



**MATEKING.HU**

**Képletgyűjtemény**

**MATEMATIKA 3 OE tantárgy**

Kiadás dátuma: 2026. 04. 13.

# Tartalomjegyzék

Határozatlan integrálás, primitív függvény.....	<b>2</b>
Határozott integrálás.....	<b>6</b>
Differenciálegyenletek.....	<b>7</b>
Laplace transzformáció.....	<b>11</b>
Izoklinák.....	<b>13</b>
Fourier sorok.....	<b>14</b>
Sorok & hatványsorok & Taylor-sorok.....	<b>15</b>
Kétváltozós függvények.....	<b>18</b>
Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság.....	<b>22</b>
Kettős és hármas integrál.....	<b>23</b>

## Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az  $f(x)$  függvény primitív függvényének jele  $F(x)$  és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk  $f(x)$ -et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \ln |ax + b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \sin(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\cos(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \tan(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\cot(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} dx = \arctan(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integrálásakor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnós az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \quad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \quad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{cx+d} dx &= \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d} dx = \\ &= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + E \ln |cx+d| \frac{1}{c} \end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést  $u$ -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}} dx \quad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x)) dx \quad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \quad f = \sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \quad f = \sinh^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \quad f = \cosh^2 u$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = A \int \frac{1}{ax+b} dx = A \ln |ax+b| \cdot \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= A \int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \left( \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c} dx \right) = \\ &= \frac{A}{2a} \left( \ln |ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}} \right) \cdot \sqrt{D} \right) \end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést  $u$ -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az  $u = \tan \frac{x}{2}$ . Olyankor használjuk, ha a törtben  $\sin x$  és  $\cos x$  is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Határozott integrálás

Ha  $f(x)$  integrálható az  $[a, b]$  intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor a [Newton Leibniz formula](#) szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f$   $[a, b]$  intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az  $[a, b]$  intervallumon, ha egyetlen olyan  $I$  szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol  $s$  az alsó közelítő összeg:  $s = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$       $m_i = \inf \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol  $S$  a felső közelítő összeg:  $S = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$       $M_i = \sup \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha integráljuk a pozitív számegegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} & \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Differenciálegyenletek

A [differenciálegyenletek](#) olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [szeparábilis differenciálegyenlet](#) így néz ki:

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az  $y'$ -t lecseréljük arra, hogy  $\frac{dy}{dx}$ .

Aztán jön a szétválasztás: minden  $y$ -os dolgot a  $dy$ -os oldalra viszünk és minden  $x$ -eset a  $dx$ -es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [differenciálegyenlet](#) homogén fokszámú, ha  $y = ux$  helyettesítés után minden  $x$ -es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú [differenciálegyenletek](#) megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az  $y(x) = xu(x)$  (röviden  $y = xu$ ) helyettesítést, ekkor  $dy = u \cdot dx + x \cdot du$ .

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol  $y$  helyett most  $u$ -ra hajtunk. És amikor  $u$  már megvan, visszacsináljuk  $y$ -ra.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$  [differenciálegyenlet](#) akkor egzakt, ha  $p'_y(x, y) = q'_x(x, y)$ , röviden  $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$ .

Az egzakt egyenletek megoldása  $F(x, y) = C$ , ahol  $F'_x(x, y) = p(x, y)$  és  $F'_y(x, y) = q(x, y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a [differenciálegyenlet](#) nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p} \text{ és } \frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$$

Ha ezek közül az első csak  $y$ -t tartalmaz, vagy a második csak  $x$ -et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$$u = e^{-\int f(y) dy} \text{ vagy } u = e^{\int g(x) dx}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű lineáris [differenciálegyenlet](#) általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy  $y'$ , és van benne egy elsőfokú  $y$ .

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy  $v(x)$  függvényt:

$$v = e^{\int P(x) dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet  $v(x)$ -el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)' dx = \int vQ(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x) dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy  $C(x)$  függvény. És ezt a  $C(x)$  függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x) dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban  $C(x)$  helyére beírjuk, ami kijött.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósoknak, mert a  $P(x)$  függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk  $a$ .

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

$$\text{A homogén egyenlet: } y' + ay = 0$$

$$\text{A homogén megoldás: } y_0 = Ce^{-ax}$$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvényről függ:

$$Q(x) = \text{másodfokú polinom: } y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$Q(x) = \text{harmadfokú polinom: } y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = Ae^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) partikuláris megoldásában szerepel  $e^{\alpha x}$  és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van  $r_1$  és  $r_2$  akkor  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor  $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van  $r_1 = A + Bi$  és  $r_2 = A - Bi$  akkor  $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet:  $ar^2 + br + c = 0$ .

