MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEMATIKAI ALAPISMERETEK tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 09.

Tartalomjegyzék

Vektorok bevezetése

A vektor egy irányított szakasz.

Jelölése: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektoriális szorzat, sík egyenlete, egyenes egyenletrendszere

A normálvektor az egyenesre merőleges nem nullvektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az irányvektor az egyenessel párhuzamos nem nullvektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{n}(A, B)$ normálvektorú és a $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő e egyenes egyenlete:

$$e : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szögfüggvények, trigonometrikus azonosságok

Azt a kört a koordinátarendszerben, aminek középpontja az origo és a sugara 1, egységkörnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$

$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad -\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának x koordinátáját nevezzük az α szög koszinuszának, és így jelöljük: $\cos \alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának y koordinátáját nevezzük az α szög szinuszának, és így jelöljük: $\sin \alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy α szög tangense az α szög szinuszának és koszinuszának hányadosával egyenlő:

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad k \in Z$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények periodikusak, ez azt jelenti, hogy bizonyos időközönként megismétlik önmagukat. Ezt az időközt periódusnak nevezzük és az ő esetükben a periódus 2π.

Ha van egy ilyen egyenlet, hogy

$\sin x = \frac{1}{2}$

akkor ennek a periodikussága miatt végtelen sok megoldása van, ezért írjuk oda a megoldások mögé, hogy$+2k\pi$.

További nehézség, hogy két megoldás is van, az egyiket a számológépünk adja, a másikat pedig...

Szinusz esetén úgy, hogy a két megoldás összegénekπ-nek kell lennie.

Koszinusz esetén pedig úgy, hogy a két megoldás mindig egymás minuszegyszerese.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus függvényeknek vagy szögfüggvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek tartalmaznak trigonometrikus kifejezéseket, mint például szinusz, koszinusz vagy tangens. Ezek eredetileg egy derékszögű háromszög egy szöge és két oldala hányadosa közti összefüggéseket írja le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Algebra, betűs kifejezések használata

Ha több művelet szerepel egymás után, akkor ezeket a műveleti sorrend szerint kell elvégeznünk.

A műveleti sorrendben az első mindig a zárójel, vagyis a zárójelben szereplő műveleteket kell elsőként elvégezni.
A második a szorzás és az osztás. Ha több szorzás és osztás van, akkor balról jobbra kell őket elvégezni.
Végül az utolsó szint az összeadás és kivonás, és itt is ha több is van belőlük, akkor balról jobbra kell elvégezni.

A hatványozás még egy kicsit bezavarhat a dologba, így érdemes megnézni külön a hatványozásról és a hatványazonosságokról szóló epizódokat is.

Most pedig nézzünk egy példát a műveleti sorrendre:

Pl.: $3 \cdot (5-3)+2:2=3 \cdot 2+2:2=6+1=7$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az együttható a betűs kifejezés előtt álló szám.

Pl.: $3x$ kifejezés együtthatója 3.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az algebrai kifejezésekben a betűket változóknak nevezzük.

Pl.: $2x+y$ algebrai kifejezésben x és y változók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A betűs kifejezéseket nevezzük algebrai kifejezéseknek.

Pl.: $2x+y$ egy algebrai kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az önmagában álló számokat nevezzük konstansnak.

Pl. $2x+y+5$ kifejezésben az 5 konstans.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egynemű kifejezések azok a betűs kifejezések, amik csak az együtthatójukban különböznek.

pl.: $5x$ és $3x$ egynemű kifejezések, mert csak az együtthatóik (5 és 3) különböznek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egynemű kifejezések mindig összevonhatóak. Az összevont kifejezés együtthatója az eredeti együtthatók összege lesz.

Pl.: $3x+5x+2x=(3+5+2)x=10x$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Zárójel felbontásakor minden tagot minden taggal szorozni kell.

Pl.: $5\cdot(4x+6)=5\cdot 4x+5\cdot 6=20x+30$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kiemelés a zárójelfelbontás megfordítása.

A dolog úgy indul, hogy találnunk kell egy közös részt, amit kiemelhetünk.

A kiemelés során egy többtagú kifejezést egy vagy többtagú kifejezések szorzatává alakítjuk át úgy, hogy minden tagból kiemeljük a közös részeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A törtek egyszerűsítése azt jelenti, hogy a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nem nulla számmal osztjuk. Ha nincs olyan szám, amivel mind a számláló és a nevező is osztható lenne, akkor már nem egyszerűsíthető tovább a tört.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Algebrai törteknek nevezzük azokat a törteket, melyek nevezőjében betűs kifejezés van.

Tehát ha csak a tört számlálójában van betűs kifejezés (pl.x), de a nevezőjében nem, akkor az még nem algebrai tört.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Zárójel felbontásakor minden tagot minden taggal szorozni kell.

Ha a szorzás mindkét tényezője többtagú, akkor az első tényező első tagjával szorozzuk végig a másik tényező tagjait, majd pedig folytatjuk az első tényező második tagjával.

Pl.: $(a+b)\cdot(c-5)=a\cdot c-5\cdot a+b\cdot c-5\cdot b$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítési érték azt jelenti, hogy a betűs kifejezés helyére írjuk be a behelyettesítendő értéket.

Pl.: $2x+5$ kifejezés helyettesítési értéke $x=3$-ban: $2\cdot 3+5=6+5=11$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

Egy szám abszolútértékén a nullától való távolságát értjük.

Precizebben egy x szám abszolútértékén ezt értjük:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ ha } 0 \leq x \\ -x \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatványozás, hatványazonosságok, normálalak

A hatványozás a szám önmagával vett szorzatait rövidíti.

Pl.: $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Itt a 6-ot a hatvány alapjának nevezzük, a 3-at kitevőnek, az eredményt pedig a hatvány értékének.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha azonos alapú hatványokat szorzunk, akkor a kitevők összeadódnak.

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha azonos alapú hatványokat osztunk, akkor a kitevők kivonódnak.

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatvány hatványa a kitevők szorzata.

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden nem nulla szám nulladik hatványa 1.

$a^0 = 1$, ha $a \neq 0$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy nem nulla szám negatív egész kitevőjű hatványát úgy számolhatjuk ki, hogy a reciprokát a kitevő ellentettjére emeljük.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szorzat mindkét tényezője ugyanarra a hatványra van emelve, akkor a hatványt leírhatjuk csak egyszer zárójellel.

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Ez az azonosság visszafele irányba hasznosabb, ha egy zárójeles szorzat hatványozva van, akkor azt szét lehet szedni és mindkét tényezőt hatványozni kell.

Pl.: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy törtnek a számlálója és nevezője is ugyanarra a hatványra van emelve, akkor a hatványt leírhatjuk csak egyszer zárójellel.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Ez az azonosság visszafele irányba hasznosabb, ha egy zárójeles tört hatványozva van, akkor azt szét lehet szedni és a számlálót és nevezőt is hatványozni kell.

Pl.: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A túl nagy vagy éppen túl pici számok leírására találták ki a normálalakot.

A normálalak mindig egy szorzat, az első tényezője egy abszolútértékben 1-nél nagyobb vagy egyenlő, 10-nél kisebb szám. A másik tényezője pedig egy 10 hatvány.

Pl.: $35000 = 3,5 \cdot 10^4$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gyökös azonosságok és gyökös egyenletek

Egy a nem negatív szám négyzetgyöke az a nem negatív szám, aminek a négyzete a.

$$a \geq 0 \qquad \sqrt{a} \geq 0 \qquad \sqrt{a}^2 = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0,\ b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy a szám köbgyöke az a szám, aminek a köbe a.

$$a \in R \qquad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \in R,\ b \in R$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad a \in R,\ b \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökvonás másképpp viselkedik páros, illetve páratlan gyökkitevő esetén, így kétféle definíciónk lesz.

Egy a nem negatív szám $n = 2k$-adik gyöke az a nem negatív szám, amire:

$$\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$$

Egy tetszőleges a szám $n = 2k + 1$-edik gyöke az a szám, amire:

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökös egyenletek megoldását mindig ezzel kell kezdeni:

$$\sqrt{\text{IZÉ}} \Rightarrow \text{IZÉ} \geq 0$$

$$\sqrt{\text{IZÉ}} = \text{VALAMI} \Rightarrow \text{VALAMI} \geq 0$$

Ezt követően az elsőszámú célunk, hogy megszabaduljunk a gyökjeltől, amit négyzetreemeléssel végezhetünk. Ilyenkor az a lehető legjobb, ha a gyökös izé magányosan álldogál.

Ha megszabadultunk a gyökjeltől, minden úgy megy tovább, ahogy azt már megszokhattuk az egyenleteknél.

A végén viszont fontos, hogy ellenőriznünk kell, a megoldásunk megfelel-e a feladat elején felírt kritériumnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Logaritmus, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

$log_a x$ azt mondja meg, hogy a-t hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy x-et kapjunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x^k} = \frac{k}{n} \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logaritmikus egyenletek megoldásának lényege, hogy ilyen alakra jussunk:

$$log_a x = b$$

Mert innen a logaritmus definíciója miatt az következik, hogy

$$x = a^b$$

Ahhoz, hogy a bonyolúltabb egyenleteket is ilyen alakra hozzuk, a logaritmus azonosságait használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek

Hatványozás azonosságai:

$a^n a^k = a^{n+k}$

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(a^n)^k = a^{nk} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális függvénynek nevezzük az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket, ahol $a > 0$ valós szám.

Az exponenciális függvények meglehetősen fontosak a matematikában, sőt nem csak a matematikában.

Ilyen függvények írják le a baktériumok szaporodását, a radioaktív elemek bomlását, a számítógépek teljesítményének növekedését és még rengeteg más dolgot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális egyenletek megoldásának kulcsa, hogy a két oldalt azonos hatványalapra hozzuk, mert ekkor

$a^x = a^b \Rightarrow x = b$

Így hát az egyenlet két oldalát addig alakítgatjuk a hatványozás azonosságainak segítségével, amíg erre az alakra nem jutunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenlőtlenséget ugyanúgy kell mint az egyenletet, amire figyelni kell csupán az az, hogy amikor elhagyjuk a hatványalapot, nem mindegy, hogy az 1-nél nagyobb, vagy kisebb szám-e.

Ha az alap 1-nél nagyobb szám, akkor nem történik semmi, az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megmarad.

Ha viszont az alap 1-nél kisebb szám, akkor az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Komplex számok

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

A két komplex szám összege:
$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

A két komplex szám különbsége:
$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

A két komplex szám szorzata:
$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c)i$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A komplex számok egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tegelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. Az imaginárius tengely egysége az i, ami olyan, mint a valós tengelyen az 1, csak éppen egy meglehetősen furcsa dolgot tud. Az imaginárius egység egy olyan komplex szám, aminek a négyzete -1 és i-vel jelöljük, azaz

$i^2 = -1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A komplex számokat azért hívjuk "komplex"nek, mert két részből tevődnek össze. Egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tegelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. A komplex számok egy valós számból és egy imaginárius számból tevődnek össze:

$z = a + bi$

Itt a és b valós számok, az i pedig az imaginárius egység, ami azt tudja, hogy $i^2 = -1$.

Magukat a valós számokat és az imaginárius számokat is komplex számnak tekinthetjük. A valós számok olyan komplex számok, amelyeknek az imaginárius része nulla, míg az imaginárius számok olyankomplex számok, amelyeknek a valós része nulla. A komplex számok egy síkon, az úgynevezett komplex számsíkon helyezkednek el. Kicsit olyanok, mint a koordinátageometriában a kétdimenziós sík vektorai, ahol az i és j bázisvektorkat szokás használni, az x tengelynél az i és az y tengelynél a j vektorral. Ennek az analógiának köszönhetően vannak, akik az imaginárius számokat nem is i-vel, hanem j-vel jelölik. Bár ez segítheti erősíteni az analógiát a sík vektoraival, de mégis zavaró, mivel aki komolyabban is fogalakozik a komplex számokkal, a hivatalos jelöléssel fog találkozni, ahol az imaginárius tengelyen i-k vannak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A valós számokat úgy érdemes elképzelni, mint egy koordinátarendszer x tengelyét. És minden helyet ki is töltenek a valós számok ezen a számegyenesen. A komplex számok egy valós és egy imaginárius (képzetes) részből épülnek föl, és szemléltetésükhöz nem egy, hanem két koordinátatengelyre van szükség. Az x tengelyen vannak a valós számok, az y tengelyen pedig az imaginárius, vagyis a képzetes számok. A valós számok tengelyén az egység a szokásos 1, míg az imaginárius számok tengelyén az egység az i. A kétb tengely által kifeszített síkot nevezzük komplex számsíknak, vagy másknt Gauss-féle számsíknak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám:

$$z = a + bi$$

Komplex számoknak van ilyenje, hogy imaginárius egység:

$$i^2 = -1$$

Komplex számok konjugáltja:

$$\overline{z} = a - bi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám: $z = a + bi$

Ennek a komplex számnak az abszolútértéke:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, ahol

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám trigonometrikus alakban: $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$

Komplex számok szorzása trigonometrikus alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right)$$

Komplex számok osztása trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban: $r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik hatványa:

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban: $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám exponenciális alakban: $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$

Komplex számok szorzása exponenciális alakban:

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Komplex számok osztása exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban: $z = re^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik hatványa:

$$z^n = r^ne^{ni\theta}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban: $z = re^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Halmazok

Vannak az A és B halmazok.

