb lesz.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós eloszlások

X és Y együttes eloszlása egy táblázat, amelyben szerepel X és Y összes lehetséges értéke és a hozzájuk tartozó valószínűségek.

Ha a táblázat sorait összeadjuk, akkor Y peremeloszlását kapjuk. Ha az oszlopokat adjuk össze, akkor X peremeloszlását kapjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A **korreláció** X és Y valószínűségi változók közötti kapcsolatot írja le.

$$COV(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$$

$$R(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{D(X)D(Y)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

X és Y kétváltozós **eloszlás** esetén...

X peremeloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = P(X < x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

Y peremeloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az együttes **eloszlás** sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = F'$$

ahol

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

Az együttes **eloszlásfüggvény**.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

X perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

ahol

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du$$

az X perem-eloszlásfüggvénye.

Y perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

ahol

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv$$

az Y perem-eloszlásfüggvénye.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

X és Y kétváltozós [eloszlás](#) esetén...

X peremeloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = P(X < x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

Y peremeloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Becslések

Olyan esetekben, amikor valamiért nem tudjuk vagy nem akarjuk a teljes sokaságot megvizsgálni, hogy meghatározzuk a fontosabb statisztikai mutatóit, becslést alkalmazunk. A becslés lényege, hogy egy minta alapján próbálunk ezekre a mutatókra következtetni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A megbízhatósági szintet konfidencia szintnek nevezzük. A konfidencia szint szokásos jelölése $1 - \alpha$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $1 - \alpha$ megbízhatósági szinthez, vagy másként konfidencia szinthez tartozó konfidencia intervallumok azok az intervallumok, amik a sokasági átlagot $1 - \alpha$ valószínűséggel tartalmazzák.

A konfidencia intervallum végpontjai:

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ahol}$$

\bar{x} = a minta átlaga

n = a minta elemszáma

σ = a teljes [sokaság](#) szórása

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [standard normális eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó Z értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ahol}$$

\bar{x} = a minta átlaga

n = a minta elemszáma

σ = a teljes [sokaság](#) szórása

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [standard normális eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó Z értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A FAE minta azt jelenti, hogy a [mintavétel](#) során bármely mintaelemet azonos eséllyel választunk ki. Ilyen a visszatevéses [mintavétel](#), vagy pedig abban az esetben ha az alap [sokaság](#) elemszáma nagyon nagy, akkor a visszatevés nélküli [mintavétel](#) is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$s =$ a teljes [sokaság](#) szórása, a sokasági szórás nem ismert

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [t-eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [standard normális eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó Z értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(v)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(v)} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$s =$ a minta szórása, a sokasági szórás nem ismert

$\chi^2(v)$ pedig a khi-négyzet [eloszlás](#) megfelelő értéke

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az EV-minta abban különbözik a FAE-mintától, hogy a kiválasztott mintaelemek nem függetlenek egymástól.

Ez olyankor fordulhat elő, ha a teljes [sokaság](#) mérete viszonylag kicsi a minta elemszámához képest. EV-minták esetén tehát a minta fontos jellemzőjévé válik, hogy mekkora a teljes [sokaság](#), amelynek elemszámát N jelöli.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$N =$ a teljes [sokaság](#) elemszáma

$s =$ a minta szórása

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [t-eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\bar{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \text{ ahol}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

$\bar{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$N =$ a teljes [sokaság](#) elemszáma

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a [standard normális eloszlás](#) $1 - \frac{\alpha}{2}$ -höz tartozó Z értéke.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a teljes sokaságot felosztjuk viszonylag homogén rétegekre, és a mintát is ezen a rétegek szerint vizsgáljuk, a variancia csökkenthető.

$$\hat{\bar{x}}_R \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\hat{\bar{X}}_R}$$