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van  $r_1$  és  $r_2$  akkor  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor  $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van  $r_1 = A + Bi$  és  $r_2 = A - Bi$  akkor  $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$$Q(x) = \text{polinom: } y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = A e^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Laplace transzformáció

Az  $f(x)$  függvény Laplace transzformáltja a következő integrálás:

$$f(x) \rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Néhány függvény Laplace transzformáltja:

$$f(x) = C \rightarrow F(s) = \frac{C}{s}$$

$$f(x) = x^n \rightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f(x) = e^{ax} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(x) = \sin(ax) \rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$f(x) = \cos(ax) \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$f(x) = x^n e^{ax} \rightarrow F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$f(x) = e^{ax} \sin(bx) \rightarrow F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$f(x) = e^{ax} \cos(bx) \rightarrow F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$f(x) = x \sin(ax) \rightarrow F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$f(x) = x \cos(ax) \rightarrow F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Néhány függvény inverz Laplace transzformáltja:

$$F(s) = \frac{C}{s} \rightarrow f(x) = C$$

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \rightarrow f(x) = x^n$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \rightarrow f(x) = e^{ax}$$

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \rightarrow f(x) = \sin(ax)$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \rightarrow f(x) = \cos(ax)$$

$$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \rightarrow f(x) = x^n e^{ax}$$

$$F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \rightarrow f(x) = e^{ax} \sin(bx)$$

$$F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \rightarrow f(x) = e^{ax} \cos(bx)$$

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \rightarrow f(x) = x \sin(ax)$$

$$F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \rightarrow f(x) = x \cos(ax)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Izoklinák

Azon pontok halmazát, melyekben a megoldásfüggvények meredeksége egy adott számmal egyenlő, a [differenciálegyenlet](#) izoklinájának nevezzük.

Az  $y' = f(x, y(x))$  izoklináinak egyenlete:

$$f(x, y(x)) = K$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Fourier sorok

A [Fourier sor](#) a  $2\pi$  szerint periodikus függvények egy speciális függvénysora:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ahol az úgynevezett Fourier-együtthetők:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Sorok & hatványsorok & Taylor-sorok

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$$

Ha  $|q| < 1$  akkor a mértani sor konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

Ha  $|q| \geq 1$  akkor a sor divergens.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszege sorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $\lim a_n \neq 0$  akkor  $\sum a_n$  divergens.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\sum (-1)^n \cdot a_n$  sor konvergens, ha  $a_n \rightarrow 0$  monoton csökkenő sorozat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\sum a_n$  sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  akkor  $\sum a_n$  abszolút konvergens.

Ha  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  akkor  $\sum a_n$  divergens.

Ha  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  akkor nem tudunk semmit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\sum a_n$  sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$  akkor  $\sum a_n$  abszolút konvergens.

Ha  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$  akkor  $\sum a_n$  divergens.

Ha  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  akkor nem tudunk semmit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $a_n \rightarrow 0$  pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$$\sum (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $\sum a_n$  és  $\sum b_n$  nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól  $a_n \leq b_n$  akkor

$$\sum b_n \text{ konvergens} \Rightarrow \sum a_n \text{ is konvergens}$$

$$\sum a_n \text{ divergens} \Rightarrow \sum b_n \text{ is divergens}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $x_0$  a [hatványsor](#) középpontja, akkor az  $x_0$  pont  $r$  sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol  $r$  a konvergenciasugár.

A [konvergencia tartomány](#) belső pontjaiban a [hatványsor](#) abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $x_0$  a [hatványsor](#) középpontja, akkor az  $x_0$  pont  $r$  sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A [konvergencia tartomány](#) belső pontjaiban a [hatványsor](#) abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen  $f(x)$   $k$ -szor differenciálható egy  $I$  intervallumon, ami tartalmazza az  $a$  számot. Ekkor az  $f(x)$  függvény  $a$  pontban felírt  $k$ -adfokú Taylor polinomja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen  $f(x)$  akárhányszor differenciálható egy  $I$  intervallumon, ami tartalmazza az  $a$  számot. Ekkor az  $f(x)$  függvény  $a$  pontban felírt Taylor sora:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $\sin x$  és  $\cos x$  függvények Taylor sorai:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $f(x)$  egymás után  $k$ -szor folytonosan differenciálható az  $[a, b]$  zárt intervallumon, és  $k+1$ -edszer differenciálható az  $(a, b)$  nyílt intervallumon, akkor létezik olyan  $c \in (a, b)$  amire

$$f(b) = T(b) + R(b) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a végtelen sorokat, amelyek így néznek ki, hatványsornak nevezzük:

$$\sum a_n (x-x_0)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az  $x$ ,  $y$  sík felett a függvény, ami egy felület.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Az  $f(x, y)$  függvény  $x$  szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy  $x$  szerint deriválunk,  $y$  most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami  $x$ -essel, akkor marad