Az A és B halmazok uniója: Azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.

Jele: $A \cup B$

Az A és B halmazok metszete: Azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jele: $A \cap B$

Az A és B halmazok különbsége: Azon elemek halmaza, amelyek az A halmazba benne vannak, de a B halmazba nem.

Jele: $A \setminus B$

Az A halmaz komplementere a H alaphalmazon nézve: Az alaphalmaz azon elemeinek halmza, amelyek nincsenek benne az A-ban.

Jele: $\overline{A}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logikai szita formula két halmazra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A logikai szita formula három halmazra:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az első De Morgan azonosság azt mondja, hogy a metszet komplementere pont megegyezik a komplementrek uniójával:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A második De Morgan azonosság pedig azt mondja, hogy az unió komplementere éppen megegyezik a komplementerek metszetével:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát hatványhalmaznak nevezzük.

Pl.: az $A = \{x, y, z\}$ halmaz hatványhalmaza:
$P(A) = \{\emptyset. \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B halmazok Descartes-szorzata úgy működik, hogy elkészítjük az összes lehetséges rendezett párt, aminek az első elemét A-ból, a második elemét pedig B-ből vesszük, és ezeket a rendezett párokat betesszük egy halmazba, amit az A és B halmazok Descartes-szorzatának hívunk.

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f halmazt függvénynek nevezzük, ha minden eleme rendezett pár, és ha $\langle x_1, y_1 \rangle \in f$ és $\langle x_1, y_2 \rangle \in f$ akkor szükségképpen $y_1 = y_2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Adott az A és B nem üres halmaz.

Ha az A halmaz bizonyos elemeihez egyértelműen hozzárendeljük a B halmaz bizonyos elemeit, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értelmezési tartománya azoknak az elemeknek a halmaza az A halmazban, amikhez a függvény hozzárendel B halmazbeli elemeket.

Az értelmezési tartományt az angol domain szó alapján, ami egyébként azt jelenti, hogy tartomány, így jelöljük: D_f.

De a gyengébb idegzetűek kedvéért szokás úgy is jelölni, hogy É.T.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f:\ x \mapsto y$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ha $x_1 \neq x_2$ akkor $y_1 \neq y_2$. Vagyis különböző x-ekhez mindig különböző y-okat rendel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a pontokat, ahol a függvény grafikonja az x tengelyt metszi, zérushelynek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden$x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden$x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú függvények

A lineáris függvény képlete:

$y = m \cdot x + b$ vagy $x \mapsto m \cdot x + b$ vagy $f(x) = m \cdot x + b$

Az egyik dolog, amit érdemes tudni róla, hogy milyen meredeken megy.

Ezt meredekségnek hívjuk, és így jön ki:

$$m = \frac{\text{amennyit fölfelemegy}}{\text{amennyit előremegy}}$$

A másik dolog, amit érdemes tudni, hogy hol metszi a függvény grafikonja az y tengelyt.

Ezt úgy hívjuk ,hogy tengelymetszet, és a jele b a képletéből.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények ábrázolása

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összetett függvény és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönesen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenletrendszerek

A behelyettesítő módszer az egyenletrendszerek megoldásának egyik technikája.

Lényege, hogy kiválasztjuk az egyik egyenletet, ahonnét az egyik változót kifejezzük a másikkal. Ilyenkor célszerű a számunkra szimpatikusabb, egyszerűbb egyenletet választani.

Ezt követően az így kapott kifejezést behelyettesítjük a másik, fel nem használt egyenletbe, így egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenlő együtthatók módszere egy megoldási technika az egyenletrendszerekhez.

Lényege, hogy ha a két egyenletben vagy az x vagy az y együtthatói megegyeznek, akkor a két egyenletet egymásból kivonva azok kiesnek, és egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.

Ha az együtthatók egymás ellentettjei lennének, akkor pedig össze kell adni a két egyenletet.

A módszer akkor is működik, ha nem volnának egyenlő együtthatók, ilyenkor bátran szorozhatjuk az egyenleteket addig, amíg nem lesznek egyenlő együtthatók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenséget ugyanúgy kell megoldani, mint egyenletet. Amire figyelnünk kell, hogy ha negatív számmal szorzunk, az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyik megoldás az, hogy szorzattá alakítjuk, aztán pedig számegyenesen ábrázoljuk a tényezők előjelét.

