

## Differenciálegyenletek

A [differenciálegyenletek](#) olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A [szeparábilis differenciálegyenlet](#) így néz ki:

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az  $y'$ -t lecseréljük arra, hogy  $\frac{dy}{dx}$ .

Aztán jön a szétválasztás: minden  $y$ -os dolgot a  $dy$ -os oldalra viszünk és minden  $x$ -eset a  $dx$ -es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy [differenciálegyenlet](#) homogén fokszámú, ha  $y = ux$  helyettesítés után minden  $x$ -es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú [differenciálegyenletek](#) megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az  $y(x) = xu(x)$  (röviden  $y = xu$ ) helyettesítést, ekkor  $dy = u \cdot dx + x \cdot du$ .

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol  $y$  helyett most  $u$ -ra hajtunk. És amikor  $u$  már megvan, visszacsináljuk  $y$ -ra.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$  [differenciálegyenlet](#) akkor egzakt, ha  $p'_y(x, y) = q'_x(x, y)$ , röviden  $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$ .

Az egzakt egyenletek megoldása  $F(x, y) = C$ , ahol  $F'_x(x, y) = p(x, y)$  és  $F'_y(x, y) = q(x, y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a [differenciálegyenlet](#) nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p} \text{ és } \frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$$

Ha ezek közül az első csak y-t tartalmaz, vagy a második csak x-et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$$u = e^{-\int f(y) dy} \text{ vagy } u = e^{\int g(x) dx}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű lineáris [differenciálegyenlet](#) általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy  $y'$ , és van benne egy elsőfokú  $y$ .

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy  $v(x)$  függvényt:

$$v = e^{\int P(x) dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet  $v(x)$ -el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)' dx = \int vQ(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x) dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy  $C(x)$  függvény. És ezt a  $C(x)$  függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x) dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban  $C(x)$  helyére beírjuk, ami kijött.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósoknak, mert a  $P(x)$  függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk  $a$ .

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

$$\text{A homogén egyenlet: } y' + ay = 0$$

$$\text{A homogén megoldás: } y_0 = Ce^{-ax}$$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvényről függ:

$$Q(x) = \text{másodfokú polinom: } y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$Q(x) = \text{harmadfokú polinom: } y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = Ae^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A\cos \alpha x + B\sin \alpha x$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) partikuláris megoldásában szerepel  $e^{\alpha x}$  és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van  $r_1$  és  $r_2$  akkor  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor  $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van  $r_1 = A + Bi$  és  $r_2 = A - Bi$  akkor  $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet:  $ar^2 + br + c = 0$ .

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van  $r_1$  és  $r_2$  akkor  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor  $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van  $r_1 = A + Bi$  és  $r_2 = A - Bi$  akkor  $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$$Q(x) = \text{polinom: } y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = A e^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---