Az  $f(x, y)$  függvény  $y$  szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy  $y$  szerint deriválunk,  $x$  most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami  $y$ -ossal, akkor marad

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x, y) \quad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x, y)$$

Második lépés:

$$f'_x(x, y) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$f'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$  pozitív, és  $f''_{xx} > 0$ , akkor lokális minimum van.

Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$  pozitív, és  $f''_{xx} < 0$ , akkor lokális maximum van.

Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$  negatív, akkor nyeregpont van.

Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$  nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f(x, y)$  függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét [parciális derivált](#) nulla, az  $f(x, y)$  függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az  $f$  többváltozós függvénynek az  $x_0 \in D_f$  pontban léteznek  $f$  első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \dots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor  $x_0$  az  $f$  többváltozós függvény stacionárius pontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű deriváltakból képzett [mátrix](#), amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az  $f$  függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz  $f(x, y) = c$ , az  $f$  függvény szintvonalának nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f(x, y)$  függvényhez a  $P(x_0, y_0, z_0)$  pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f(x, y)$  függvény  $x$  és  $y$  szerinti deriváltjaiból álló vektort derivált-vektornak vagy másként gradiensnek hívjuk.

Íme a derivált-vektor:

$$\underline{f}'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad \text{röviden} \quad \underline{f}' = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

A derivált-vektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges  $\underline{v}$  irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az  $f(x, y)$  függvény  $\underline{v}$  iránymenti deriváltja az  $(x_0, y_0)$  pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{v}} = \underline{f}'(x_0, y_0) \cdot \underline{v}$$

(Itt  $\underline{v}$  egységvektor)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy függvény akkor implicit, ha  $y$  nincs kifejezve, vagyis nem  $y = \dots$  alakú.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $F(x, y) = 0$  egy egyváltozós implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}$$

Ha  $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$  egy  $n$  változós implicit függvény, akkor az  $x_i$ , mint implicit függvény deriváltja az  $x_j$  változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

## Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság

Az  $f(x, y)$  [függvény határértéke](#) az  $R(x_0, y_0)$  pontban  $B$ , ha minden  $\epsilon > 0$ -ra van  $\delta > 0$  úgy, hogy ha  $(x, y)$  eleme az  $R(x_0, y_0)$  pont  $\delta$  sugarú környezetének, vagyis ha

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

akkor

$$|f(x, y) - B| < \epsilon$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f(x, y)$  kétváltozós függvény totálisan differenciálható az  $(x_0, y_0)$  helyen, ha léteznek olyan  $A$  és  $B$  valós számok, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - (A(x-x_0) + B(y-y_0) + f(x_0,y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $f(x, y)$  kétváltozós függvény  $x$  szerinti parciális deriváltja:

$$\lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = f'_x(x_0, y_0) = \frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta x}$$

Az  $f(x, y)$  kétváltozós függvény  $y$  szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta y}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

## Kettős és hármás integrál

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az  $x, y$  sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az  $x$  szerinti határokat adjuk meg és utána az  $y$  szerintit vagy fordítva.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A polárkoordinátás helyettesítés egy olyan helyettesítés, ami remekül alkalmazkodik a kör tulajdonságaihoz. A dolog lényege, hogy a körben a hagyományos  $x$  és  $y$  koordináták helyett új koordinátákat vezetünk be.

Az egyik azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk a kör középpontjától és ezt  $r$ -nek nevezzük.

A másik pedig egy forgásszög, és jele  $\theta$ .

Az új koordinátákat polárkoordinátáknak nevezzük, a módszert pedig polárkoordinátás helyettesítésnek. A kapcsolat a régi és az új koordináták között a következő:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

A polárkoordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek. A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int \int_D f(x, y) \, dy dx = \int \int_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A henger-koordináták:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

A henger-koordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek.

A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr d\theta dz$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A polárkoordináták háromdimenziós változatát gömbi koordinátáknak nevezzük.

Az  $r$  azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk az origótól, a  $\varphi$  és  $\theta$  pedig két forgás-szög.

A régi  $x, y, z$  és az új [gömbi koordináták](#) közti kapcsolat:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \varphi$$

A gömb koordinátás helyettesítés:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_D f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---