$1 - \alpha =$ konfidencia szint

\bar{x} = a minta átlaga

n = a minta elemszáma

n_j = a minta j-edik rétegének elemszáma

N = a teljes [sokaság](#) elemszáma

N_j = a teljes [sokaság](#) j-edik rétegének elemszáma

W_j = a teljes [sokaság](#) j-edik rétegének a teljes sokasághoz viszonyított aránya

s_j = a minta j-edik rétegének szórása

$$\hat{\bar{X}}_R = \sum_{j=1}^M W_j \bar{x}_j$$

$$s_{\hat{\bar{X}}_R}^2 = \sum_{j=1}^M W_j^2 \frac{s_j^2}{n_j} \left(1 - \frac{n_j}{N_j}\right)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kétmintás becslésekre akkor van szükség, amikor két [sokaság](#) valamilyen paraméterét, leginkább az átlagát szeretnénk összehasonlítani.

A kétmintás [becslések](#) lehetnek független mintás [becslések](#) vagy páros mintás [becslések](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha mindkét [sokaság](#) közel normális eloszlású, akkor az [átlagok](#) különbségének becslésére ez a formula van forgalomban.

$$d \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_d \text{ ahol } d = \bar{x} - \bar{y}$$

$$s_d = s_c \cdot \sqrt{\frac{1}{n_Y} + \frac{1}{n_X}} \text{ itt } s_c^2 = \frac{(n_X-1)s_X^2 + (n_Y-1)s_Y^2}{n_X+n_Y-2}$$

$1 - \alpha$ = konfidencia szint

\bar{x} = az egyik minta átlaga

\bar{Y} = a másik minta átlaga

n_X = az egyik minta elemszáma

n_Y = a másik minta elemszáma

A szabadságfok $v = n_X + n_Y - 2$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy becslést torzítatlannak nevezünk, ha az egyes mintákból kapott [becslések](#) várható értéke megegyezik a becsléni kívánt mennyiséggel.

Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy a becslés során kapott értékek a becsléni kívánt érték körül ingadoznak, és ez az ingadozás szimmetrikus. A torzítatlan becsléseket mindig előnyben részesítjük a torzítottakkal szemben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kérdés az, hogy ha egy sokasági jellemzőre több becslés jöhet szóba, hogyan válasszunk közülük, vagyis mikor tekintünk egy becslést jónak, kettő közül melyiket tekintjük jobbnak és kijelenthetjük-e valamelyikről, hogy a legjobb?

Két alapvető szempont alapján szoktuk a becsléseket versenyeztetni. Az egyik, a már jól ismert torzítatlanság, vagyis a becslésnek az a tulajdonsága, hogy az összes lehetséges mintán vett [becslések](#) átlaga megegyezik a becsléni kívánt sokasági jellemzővel. A másik az úgynevezett minimális variancia kritérium.

A minimális variancia kritérium azt jelenti, hogy ha van két torzítatlan becslésünk, akkor a kettő közül azt tekintjük jobbnak, aminek az összes mintán vett értékeinek varianciája kisebb.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

Az első tag a varianciát, a második tag a várható értéktől való eltérést, vagyis a torzítottságot méri. Ha a becslés torzítatlan, $E(\hat{\theta}) = \theta$ így ez a második tag nulla. Két becslés közül azt részesítjük előnyben, amelyre MSE kisebb.

Az $E(\hat{\theta}) - \theta$ különbségre, vagyis a torzítás mértékére az angol bias szó alapján a $Bs(\hat{\theta})$ jelölés van forgalomban. Használatos tehát az

