MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

ANALÍZIS 1 IK tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 09.

Tartalomjegyzék

Halmazok, rendezett párok, leképezések, matematikai logika

Vannak az A és B halmazok.

Az A és B halmazok uniója: Azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.

Jele: $A \cup B$

Az A és B halmazok metszete: Azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jele: $A \cap B$

Az A és B halmazok különbsége: Azon elemek halmaza, amelyek az A halmazba benne vannak, de a B halmazba nem.

Jele: $A \setminus B$

Az A halmaz komplementere a H alaphalmazon nézve: Az alaphalmaz azon elemeinek halmza, amelyek nincsenek benne az A-ban.

Jele: $\overline{A}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logikai szita formula két halmazra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A logikai szita formula három halmazra:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az első De Morgan azonosság azt mondja, hogy a metszet komplementere pont megegyezik a komplementrek uniójával:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A második De Morgan azonosság pedig azt mondja, hogy az unió komplementere éppen megegyezik a komplementerek metszetével:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát hatványhalmaznak nevezzük.

Pl.: az $A = \{x, y, z\}$ halmaz hatványhalmaza:
$P(A) = \{\emptyset. \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Érdemes megjegyezni, hogy $A \triangle A = \emptyset$ és $A \triangle \emptyset = A$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \qquad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \qquad \log(\text{ez itt} > 0) \qquad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az univerzális kvantor egy jelölése a "minden" kifejezésnek.

Jele: $\forall$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egzisztenciális kvantor egy jelölése a "létezik" vagy "van olyan" kifejezésnek.

Jele: $\exists$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás negációja (vagy tagadása) egy egyváltozós művelet. Egy A kijelentés negációja az a kijelentés, amely akkor igaz, ha A hamis és akkor hamis, ha A igaz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthetjük, hogy az igaz vagy hamis.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \wedge B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \vee B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A "ha A, akkor B" kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet nevezzük implikációnak. Az implikáció akkor hamis, ha A igaz és B hamis, minden más esetben igaz.

Jele: $A \Rightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az ekvivalencia egy olyan logikai művelet, amikor $A \Rightarrow B$ és $A \Leftarrow B$. Az ekvivalencia akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, különben hamis.

Jele: $A \Leftrightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) = A \Leftrightarrow \neg B$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunktív normálforma, röviden DNF egy olyan alakja egy logikai formulának, ahol a művelet a változóinak vagy negáltjainak konjunkcióinak diszjunkciója.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \qquad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \qquad \log\left(\text{ez itt} > 0\right) \qquad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összetett függvény és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönösen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorozatok határértéke

$\frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \frac{1}{n^3} \to 0 \quad \frac{1}{n^k} \to 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$n \to \infty \quad n^2 \to \infty \quad n^3 \to \infty \quad n^k \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{n} \to \infty \quad \sqrt[3]{n} \to \infty \quad \sqrt[4]{n} \to \infty \quad \sqrt[k]{n} \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$q^n \to \begin{cases} \infty \text{ ha } q > 1 \\ 0 \text{ ha } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ ha } q = 1 \\ \text{div ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha$

$\left(1+\frac{\alpha}{\text{IZÉ}}\right)^{\text{IZÉ}} \to e^\alpha$

Ha IZÉ $\to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van egy olyan valós szám, ami a sorozat határértéke.

Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens.

Egy sorozat lehet azért is divergens, mert végtelenbe tart, és lehet azért is, mert az égvilágon nem tart sehova. A sehova nem tartó sorozatok mindig oszcillálló sorozatok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to A$ és $c_n \to A$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$ akkor $b_n \to A$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \sqrt[n]{n} \to 1 \quad \sqrt[n]{n^k} \to 1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A végtelenbe tartó sorozatok nagyságrendi sorrendje azt mondja meg, hogy melyik sorozat milyen ütemben tart a végtelenbe. Minél nagyobb nagyságrendű egy sorozat, annál gyorsabban tart a végtelenbe. A nagysagrendi rangsor:

$$\log_n << \sqrt[k]{n} << n^k << q^n << n! << n^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyoldali rendőr-elv arról szól, hogyha egy sorozat végtelenbe tart, akkor elég alulról becsülni egy másik végtelenhez tartó sorozattal, és az egyoldali rendőr-elv szerint az eredeti sorozat is végtelenbe fog tartani. Amikor pedig az eredeti sorozat mínusz végtelenbe tart, akkor az egyoldali rendőr-elvet használva felülről becslünk egy másik mínusz végtelenbe tartó sorozattal:

Ha $a_n \to \infty$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n$ akkor $b_n \to \infty$.

Ha $a_n \to -\infty$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \geq b_n$ akkor $b_n \to -\infty$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha bármilyen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

Ennél precizebben az a_n sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén végtelen sok tagja van, hogy $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza legyen $\{A_i\}$

Ekkor a sorozat limesz inferiorja:

$$\lim\inf a_n = \inf\{A_i\}$$

És a limesz szuperior:

$$\lim\sup a_n = \sup\{A_i\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Monotonitás és korlátosság

Az a_n sorozat szigorúan monoton nő, ha $0 < a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat szigorúan monoton csökken, ha $0 > a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton nő, ha $0 \leq a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton csökken, ha $0 \geq a_{n+1} - a_n$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorok

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$

Ha $|q| < 1$ akkor a mértani sor konvergens és összege

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $|q| \geq 1$ akkor a sor divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszegsorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$ monoton csökkenő sorozat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to 0$ pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$\sum(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól $a_n \leq b_n$ akkor

$\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ is konvergens

$\sum a_n$ divergens $\Rightarrow$ $\sum b_n$ is divergens

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol r a konvergenciasugár.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények határértéke és folytonossága

Az $f(x)$ függvény folytonos az a-ban, ha értelmezve van az a-ban, létezik és véges a határértéke az a-ban, és ami a lényeg:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a-ban, ha létezik véges határértéke az a-ban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Megszüntethető szakadás:

Ha létezik véges határérték az a-ban, de ez nem egyezik meg a függvényértékkel, akkor megszüntethető szakadása van.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

Nem megszüntehető szakadás, ugrás:

Ha a bal és jobb oldali határérték két különböző szám az a-ban, akkor a szakadás nem megszüntethető és ugrásnak hívjuk.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \text{másik szám} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Nem megszüntethető, nem véges szakadás:

Ha a bal és jobb oldali határérték nem is véges az a-ban, akkor pláne nem tehető folytonossá a függvény.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nem megszüntethető oszcilláló szakadás:

Végül meglehetősen patologikus esetek is vannak, amikor még csak jobb vagy bal oldali határérték sem létezik.

$$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{\text{IZÉ}\to 0} \frac{\sin \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{\text{IZÉ}\to 0} \frac{1-\cos \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}^2} = \frac{1}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A határérték precíz definíciója

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

f és g deriválható függvények, és c valós szám esetén a deriválási szabályok:

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

A deriválási szabályok megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a trötek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorolni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvények közt fennálló azonosságok:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\cosh x$ függvény inverze:

$\mathrm{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

A $\sinh x$ függvény inverze:

$\mathrm{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

A $\tanh x$ függvény inverze:

$\mathrm{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\mathrm{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\mathrm{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\mathrm{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy

$|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat divergens, és határértéke plusz végtelen, ha bármely $M > 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M < a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat divergens, és határértéke minusz végtelen, ha bármely $M < 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M > a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat oszcillálva divergens, ha nincs semmilyen határértéke, vagysi sem egy valós számhoz, sem plusz vagy minusz végtelenbe nem tart.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Taylor polinom és Taylor sor

Legyen $f(x)$ k-szor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt k-adfokú Taylor polinomja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $f(x)$ akárhányszor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt Taylor sora:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az e^x, $\ln x$, $\sin x$ és $\cos x$ függvények Taylor sorai:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $f(x)$ egymás után k-szor folytonosan differenciálható az $[a,b]$ zárt intervallumon, és $k+1$-edszer differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon, akkor létezik olyan $c \in (a,b)$ amire

$$f(b) = T(b) + R(b) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Komplex számok

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

A két komplex szám összege:
$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

A két komplex szám különbsége:
$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

A két komplex szám szorzata:
$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c)i$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A komplex számok egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tegelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. Az imaginárius tengely egysége az i, ami olyan, mint a valós tengelyen az 1, csak éppen egy meglehetősen furcsa dolgot tud. Az imaginárius egység egy olyan komplex szám, aminek a négyzete -1 és i-vel jelöljük, azaz

$i^2 = -1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A komplex számokat azért hívjuk "komplex"nek, mert két részből tevődnek össze. Egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tegelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. A komplex számok egy valós számból és egy imaginárius számból tevődnek össze:

$z = a + bi$

Itt a és b valós számok, az i pedig az imaginárius egység, ami azt tudja, hogy $i^2 = -1$.

Magukat a valós számokat és az imaginárius számokat is komplex számnak tekinthetjük. A valós számok olyan komplex számok, amelyeknek az imaginárius része nulla, míg az imaginárius számok olyankomplex számok, amelyeknek a valós része nulla. A komplex számok egy síkon, az úgynevezett komplex számsíkon helyezkednek el. Kicsit olyanok, mint a koordinátageometriában a kétdimenziós sík vektorai, ahol az i és j bázisvektorkat szokás használni, az x tengelynél az i és az y tengelynél a j vektorral. Ennek az analógiának köszönhetően vannak, akik az imaginárius számokat nem is i-vel, hanem j-vel jelölik. Bár ez segítheti erősíteni az analógiát a sík vektoraival, de mégis zavaró, mivel aki komolyabban is fogalakozik a komplex számokkal, a hivatalos jelöléssel fog találkozni, ahol az imaginárius tengelyen i-k vannak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A valós számokat úgy érdemes elképzelni, mint egy koordinátarendszer x tengelyét. És minden helyet ki is töltenek a valós számok ezen a számegyenesen. A komplex számok egy valós és egy imaginárius (képzetes) részből épülnek föl, és szemléltetésükhöz nem egy, hanem két koordinátatengelyre van szükség. Az x tengelyen vannak a valós számok, az y tengelyen pedig az imaginárius, vagyis a képzetes számok. A valós számok tengelyén az egység a szokásos 1, míg az imaginárius számok tengelyén az egység az i. A kétb tengely által kifeszített síkot nevezzük komplex számsíknak, vagy másknt Gauss-féle számsíknak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám:

$$z = a + bi$$

Komplex számoknak van ilyenje, hogy imaginárius egység:

$$i^2 = -1$$

Komplex számok konjugáltja:

$$\overline{z} = a - bi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám: $z = a + bi$

Ennek a komplex számnak az abszolútértéke:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ahol

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám trigonometrikus alakban: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Komplex számok szorzása trigonometrikus alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Komplex számok osztása trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban:$r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik hatványa:

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban:$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám exponenciális alakban:$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

Komplex számok szorzása exponenciális alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Komplex számok osztása exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban:$z = re^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik hatványa:

$$z^n = r^n e^{ni\theta}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban:$z = re^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot
