

## Determináns, adjungált, kvadratikus alakok

Ha az  $A$  egy  $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$\det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{ip(i)}$$

ahol  $p$  az oszlopindexek permutációi,  $I(p)$  pedig ezen permutációk inverziószáma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy  $2 \times 2$ -es [mátrix](#) determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $3 \times 3$ -as [mátrixok](#) determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az  $A$  egy  $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt  $\det(A_{ij})$  az  $a_{ij}$  elemhez tartozó al-determináns.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$  mátrix determinánása nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánása nulla.

Az  $A$  mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik  $A^{-1}$  inverz mátrix
- $\text{RANG} < n$
- Az  $A$  mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánása nem nulla.

Az  $A$  mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik  $A^{-1}$  inverz mátrix
- $\text{RANG} = n$
- Az  $A$  mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Cramer szabály szerint az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol  $\det(A_k)$  annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az  $A$  mátrix  $k$ -edik oszlopát kicseréljük a  $\underline{b}$  vektorral.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt egy 3x3-as [mátrix](#).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ +\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt egy 2x2-es [mátrix](#).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az adjungált egyik legnagyobb haszna, hogy segítségével meg tudunk alkotni egy képletet a négyzetes [mátrixok](#) inverzére.

Itt is van:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az egyenletrendszerek megoldására is megalkothatunk egy új képletet az adjungált segítségével.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Legalábbis abban az esetben, hogyha az  $A$  nxn-es invertálható [mátrix](#).

Az egyenletrendszer megoldását úgy kapjuk meg, hogy beszorzunk az  $A$  [mátrix](#) inverzével...

$$\underline{x} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \cdot \underline{b}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elemek által generált Vandermonde-determináns első sorában  $x_1$  hatványai szerepelnek, aztán a második sorában  $x_2$  hatványai jönnek, és így tovább.

A Vandermonde-determinánst ezzel az egyszerű képlettel ki tudjuk számolni:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j < i} (x_i - x_j)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) sarak főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarak [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarak [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív definit, ha minden  $\lambda$  sajátérték:  $\lambda > 0$ .

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív definit, ha minden  $\lambda$  sajátérték:  $\lambda < 0$ .

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva  $- + - +$  de mínusszal indul.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív szemidefinit, ha minden  $\lambda$  sajátérték:  $\lambda \geq 0$ .

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív szemidefinit, ha minden  $\lambda$  sajátérték:  $\lambda \leq 0$ .

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) indefinit, ha van  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  sajátérték, hogy  $\lambda_1 > 0$  és  $\lambda_2 < 0$ .

Ha  $\det(A) \neq 0$  és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $A$   $n \times n$ -es szimmetrikus [mátrix](#) és  $\underline{x}$  egy vektor  $R^n$ -ben, akkor a

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$  kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektorra  $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektorra  $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektorra  $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektorra  $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan  $\underline{x} \neq \underline{0}$  és  $\underline{y} \neq \underline{0}$ , hogy  $Q(\underline{x}) < 0$  és  $Q(\underline{y}) > 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