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) + Bs^2(\hat{\theta})$$

Képlet is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Eddigi vizsgálódásaink egyik legfontosabb eredménye a mintaátlagot eloszlásának jellemzése. Ha a teljes [sokaság](#) átlaga μ és szórása pedig σ , akkor az ebből vett n elemű minták átlagai olyan eloszlással helyezkednek el, aminek átlaga szintén μ , a szórása pedig $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ezt az utóbbit a minta standard hibájának szokás nevezni. A standard hiba tehát azt mondja meg, hogy a minta [átlagok](#) mekkora szórással ingadoznak a tényleges sokasági átlag körül.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mintavételi hibának azokat a hibákat nevezzük, amik kimondottan azért fordulnak elő, mert nem tudjuk, vagy nem akarjuk a teljes sokaságot vizsgálni. A mintavételi hiba tehát a [sokaság](#) eloszlásán és a mintavételi eljárásán kívül főleg a minta elemszáma határozza meg. Mivel pedig ezeket általában már a mintavételt megelőzően ismerjük, a mintavételi hibának megvan az a kellemes tulajdonsága, hogy legtöbbször előre megállapítható. Vagyis még el sem végeztük a mintavételt, de már tudjuk, hogy mekkora lesz a [mintavétel](#) során elkövetett hiba. Ez a kellemes tulajdonság lesz a kiindulópont a [becslések](#) és később a hipotézisvizsgálatok elméletének kiépítésében.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hipotézisvizsgálat

Az [elfogadási tartomány](#) az a tartomány, ahová ha a próba értéke kerül, akkor a nullhipotézist elfogadjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [kritikus tartomány](#) az a tartomány, ahová ha a próba értéke kerül, akkor a nullhipotézist elvetjük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [szignifikanciaszint](#) a hibás döntés valószínűsége.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

ELSŐ LÉPÉS: A HIPOTÉZIS MEGFOGALMAZÁSA

Minden [hipotézisvizsgálat](#) két egymásnak ellentmondó felvetés felírásával kezdődik. Az egyiket nullhipotézisnek nevezzük és H_0 -al jelöljük, a másikat pedig ellenhipotézisnek és jele H_1 .

MÁSODIK LÉPÉS: A PRÓBAFÜGGVÉNY KIVÁLASZTÁSA

A próbafüggvények kiválasztása magától a hipotézistől, illetve a [mintavétel](#) módjától is függ.

HARMADIK LÉPÉS: [SZIGNIFIKANCIASZINT](#) ÉS [KRITIKUS TARTOMÁNY](#)

Ha a próbafüggvény értéke az elfogadási tartományba fog esni, akkor ezt a tényt a nullhipotézist igazoló jelnek fogjuk tekinteni. Hogyha pedig a kritikus tartományba, akkor a nullhipotézist elvetjük.

NEGYEDIK LÉPÉS: [MINTAVÉTEL](#) ÉS DÖNTÉS

Ha a mintavétellel kapott eredményünk szerint a próbafüggvény az elfogadási tartományba esik, akkor a H_0 nullhipotézist tekintjük igaznak, a H_1 ellenhipotézist pedig elvetjük.

Ha viszont a próbafüggvény a minta alapján a kritikus tartományba esik, akkor a H_0 nullhipotézist vetjük el és a H_1 ellenhipotézist tekintjük igaznak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) normális eloszlású, szórása σ , H_0 a [sokaság](#) átlagára vonatkozik, a minta elemszáma n .

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) normális eloszlású, szórása nem ismert, H_0 a [sokaság](#) átlagára vonatkozik, a minta elemszáma n .

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) tetszőleges eloszlású, szórása nem ismert, H_0 a [sokaság](#) átlagára vonatkozik, a minta n elemű, elemszáma nagy.

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) tetszőleges eloszlású, H_0 a sokasági arányra vonatkozik, a minta n elemű, elemszáma nagy.

$$Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) normális eloszlású, H_0 a sokasági szórásra vonatkozik, a minta n elemű.

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sokaság](#) eloszlására irányuló vizsgálat.

H_0 : mindegyik osztályköz valószínűsége egy adott eloszlásnak megfelelő érték, vagyis minden i -re az i -edik osztályköz valószínűsége a P_i érték.

Az ellenhipotézis pedig, H_1 : van olyan osztályköz, ami nem az adott eloszlásnak megfelelő P_i érték. A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. A minta elemszáma n .

$$\chi^2(v) = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$$

ahol a v szabadságfok: $v = k - b - 1$.

Itt k = az osztályközök száma és b = az adott [eloszlás](#) azon paramétereinek száma, amit a mintából becsléssel határozzunk meg.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sokaságon belül két [ismérv](#) függetlenségére irányuló vizsgálat. H_0 : a két [ismérv](#) független, az ellenhipotézis pedig, H_1 : a két [ismérv](#) közti kapcsolat sztochasztikus vagy függvényszerű.

A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. A minta elemszáma n , a minta alapján készített [kontingencia tábla](#) sorainak száma r , oszlopainak száma c .

$$\chi^2(v) = \sum \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}$$

ahol a v szabadságfok $v = (r - 1)(c - 1)$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két sokaságban valamely változó eloszlásának egyezőségére irányuló vizsgálat. H_0 : a két sokaságban az [eloszlás](#) egyező, az ellenhipotézis pedig, H_1 : a két [eloszlás](#) nem egyező.

A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. Mintát ezúttal mindkét sokaságból veszünk, az X sokaságból vett minta elemszáma n_X az Y sokaságból vett mintáé n_Y mindkét mintában az osztályközök száma k .

$$\chi^2(v) = n_X \cdot n_Y \cdot \sum_{i=1}^k \left(\frac{n_{Xi} + n_{Yi}}{n_X + n_Y} - \frac{n_{Xi}}{n_X} \cdot \frac{n_{Yi}}{n_Y} \right)^2$$

ahol a v szabadságfok $v = k - 1$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mindkét [sokaság](#) normális eloszlású, szórásaik σ_X és σ_Y .

$$Z = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n_Y} + \frac{\sigma_X^2}{n_X}}}$$

A nullhipotézis: $H_0: \mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték. A minták elemszáma n_X és n_Y .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A két [sokaság](#) normális eloszlású és szórásaik egyformák.

$$t(v) = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - \delta_0}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_Y} + \frac{1}{n_X}}}$$

$$\text{itt } s^2 = \frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

A nullhipotézis $H_0: \mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték.

A minták elemszáma n_X és n_Y , szórása s_X és s_Y , a szabadságfok $v = n_Y + n_X - 2$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A két [sokaság](#) eloszlása és szórása nem ismert, mindkettő szórása véges, és mindkét minta elemszáma elég nagy.

$$Z = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{s_Y^2}{n_Y} + \frac{s_X^2}{n_X}}}$$

A nullhipotézis $H_0: \mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol δ tetszőleges, de előre megadott érték.

A minták elemszáma n_X és n_Y , szórása s_X és s_Y .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [sokaság](#) szórásának összehasonlítására irányuló próba, ha mindkét [sokaság](#) normális eloszlású. A nullhipotézis

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad F_{1-p}(v_1; v_2) = \frac{1}{F_p(v_2; v_1)}$$

Az F-[eloszlás](#) két szabadságfoka

$$v_1 = n_1 - 1 \text{ és } v_2 = n_2 - 1$$

$$\text{Bal oldali kritikus érték: } \frac{1}{F_{1-\alpha}(v_2; v_1)}$$

$$\text{Jobb oldali kritikus érték: } F_{1-\alpha}(v_1; v_2)$$

Kétoldali kritikus érték:

$$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_2; v_1)} \text{ és } F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1; v_2)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Több [sokaság](#) várható értékének összehasonlítására vonatkozó próba, ha mindegyik [sokaság](#) normális eloszlású és azonos szórású.

A H_0 nullhipotézis: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_M = \mu$, vagyis az, hogy a várható értékek az összes sokaságra (M db) megegyeznek, míg az ellenhipotézis az, hogy van olyan μ_j amire $\mu_j \neq \mu$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Bartlett-próba több [sokaság](#) szórásának összehasonlítására vonatkozó próba, ha mindegyik [sokaság](#) normális eloszlású.

A H_0 nullhipotézis: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_M = \sigma$, vagyis az, hogy az összes [sokaság](#) (M db.) szórása megegyezik, míg az ellenhipotézis az, hogy van olyan σ_j , amire $\sigma_j \neq \sigma$.

$$SSB = \sum_{j=1}^M (n_j - 1) s_j^2 \quad s_b = \frac{SSB}{n-M}$$

A próbafüggvény

$$B^2 = \frac{1}{c} \left(v \cdot \ln s_b^2 - \sum_{j=1}^M v_j \ln s_j^2 \right)$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(M-1)} \left(\sum_{j=1}^M \frac{1}{v_j} - \frac{1}{v} \right)$$

Jobb oldali kritikus érték: $\chi_{1-\alpha}^2(M-1)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Interpolációs polinomok

Az interpoláció egy közelítő módszer, amely a függvény ismert értékei alapján ad közelítést a nem ismert értékeire.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Lagrange-féle interpolációs polinom megadja azt a polinomot, amely x_1 -ben y_1 -et, x_2 -ben y_2 -t és így tovább x_n -ben y_n értéket vesz föl. Általánosan így tudjuk legyártani:

$$P(x) = \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} \cdot y_j$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Newton interpoláció első lépése, hogy elkészítjük a Newton-együtthatókat:

$$N_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad N_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad N_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

$$N_4 = \frac{N_2 - N_1}{x_3 - x_1} \quad N_5 = \frac{N_3 - N_2}{x_4 - x_2}$$

$$N_6 = \frac{N_5 - N_4}{x_4 - x_1}$$

A polinomot pedig így kapjuk meg:

$$P(x) = y_1 + N_1(x - x_1) + N_4(x - x_1)(x - x_2) + N_6(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Hermite interpoláció abban különbözik a Lagrange és Newton féle interpolációtól, hogy az x_1, x_2, \dots, x_n helyeken nem csak az eredeti polinom-függvény értékeit, hanem a deriváltjait is nézzük.

A keresett polinomfüggvény mindig egyel kisebbfokú lesz, mint az interpolációs pontok száma k és a következő alakban keressük:

$$f(x) = a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \dots + a_1x + a_0$$

A polinom együtthatóit úgy kapjuk meg, hogy az ismert adatokat behelyettesítjük és egy egyenletrendszert alkotunk belőle, amit pl. Gauss eliminációval megoldhatunk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az f függvény $n + 1$ -szer deriválható az x_1, x_2, \dots, x_n és x által kifeszített I intervallumon, akkor az interpoláció hibája:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad \xi_x \in I$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Sorok & hatványsorok & Taylor-sorok

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$$

Ha $|q| < 1$ akkor a mértani sor konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

Ha $|q| \geq 1$ akkor a sor divergens.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszezsorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \rightarrow 0$ monoton csökkenő sorozat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor nem tudunk semmit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ akkor nem tudunk semmit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $a_n \rightarrow 0$ pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$$\sum (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól $a_n \leq b_n$ akkor

$$\sum b_n \text{ konvergens} \Rightarrow \sum a_n \text{ is konvergens}$$

$$\sum a_n \text{ divergens} \Rightarrow \sum b_n \text{ is divergens}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha x_0 a [hatványsor](#) középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol r a konvergenciasugár.

A [konvergencia tartomány](#) belső pontjaiban a [hatványsor](#) abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha x_0 a [hatványsor](#) középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A [konvergencia tartomány](#) belső pontjaiban a [hatványsor](#) abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen $f(x)$ k -szor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt k -adfokú Taylor polinomja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen $f(x)$ akárhányszor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt Taylor sora:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az e^x , $\ln x$, $\sin x$ és $\cos x$ függvények Taylor sorai:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $f(x)$ egymás után k -szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon, és $k+1$ -edszer differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$ amire

$$f(b) = T(b) + R(b) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a végtelen sorokat, amelyek így néznek ki, hatványsornak nevezzük:

$$\sum a_n (x-x_0)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Differenciálegyenletek

A [differenciálegyenletek](#) olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [szeparábilis differenciálegyenlet](#) így néz ki:

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az y' -t lecseréljük arra, hogy $\frac{dy}{dx}$.

Aztán jön a szétválasztás: minden y -os dolgot a dy -os oldalra viszünk és minden x -eset a dx -es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [differenciálegyenlet](#) homogén fokszámú, ha $y = ux$ helyettesítés után minden x -es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú [differenciálegyenletek](#) megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az $y(x) = xu(x)$ (röviden $y = xu$) helyettesítést, ekkor $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol y helyett most u -ra hajtunk. És amikor u már megvan, visszacsináljuk y -ra.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ [differenciálegyenlet](#) akkor egzakt, ha $p'_y(x, y) = q'_x(x, y)$, röviden $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$.

Az egzakt egyenletek megoldása $F(x, y) = C$, ahol $F'_x(x, y) = p(x, y)$ és $F'_y(x, y) = q(x, y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a [differenciálegyenlet](#) nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p} \quad \text{és} \quad \frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$$

Ha ezek közül az első csak y -t tartalmaz, vagy a második csak x -et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$$u = e^{-\int f(y) dy} \quad \text{vagy} \quad u = e^{\int g(x) dx}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű lineáris [differenciálegyenlet](#) általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy y' , és van benne egy elsőfokú y .

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy $v(x)$ függvényt:

$$v = e^{\int P(x) dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet $v(x)$ -el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)' dx = \int vQ(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x) dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy $C(x)$ függvény. És ezt a $C(x)$ függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x) dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban $C(x)$ helyére beírjuk, ami kijött.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósoknak, mert a $P(x)$ függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk a .

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

A homogén egyenlet: $y' + ay = 0$

A homogén megoldás: $y_0 = Ce^{-ax}$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvényről függ:

$$Q(x) = \text{másodfokú polinom: } y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$Q(x) = \text{harmadfokú polinom: } y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = Ae^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) partikuláris megoldásában szerepel $e^{\alpha x}$ és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet: $ar^2 + br + c = 0$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$$Q(x) = \text{polinom: } y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = A e^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Differenciálegyenletek, izoklinák

Azon pontok halmazát, melyekben a megoldásfüggvények meredeksége egy adott számmal egyenlő, a [differenciálegyenlet](#) izoklinájának nevezzük.

Az $y' = f(x, y(x))$ izoklináinak egyenlete:

$$f(x, y(x)) = K$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Fourier sorok

A [Fourier sor](#) a 2π szerint periodikus függvények egy speciális függvénysora:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ahol az úgynevezett Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Laplace transzformáció

Az $f(x)$ függvény Laplace transzformáltja a következő integrálás:

$$f(x) \rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Néhány függvény Laplace transzformáltja:

$$f(x) = C \rightarrow F(s) = \frac{C}{s}$$

$$f(x) = x^n \rightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f(x) = e^{ax} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(x) = \sin(ax) \rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$f(x) = \cos(ax) \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$f(x) = x^n e^{ax} \rightarrow F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$f(x) = e^{ax} \sin(bx) \rightarrow F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$f(x) = e^{ax} \cos(bx) \rightarrow F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$f(x) = x \sin(ax) \rightarrow F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$f(x) = x \cos(ax) \rightarrow F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Néhány függvény inverz Laplace transzformáltja:

$$F(s) = \frac{C}{s} \rightarrow f(x) = C$$

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \rightarrow f(x) = x^n$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \rightarrow f(x) = e^{ax}$$

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \rightarrow f(x) = \sin(ax)$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \rightarrow f(x) = \cos(ax)$$

$$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \rightarrow f(x) = x^n e^{ax}$$

$$F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \rightarrow f(x) = e^{ax} \sin(bx)$$

$$F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \rightarrow f(x) = e^{ax} \cos(bx)$$

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \rightarrow f(x) = x \sin(ax)$$

$$F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \rightarrow f(x) = x \cos(ax)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Geometriai valószínűség, Binomiális tétel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

[Binomiális tétel:](#)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)
