

## Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések

Ha az  $A$  egy  $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$\det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{ip(i)}$$

ahol  $p$  az oszlopindexek permutációi,  $I(p)$  pedig ezen permutációk inverziószáma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy  $2 \times 2$ -es [mátrix](#) determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $3 \times 3$ -as [mátrixok](#) determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az  $A$  egy  $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt  $\det(A_{ij})$  az  $a_{ij}$  elemhez tartozó al-determináns.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$  mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az  $A$  mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik  $A^{-1}$  inverz mátrix
- $\text{RANG} < n$
- Az  $A$  mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az  $A$  mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik  $A^{-1}$  inverz mátrix
- $\text{RANG} = n$
- Az  $A$  mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Cramer szabály szerint az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol  $\det(A_k)$  annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az  $A$  mátrix  $k$ -edik oszlopát kicseréljük a  $\underline{b}$  vektorral.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) sajátértéke egy olyan  $\lambda$  valós szám, amelyhez van valami  $\underline{v}$  nem nullvektor, hogy  $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátérték lényege, hogy vannak olyan [mátrixok](#), és olyan [vektorok](#), hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. Az egységmátrixpéldául ilyen: ha az egységmátrixszal megszorozunk egy tetszőleges vektort, akkor ugyanazt a vektort kapjuk. Ilyenkor minden vektor sajátvektor és a sajátérték 1, mert minden vektorból az 1-szerese lesz.

A saját[vektorok](#) és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le. A síkbeli tükrözés az x tengelyre például egy geometriai transzformáció, aminek a mátrixa két sajátértékkel rendelkezik. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Az y tengelyen lévő [vektorok](#) viszont az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátértékei. Az 1 és a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) sajátvektora egy olyan  $\underline{v}$  nem nullvektor, amelyhez van valami  $\lambda$  valós szám, hogy  $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátvektor lényege, hogy vannak olyan [mátrixok](#), és olyan [vektorok](#), hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. A saját[vektorok](#) és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le.

Vegyük például a síkbeli tükrözést az x tengelyre. Ez egy geometriai transzformáció. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Vagyis ezek a [vektorok](#) egytől egyig saját[vektorok](#), mert teljesítik azt amit egy sajátvektornak tudnia kell: ha megszorozzuk a mátrixot a vektorral, akkor az eredeti vektor számszorosát kapjuk. Itt most éppen az eredeti vektor 1-szeresét kapjuk. Az y tengelyen lévő [vektorok](#) szintén saját[vektorok](#), mert az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. Vagyis ezek a [vektorok](#) saját maguk -1-szeresei lesznek. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátvektorai: az x tengely és az y tengely vektorai. Az x tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték az 1, míg az y tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A karakterisztikus egyenlet a sajátértékek kiszámolásához szükséges egyenlet:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet segít nekünk kiszámolni egy [mátrix](#) sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Az egyenletet karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy  $n \times n$ -es [mátrix](#) karakterisztikus egyenlete  $n$ -edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy  $5 \times 5$ -ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda \cdot I)$$

A karakterisztikus polinom segít nekünk kiszámolni egy [mátrix](#) sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Vagyis a sajátértékek mindig a karakterisztikus polinom gyökei. Előfordul, hogy egy sajátérték többszörös gyök, és az is megeshet, hogy komplex gyökei vannak a karakterisztikus polinomnak.

Azt az egyenletet, amikor a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy  $n \times n$ -es [mátrix](#) karakterisztikus egyenlete  $n$ -edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy  $5 \times 5$ -ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha egy  $n \times n$ -es mátrixnak van  $n$  darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha egy  $n \times n$ -es mátrixnak van  $n$  darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha egy  $n \times n$ -es mátrixnak van  $n$  darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha az  $A$  mátrix egy  $n \times n$ -es diagonalizálható mátrix, akkor a sajátfelbontása:

$$A = X \cdot \text{diag}(A) \cdot X^{-1}$$

Itt  $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$  vagyis egyszerűen úgy keletkezi, hogy a sajátvektorokat fogjuk, és leírjuk egymás mellé és

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A spektrálfelbontás segítségével könnyebben hatványozhatunk:

$$A^n = X \cdot (\text{diag}(A))^n \cdot X^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy mátrix sarak főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarak mátrixok determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy [mátrix](#) főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarok [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív definit, ha minden  $\lambda$  sajátérték:  $\lambda > 0$ .

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív definit, ha minden  $\lambda$  sajátérték:  $\lambda < 0$ .

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva  $- + - +$  de mínusszal indul.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív szemidefinit, ha minden  $\lambda$  sajátérték:  $\lambda \geq 0$ .

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív szemidefinit, ha minden  $\lambda$  sajátérték:  $\lambda \leq 0$ .

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az  $A$   $n \times n$ -es [mátrix](#) indefinit, ha van  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  sajátérték, hogy  $\lambda_1 > 0$  és  $\lambda_2 < 0$ .

Ha  $\det(A) \neq 0$  és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha  $A$   $n \times n$ -es szimmetrikus [mátrix](#) és  $\underline{x}$  egy vektor  $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor a

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$  kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektorra  $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektorra  $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektorra  $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektorra  $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan  $\underline{x} \neq \underline{0}$  és  $\underline{y} \neq \underline{0}$ , hogy  $Q(\underline{x}) < 0$  és  $Q(\underline{y}) > 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\varphi$  leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely  $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$  vektorokra és  $\lambda \in \mathbb{R}$  számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $V_1 \rightarrow V_2$  lineáris leképezésnél  $V_2$ -nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és  $Im\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis  $\underline{0}$  képe mindig  $\underline{0}$ , de előfordulhat, hogy más  $V_1$ -beli [vektorok](#) képe is nullvektor lesz. Ezen [vektorok](#) halmazát nevezzük a leképezés magterének és  $Ker\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja  $V_1$  dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a [mátrixok](#) pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist  $V_1$ -ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\varphi$  leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a  $(\varphi)_b$  mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

$$\varphi^{-1} \text{ mátrixa } (\varphi)_b^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\varphi \circ \mu$  leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy  $n \times n$ -es mátrixnak van  $n$  darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A  $\varphi$  lineáris leképezésnek a  $\underline{b}_1 \underline{b}_2 \dots \underline{b}_n$  bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1) \varphi(\underline{b}_2) \varphi(\underline{b}_3) \dots \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is  $V_1$ -ben, a leképezés mátrixa mindig egy  $n \times n$ -es mátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van  $n$  darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak  $V_1$ -ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $V_1 \rightarrow V_2$  lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret  $Hom(V_1, V_2)$ -nek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha  $A$  és  $B$  olyan mátrixok, hogy létezik egy  $C$  mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---