



MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

ANALÍZIS 3 IK tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 09.

Tartalomjegyzék

Határozatlan integrálás, primitív függvény.....	2
Határozott integrálás.....	6
Paraméteres görbék.....	7
Sorok & hatványsorok & Taylor-sorok.....	10
Mátrixok, vektorok, vektorterek.....	13
Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze.....	22
Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések.....	25
Kétváltozós függvények.....	35
Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság.....	39
Kettős és hármas integrál.....	40

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$ -et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \ln |ax + b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \sin(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\cos(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \tan(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\cot(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} dx = \arctan(ax + b) \frac{1}{a} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integrálásakor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnós az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális eset megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \quad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \quad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d} dx =$$

$$= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + E \ln |cx+d| \frac{1}{c}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}} dx \quad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x)) dx \quad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \quad f = \sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \quad f = \sinh^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \quad f = \cosh^2 u$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = A \int \frac{1}{ax+b} dx = A \ln |ax+b| \cdot \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= A \int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c} dx \right) = \\ &= \frac{A}{2a} \left(\ln |ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}} \right) \cdot \sqrt{D} \right) \end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az $u = \tan \frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozott integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor a [Newton Leibniz formula](#) szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az f $[a, b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ $m_i = \inf \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ $M_i = \sup \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha integráljuk a pozitív számegegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} & \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Paraméteres görbék

A ciklois egyenlete:

$$x = R(-\sin u + u) \quad y = R(-\cos u + 1)$$

$$u = \frac{4}{R}t$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A paraméteres görbe egyenlete a görbén mozgó pont pillanatnyi koordinátáit írja le.

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

A paraméteres görbe deriválásával kapjuk a $v(t)$ sebességvektort, ami minden időpillanatban megadja a görbén mozgó P pont sebességének irányát és nagyságát:

$$v(t) = (x'(t), y'(t)) \quad |v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A görbe ívhossza a t_0 és t_1 időpillanatokhoz tartozó pontok között:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $r(t)$ paraméteres görbe első deriváltja a görbe érintővektora vagy más néven sebességvektora.

Hogyha ezt elosztjuk a saját hosszával, akkor egy egységnyi hosszú vektort kapunk, amit \underline{T} -vel jelölünk.

$$\underline{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $r(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a görbe gyorsulásvektora. Ha ezt elosztjuk a saját hosszával:

$$\underline{N}(t) = \frac{r''(t)}{|r''(t)|}$$

Az így keletkező egységnyi hosszú vektor a görbe főnormálisvektora.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Binormálisvektornak nevezzük a görbe sebességvektorával és gyorsulásvektorával alkotott szorzatot:

$$\underline{B}(t) = \underline{T}(t) \times \underline{N}(t)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{T}(t)$, $\underline{N}(t)$ és $\underline{B}(t)$ [vektorok](#) együttes elnevezése kíséző triéder.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $r(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a gyorsulást írja le. Ezek a [vektorok](#) egy síkot feszítenek ki, ezt a síkot a görbe simulósíkjának nevezzük. A simulósík normálvektora éppen $r'(t) \times r''(t)$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A görbület azt írja le, hogy a simulósíkon belül milyen erősen kanyarodik a görbe. A térgörbék azonban nem csak a simulósíkon belül kanyarodnak, hanem közben ki is csavarodnak abból. Azt, hogy egy térgörbe éppen milyen ütemben csavarodik ki a simulósíkjából, a torzió írja le.

Hogyha egy görbe minden pontjában nulla a torzió, az annak a jele, hogy ez a görbe egy síkgörbe. Egy görbe akkor tud kilépni a simulósíkjából, ha a torzió legalább egy pontban nem nulla. Vagyis olyankor, ha a görbe elmozdul a binormális vektor irányában is. A torzió kiszámításához szükségünk van a görbe harmadik deriváltjára:

$$\tau = \frac{(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2} = \frac{\det \begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{bmatrix}}{\left| \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix} \right|^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $r(t) = (x(t), y(t))$ paraméteres görbe görbülete:

$$\kappa = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{|x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}^3}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hogyha a görbének egy P pontjában létezik nem nulla görbülete, akkor azt a kört, amel a P -ben érinti a görbét és a görbülete megegyezik a görbe P -beli görbületével és a középpontja a görbe konkáv részében található, a görbe P pontbeli simulókörének nevezzük.

A simulókör sugarát a görög ró betűvel jelöljük, és

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A simulókörök középpontjai által kirajzolt alakzatot evolutának hívjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az ellipszis fél-nagy tengelyének hossza a , fél-kis tengelyének hossza b , akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a hiperbola fél-nagy tengelyének hossza a , fél-kis tengelyének hossza b , akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Sorok & hatványsorok & Taylor-sorok

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$$

Ha $|q| < 1$ akkor a mértani sor konvergens és összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

Ha $|q| \geq 1$ akkor a sor divergens.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszege sorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \rightarrow 0$ monoton csökkenő sorozat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor nem tudunk semmit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ akkor nem tudunk semmit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $a_n \rightarrow 0$ pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$$\sum (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól $a_n \leq b_n$ akkor

$$\sum b_n \text{ konvergens} \Rightarrow \sum a_n \text{ is konvergens}$$

$$\sum a_n \text{ divergens} \Rightarrow \sum b_n \text{ is divergens}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha x_0 a [hatványsor](#) középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol r a konvergenciasugár.

A [konvergencia tartomány](#) belső pontjaiban a [hatványsor](#) abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha x_0 a [hatványsor](#) középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A [konvergencia tartomány](#) belső pontjaiban a [hatványsor](#) abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen $f(x)$ k -szor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt k -adfokú Taylor polinomja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Legyen $f(x)$ akárhányszor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt Taylor sora:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az e^x , $\ln x$, $\sin x$ és $\cos x$ függvények Taylor sorai:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $f(x)$ egymás után k -szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon, és $k+1$ -edszer differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$ amire

$$f(b) = T(b) + R(b) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a végtelen sorokat, amelyek így néznek ki, hatványsornak nevezzük:

$$\sum a_n (x-x_0)^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mátrixok, vektorok, vektorterek

Egy $n \times k$ -as [mátrix](#) tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor a [mátrix](#) összes elemét meg kell szorozni a számmal.

$$\text{pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor a [mátrix](#) minden elemét osztani kell a számmal.

$$\text{pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A [mátrixok](#) összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) szorzata akkor létezik, ha a bal oldali [mátrix](#) oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali [mátrix](#) sorainak számával.

Ha az A [mátrix](#) $m \times n$ -es a B [mátrix](#) pedig $n \times k$ -s, akkor az eredmény [mátrix](#) $m \times k$ -s lesz.

Az eredmény [mátrix](#) i -edik sorának j -edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali [mátrix](#) i -edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali [mátrix](#) j -edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A [mátrix](#) összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kvadratikus [mátrix](#) négyzetes [mátrix](#) vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A diagonális [mátrix](#) olyan kvadratikus [mátrix](#), aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az egység**mátrix** olyan **mátrix**, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egység**mátrixok** olyan diagonális **mátrixok**, aminek minden főátló-eleme egy.

$$\text{pl.: } I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az inverz **mátrix** jele A^{-1} és ez egy olyan **mátrix**, ami azt tudja, hogy

$$A \cdot A^{-1} = I \text{ (jobb inverz)}$$

$$A^{-1} \cdot A = I \text{ (bal inverz)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A transzponált a **mátrix** sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

$$\text{Pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

$$\text{Pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

$$\text{kommutatív: } \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

$$\text{asszociatív: } (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [skaláris szorzat](#) két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$$

Tulajdonságok:

$$\text{kommutatív: } \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$$

$$\text{nem asszociatív: } (\underline{a}^T \cdot \underline{b})^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot (\underline{b}^T \cdot \underline{c})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektor diadikus szorzata egy [mátrix](#). Lássuk milyen.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot beszorunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő

elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot beszorunk az $\underline{I}^T = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot megszorunk jobbról egy \underline{e}_i egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik oszlopát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot megszorunk balról egy \underline{e}_i egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik sorát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az \underline{a} és \underline{b} vektorok vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az \underline{a} és \underline{b} vektorok által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha a V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden V -beli \underline{v}_1 és \underline{v}_2 vektorhoz hozzárendelünk egy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektort, ami szintén eleme V -nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V -beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ V -beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan $\underline{0}$ V -beli vektor, hogy bármely \underline{v}_1 V -beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely \underline{v}_1 V bel vektorra létezik olyan $-\underline{v}_1$ V -beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden V -beli \underline{v}_1 vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \underline{v}_1$ vektort, ami szintén V -beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely \underline{v}_1 V -beli vektorra és λ, μ skalárakra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V -beli vektorra és λ skalárakra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárookra: bármely \underline{v}_1 V -beli vektorra és λ, μ skalárakra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységyszeres: bármely \underline{v}_1 V -beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan $\lambda_i \neq 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy V vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) generátor-rendszert alkotnak, ha minden \underline{w} vektor a V vektortérben előáll $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$ alakban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg \mathbb{R}^* -ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek n -nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő független [vektorok](#) maximális száma. \mathbb{R}^3 -ban a rang például maximum három lehet.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A V vektortérnek W altere, ha $W \subset V$ és W maga is vektortér a V -beli műveletekre.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azon [vektorok](#) lineáris kombinációjaként.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x -ek együtthatóiból álló [mátrix](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlós [mátrix](#) alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x -es oszlopból és e -s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x -es oszlopból és e -s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak e -s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázistranszformáció során fent maradt x -ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány x_i főt marad.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett [mátrix](#) pedig az A [mátrix](#) inverze lesz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x -et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések

Ha az A egy $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$\det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{ip(i)}$$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy 2×2 -es [mátrix](#) determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A 3×3 -as [mátrixok](#) determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az A egy $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az A mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz mátrix
- $\text{RANG} < n$
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz mátrix
- $\text{RANG} = n$
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A mátrix k -edik oszlopát kicseréljük a \underline{b} vektorral.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) sajátértéke egy olyan λ valós szám, amelyhez van valami \underline{v} nem nullvektor, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátérték lényege, hogy vannak olyan [mátrixok](#), és olyan [vektorok](#), hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. Az egységmátrixpéldául ilyen: ha az egységmátrixszal megszorozunk egy tetszőleges vektort, akkor ugyanazt a vektort kapjuk. Ilyenkor minden vektor sajátvektor és a sajátérték 1, mert minden vektorból az 1-szerese lesz.

A saját[vektorok](#) és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le. A síkbeli tükrözés az x tengelyre például egy geometriai transzformáció, aminek a mátrixa két sajátértékkel rendelkezik. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Az y tengelyen lévő [vektorok](#) viszont az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1 -gyel. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátértékei. Az 1 és a -1 . Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) sajátvektora egy olyan \underline{v} nem nullvektor, amelyhez van valami λ valós szám, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátvektor lényege, hogy vannak olyan [mátrixok](#), és olyan [vektorok](#), hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. A saját[vektorok](#) és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le.

Vegyük például a síkbeli tükrözést az x tengelyre. Ez egy geometriai transzformáció. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Vagyis ezek a [vektorok](#) egytől egyig saját[vektorok](#), mert teljesítik azt amit egy sajátvektornak tudnia kell: ha megszorozzuk a mátrixot a vektorral, akkor az eredeti vektor számszorosát kapjuk. Itt most éppen az eredeti vektor 1-szeresét kapjuk. Az y tengelyen lévő [vektorok](#) szintén saját[vektorok](#), mert az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1 -gyel. Vagyis ezek a [vektorok](#) saját maguk -1 -szeresei lesznek. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátvektorai: az x tengely és az y tengely vektorai. Az x tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték az 1, míg az y tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték a -1 . Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A karakterisztikus egyenlet a sajátértékek kiszámolásához szükséges egyenlet:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet segít nekünk kiszámolni egy [mátrix](#) sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Az egyenletet karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy $n \times n$ -es [mátrix](#) karakterisztikus egyenlete n -edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5×5 -ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda \cdot I)$$

A karakterisztikus polinom segít nekünk kiszámolni egy [mátrix](#) sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Vagyis a sajátértékek mindig a karakterisztikus polinom gyökei. Előfordul, hogy egy sajátérték többszörös gyök, és az is megeshet, hogy komplex gyökei vannak a karakterisztikus polinomnak.

Azt az egyenletet, amikor a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy $n \times n$ -es [mátrix](#) karakterisztikus egyenlete n -edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5×5 -ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az A mátrix egy $n \times n$ -es diagonalizálható mátrix, akkor a sajátfelbontása:

$$A = X \cdot \text{diag}(A) \cdot X^{-1}$$

Itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$ vagyis egyszerűen úgy keletkezi, hogy a sajátvektorokat fogjuk, és leírjuk egymás mellé és

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A spektrálfelbontás segítségével könnyebben hatványozhatunk:

$$A^n = X \cdot (\text{diag}(A))^n \cdot X^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy mátrix sarak főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarak mátrixok determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarok [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + - +$ de mínusszal indul.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha A $n \times n$ -es szimmetrikus [mátrix](#) és \underline{x} egy vektor \mathbb{R}^n -ben, akkor a

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezésnél V_2 -nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1 -beli [vektorok](#) képe is nullvektor lesz. Ezen [vektorok](#) halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a [mátrixok](#) pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1 -ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

$$\varphi^{-1} \text{ mátrixa } (\varphi)_b^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A φ lineáris leképezésnek a $\underline{b}_1 \underline{b}_2 \dots \underline{b}_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1) \varphi(\underline{b}_2) \varphi(\underline{b}_3) \dots \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is V_1 -ben, a leképezés mátrixa mindig egy $n \times n$ -es mátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak V_1 -ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret $Hom(V_1, V_2)$ -nek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha A és B olyan mátrixok, hogy létezik egy C mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x , y sík felett a függvény, ami egy felület.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x -essel, akkor marad

Az $f(x, y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y -ossal, akkor marad

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x, y) \quad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x, y)$$

Második lépés:

$$f'_x(x, y) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$f'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét [parciális derivált](#) nulla, az $f(x, y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \dots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű deriváltakból képzett [mátrix](#), amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f''} = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort derivált-vektornak vagy másként gradiensnek hívjuk.

Íme a derivált-vektor:

$$\underline{f'}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad \text{röviden} \quad \underline{f'} = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

A derivált-vektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges \underline{v} irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x, y)$ függvény \underline{v} iránymenti deriváltja az (x_0, y_0) pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{v}} = \underline{f'}(x_0, y_0) \cdot \underline{v}$$

(Itt \underline{v} egységvektor)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $F(x, y) = 0$ egy egyváltozós implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i , mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság

Az $f(x, y)$ [függvény határértéke](#) az $R(x_0, y_0)$ pontban B , ha minden $\epsilon > 0$ -ra van $\delta > 0$ úgy, hogy ha (x, y) eleme az $R(x_0, y_0)$ pont δ sugarú környezetének, vagyis ha

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

akkor

$$|f(x, y) - B| < \epsilon$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény totálisan differenciálható az (x_0, y_0) helyen, ha léteznek olyan A és B valós számok, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - (A(x-x_0) + B(y-y_0) + f(x_0,y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$\lim_{(x,y_0) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = f'_x(x_0, y_0) = \frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta x}$$

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta y}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kettős és hármas integrál

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az x szerinti határokat adjuk meg és utána az y szerintit vagy fordítva.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A polárkoordinátás helyettesítés egy olyan helyettesítés, ami remekül alkalmazkodik a kör tulajdonságaihoz. A dolog lényege, hogy a körben a hagyományos x és y koordináták helyett új koordinátákat vezetünk be.

Az egyik azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk a kör középpontjától és ezt r -nek nevezzük.

A másik pedig egy forgásszög, és jele θ .

Az új koordinátákat polárkoordinátáknak nevezzük, a módszert pedig polárkoordinátás helyettesítésnek. A kapcsolat a régi és az új koordináták között a következő:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

A polárkoordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek. A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int \int_D f(x, y) \, dy dx = \int \int_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A henger-koordináták:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

A henger-koordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek.

A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr d\theta dz$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A polárkoordináták háromdimenziós változatát gömbi koordinátáknak nevezzük.

Az r azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk az origótól, a φ és θ pedig két forgás-szög.

A régi x, y, z és az új [gömbi koordináták](#) közti kapcsolat:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \varphi$$

A gömb koordinátás helyettesítés:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_D f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)