A második megoldás, hogy ábrázoljuk vázlatosan a másodfokú függvényt, amit az egyenlőtlenségből alkotunk, majd leolvassuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú egyenletek

A mérleg elv lényege, hogy amikor megoldunk egy egyenletet, az egyenlőségjel mindkét oldalán ugyanazokat a műveleteket kell elvégeznünk. Az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadhatjuk, vagy az egyenlet mindkét oldalából ugyanazt a számot kivonhatjuk. És az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nem nulla számmal megszorozhatjuk, vagy mindkét oldalt ugyanazzal a nem nulla számmal eloszthatjuk. Vagyis:

- ha elveszünk egy számot az egyik oldalról, akkor a másik oldalról is el kell venni

- ha hozzáadunk egy számot az egyik oldalhoz, akkor a másik oldalhoz is hozzá kell adni

-ha szorozzuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is szorozni kell ugyanezzel a számmal

-ha osztjuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is osztani kell ugyanezzel a számmal

Az összeadás, kivonás és szorzás egymásutáni lépéseivel jutunk el a megoldáshoz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A megoldás lényege, hogy gyűjtsük össze az x-eket az egyik oldalon, a másik oldalon pedig a számokat, a végén pedig leosztunk az x együtthatójával.

Ha törtet is látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha törtet látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Figyeljünk rá, hogy ilyenkor az egyenlet minden tagját meg kell szorozni (a tagokat $+$, $-$ vagy $=$ jelek választják el egymástól...).

Miután megszabadultunk a törtektől az egyenlet megoldásának lépései a szokásosak a mérleg elv segítségével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés

Egy a nem negatív szám négyzetgyöke az a nem negatív szám, aminek a négyzete a.

$$a \geq 0 \qquad \sqrt{a} \geq 0 \qquad \sqrt{a}^2 = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0,\ b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy a szám köbgyöke az a szám, aminek a köbe a.

$$a \in R \qquad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \in R,\ b \in R$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad a \in R,\ b \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökvonás másképpp viselkedik páros, illetve páratlan gyökkitevő esetén, így kétféle definíciónk lesz.

Egy a nem negatív szám $n = 2k$-adik gyöke az a nem negatív szám, amire:

$$\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$$

Egy tetszőleges a szám $n = 2k + 1$-edik gyöke az a szám, amire:

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Másodfokú egyenletek

Ha a másodfokú egyenlet így néz ki:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Akkor a megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodfokú egyenlet megoldóképletének gyök alatti részét nevezzük diszkriminánsnak.

$$D = b^2 - 4ac$$

Ez dönti el, hogy a másodfokú egyenletnek hány valós megoldása lesz.

Ha a diszkrimináns nulla, akkor csak egy.

Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek két valós megoldása van.

Ha pedig negatív, akkor az egyenletnek nincs valós megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Viète-formulák nem valami titkós gyógyszer hatóanyag, hanem a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket írja le:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Olyankor, amikor a másodfokú tag együtthatója 1, a Viète-formulák is egyszerűbbek:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 x_2 = q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nevezetes azonosságok, binomiális tétel

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \quad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \quad \log(\text{ez itt} > 0) \quad \text{tört nevező} \neq 0$

pl.

$\frac{2}{x-3}$ értelmezési tartománya $x \in R \setminus \{3\}$, mert tört van benne és a tört nevezője nem lehet nulla ($x \neq 3$)

$\sqrt{2x+5}$ értelmezési tartománya $x \in \left[-\frac{5}{2}, \infty\right[$, mert páros gyök alatt van (második) és így a gyök alatti kifejezés ≥ 0

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Binomiális tétel:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Parabola

A parabola azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy v egyenestől (vezéregyenes) és az egyenesre nem illeszkedő F ponttól (fókuszpont) egyenlő távolságra vannak.

A fókusz és a vezéregyenes távolságát hívjuk a parabola paraméterének.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parabola azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy v egyenestől (vezéregyenes) és az egyenesre nem illeszkedő F ponttól (fókuszpont) egyenlő távolságra vannak. A fókusz és a vezéregyenes távolságát hívjuk a parabola paraméterének. A fókuszbúl a vezéregyenesre bocsátott merőleges felezőpontja a parabola "csúcspontja" amit tegelypontnak szokás nevezni.

A $T(u,v)$ tengelypontú és p paraméterű parabola egyenlete:

$$y=\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parabola egyenlete, ha p a paramétere...

és tengelye az y tengely:

$$y=\frac{1}{2p}x^2 \qquad y=-\frac{1}{2p}x^2$$

és tengelye az x tengely:

$$x=\frac{1}{2p}y^2 \qquad x=-\frac{1}{2p}y^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot
