MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MŰSZAKI MATEMATIKA 1 tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 12.

Tartalomjegyzék

Komplex számok **2**
Halmazok, rendezett párok, leképezések, matematikai logika **5**
Hatványozás, logaritmus, exponenciális és logaritmusos egyenletek **8**
Függvények **10**
Összetett függvény és inverz függvény **13**
Sorozatok határértéke **14**
Sorok **16**
Függvények határértéke és folytonossága **18**
A határérték precíz definíciója **19**
Deriválás **20**
Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete **23**
Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok **24**
Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok **25**
L’Hôpital szabály **26**
Határozatlan integrálás, primitív függvény **27**
Határozott integrálás **31**
Mátrixok és vektorok **32**
Determináns, adjungált, kvadratikus alakok **37**
Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés **43**
Elsőfokú egyenletek **44**
Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése **45**
Egyenlőtlenségek **46**
Másodfokú egyenletek **47**
Számtani és mértani sorozatok **48**

Komplex számok

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

A két komplex szám összege:
$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

A két komplex szám különbsége:
$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

A két komplex szám szorzata:
$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c)i$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A komplex számok egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tegelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. Az imaginárius tengely egysége az i, ami olyan, mint a valós tengelyen az 1, csak éppen egy meglehetősen furcsa dolgot tud. Az imaginárius egység egy olyan komplex szám, aminek a négyzete -1 és i-vel jelöljük, azaz

$$i^2 = -1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A komplex számokat azért hívjuk "komplex"nek, mert két részből tevődnek össze. Egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tegelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. A komplex számok egy valós számból és egy imaginárius számból tevődnek össze:

$$z = a + bi$$

Itt a és b valós számok, az i pedig az imaginárius egység, ami azt tudja, hogy $i^2 = -1$.

Magukat a valós számokat és az imaginárius számokat is komplex számnak tekinthetjük. A valós számok olyan komplex számok, amelyeknek az imaginárius része nulla, míg az imaginárius számok olyankomplex számok, amelyeknek a valós része nulla. A komplex számok egy síkon, az úgynevezett komplex számsíkon helyezkednek el. Kicsit olyanok, mint a koordinátageometriában a kétdimenziós sík vektorai, ahol az i és j bázisvektorkat szokás használni, az x tengelynél az i és az y tengelynél a j vektorral. Ennek az analógiának köszönhetően vannak, akik az imaginárius számokat nem is i-vel, hanem j-vel jelölik. Bár ez segítheti erősíteni az analógiát a sík vektoraival, de mégis zavaró, mivel aki komolyabban is fogalakozik a komplex számokkal, a hivatalos jelöléssel fog találkozni, ahol az imaginárius tengelyen i-k vannak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A valós számokat úgy érdemes elképzelni, mint egy koordinátarendszer x tengelyét. És minden helyet ki is töltenek a valós számok ezen a számegyenesen. A komplex számok egy valós és egy imaginárius (képzetes) részből épülnek föl, és szemléltetésükhöz nem egy, hanem két koordinátatengelyre van szükség. Az x tengelyen vannak a valós számok, az y tengelyen pedig az imaginárius, vagyis a képzetes számok. A valós számok tengelyén az egység a szokásos 1, míg az imaginárius számok tengelyén az egység az i. A kétb tengely által kifeszített síkot nevezzük komplex számsíknak, vagy másknt Gauss-féle számsíknak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám:

$z = a + bi$

Komplex számoknak van ilyenje, hogy imaginárius egység:

$i^2 = -1$

Komplex számok konjugáltja:

$\bar{z} = a - bi$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám: $z = a + bi$

Ennek a komplex számnak az abszolútértéke:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ahol

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos\theta = \frac{a}{r}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám trigonometrikus alakban: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Komplex számok szorzása trigonometrikus alakban:

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

Komplex számok osztása trigonometrikus alakban:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban: $r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik hatványa:

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban: $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két komplex szám exponenciális alakban: $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

Komplex számok szorzása exponenciális alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Komplex számok osztása exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban: $z = re^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik hatványa:

$$z^n = r^n e^{ni\theta}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban: $z = re^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az n-edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Halmazok, rendezett párok, leképezések, matematikai logika

Vannak az A és B halmazok.

Az A és B halmazok uniója: Azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.

Jele: $A \cup B$

Az A és B halmazok metszete: Azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jele: $A \cap B$

Az A és B halmazok különbsége: Azon elemek halmaza, amelyek az A halmazba benne vannak, de a B halmazba nem.

Jele: $A \setminus B$

Az A halmaz komplementere a H alaphalmazon nézve: Az alaphalmaz azon elemeinek halmza, amelyek nincsenek benne az A-ban.

Jele: $\overline{A}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logikai szita formula két halmazra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A logikai szita formula három halmazra:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az első De Morgan azonosság azt mondja, hogy a metszet komplementere pont megegyezik a komplementrek uniójával:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A második De Morgan azonosság pedig azt mondja, hogy az unió komplementere éppen megegyezik a komplementerek metszetével:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát hatványhalmaznak nevezzük.

Pl.: az $A = \{x, y, z\}$ halmaz hatványhalmaza:
$$P(A) = \{\emptyset . \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Érdemes megjegyezni, hogy $A \triangle A = \emptyset$ és $A \triangle \emptyset = A$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \qquad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \qquad \log(\text{ez itt} > 0) \qquad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az univerzális kvantor egy jelölése a "minden" kifejezésnek.

Jele: $\forall$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egzisztenciális kvantor egy jelölése a "létezik" vagy "van olyan" kifejezésnek.

Jele: $\exists$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás negációja (vagy tagadása) egy egyváltozós művelet. Egy A kijelentés negációja az a kijelentés, amely akkor igaz, ha A hamis és akkor hamis, ha A igaz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthetjük, hogy az igaz vagy hamis.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \wedge B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \vee B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A "ha A, akkor B" kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet nevezzük implikációnak. Az implikáció akkor hamis, ha A igaz és B hamis, minden más esetben igaz.

Jele: $A \Rightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az ekvivalencia egy olyan logikai művelet, amikor $A \Rightarrow B$ és $A \Leftarrow B$. Az ekvivalencia akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, különben hamis.

Jele: $A \Leftrightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) = A \Leftrightarrow \neg B$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunktív normálforma, röviden DNF egy olyan alakja egy logikai formuláknak, ahol a művelet a változóinak vagy negáltjainak konjunkcióinak diszjunkciója.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatványozás, logaritmus, exponenciális és logaritmusos egyenletek

Hatványozás azonosságai:

$a^n a^k = a^{n+k}$

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(a^n)^k = a^{nk} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális függvénynek nevezzük az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket, ahol $a > 0$ valós szám.

Az exponenciális függvények meglehetősen fontosak a matematikában, sőt nem csak a matematikában.

Ilyen függvények írják le a baktériumok szaporodását, a radioaktív elemek bomlását, a számítógépek teljesítményének növekedését és még rengeteg más dolgot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$log_a x$ azt mondja meg, hogy a-t hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy x-et kapjunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a \sqrt[n]{x^k} = \frac{k}{n} \log_a x$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális egyenletek megoldásának kulcsa, hogy a két oldalt azonos hatványalapra hozzuk, mert ekkor

$$a^x = a^b \Rightarrow x = b$$

Így hát az egyenlet két oldalát addig alakítgatjuk a hatványozás azonosságainak segítségével, amíg erre az alakra nem jutunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenlőtlenséget ugyanúgy kell mint az egyenletet, amire figyelni kell csupán az az, hogy amikor elhagyjuk a hatványalapot, nem mindegy, hogy az 1-nél nagyobb, vagy kisebb szám-e.

Ha az alap 1-nél nagyobb szám, akkor nem történik semmi, az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megmarad.

Ha viszont az alap 1-nél kisebb szám, akkor az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logaritmikus egyenletek megoldásának lényege, hogy ilyen alakra jussunk:

$$log_a x = b$$

Mert innen a logaritmus definíciója miatt az következik, hogy

$$x = a^b$$

Ahhoz, hogy a bonyolúltabb egyenleteket is ilyen alakra hozzuk, a logaritmus azonosságait használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \qquad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \qquad \log(\text{ez itt} > 0) \qquad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összetett függvény és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönesen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorozatok határértéke

$\frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \frac{1}{n^3} \to 0 \quad \frac{1}{n^k} \to 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$n \to \infty \quad n^2 \to \infty \quad n^3 \to \infty \quad n^k \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{n} \to \infty \quad \sqrt[3]{n} \to \infty \quad \sqrt[4]{n} \to \infty \quad \sqrt[k]{n} \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$q^n \to \begin{cases} \infty \text{ ha } q > 1 \\ 0 \text{ ha } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ ha } q = 1 \\ \text{div ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha$

$\left(1 + \frac{\alpha}{\text{IZÉ}}\right)^{\text{IZÉ}} \to e^\alpha$

Ha IZÉ $\to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van egy olyan valós szám, ami a sorozat határértéke.

Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens.

Egy sorozat lehet azért is divergens, mert végtelenbe tart, és lehet azért is, mert az égvilágon nem tart sehova. A sehova nem tartó sorozatok mindig oszcillálló sorozatok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to A$ és $c_n \to A$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$ akkor $b_n \to A$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \sqrt[n]{n} \to 1 \quad \sqrt[n]{n^k} \to 1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A végtelenbe tartó sorozatok nagyságrendi sorrendje azt mondja meg, hogy melyik sorozat milyen ütemben tart a végtelenbe. Minél nagyobb nagyságrendű egy sorozat, annál gyorsabban tart a végtelenbe. A nagysagrendi rangsor:

$$\log_n << \sqrt[k]{n} << n^k << q^n << n! << n^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyoldali rendőr-elv arról szól, hogyha egy sorozat végtelenbe tart, akkor elég alulról becsülni egy másik végtelenhez tartó sorozattal, és az egyoldali rendőr-elv szerint az eredeti sorozat is végtelenbe fog tartani. Amikor pedig az eredeti sorozat mínusz végtelenbe tart, akkor az egyoldali rendőr-elvet használva felülről becslünk egy másik mínusz végtelenbe tartó sorozattal:

Ha $a_n \to \infty$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n$ akkor $b_n \to \infty$.

Ha $a_n \to -\infty$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \geq b_n$ akkor $b_n \to -\infty$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha bármilyen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

Ennél precizebben az a_n sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén végtelen sok tagja van, hogy $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza legyen $\{A_i\}$

Ekkor a sorozat limesz inferiorja:

$$\lim\inf a_n = \inf\{A_i\}$$

És a limesz szuperior:

$$\lim\sup a_n = \sup\{A_i\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorok

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$

Ha $|q| < 1$ akkor a mértani sor konvergens és összege

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $|q| \geq 1$ akkor a sor divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszegsorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$ monoton csökkenő sorozat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to 0$ pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$\sum(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól $a_n \leq b_n$ akkor

$\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ is konvergens

$\sum a_n$ divergens $\Rightarrow$ $\sum b_n$ is divergens

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol r a konvergenciasugár.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények határértéke és folytonossága

Az $f(x)$ függvény folytonos az a-ban, ha értelmezve van az a-ban, létezik és véges a határértéke az a-ban, és ami a lényeg:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a-ban, ha létezik véges határértéke az a-ban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Megszüntethető szakadás:

Ha létezik véges határérték az a-ban, de ez nem egyezik meg a függvényértékkel, akkor megszüntethető szakadása van.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

Nem megszüntehető szakadás, ugrás:

Ha a bal és jobb oldali határérték két különböző szám az a-ban, akkor a szakadás nem megszüntethető és ugrásnak hívjuk.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \text{másik szám} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Nem megszüntethető, nem véges szakadás:

Ha a bal és jobb oldali határérték nem is véges az a-ban, akkor pláne nem tehető folytonossá a függvény.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nem megszüntethető oszcilláló szakadás:

Végül meglehetősen patologikus esetek is vannak, amikor még csak jobb vagy bal oldali határérték sem létezik.

$$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{\text{IZÉ}\to 0} \frac{\sin \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{\text{IZÉ}\to 0} \frac{1-\cos \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}^2} = \frac{1}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A határérték precíz definíciója

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

f és g deriválható függvények, és c valós szám esetén a deriválási szabályok:

$(cf)' = cf'$ $\left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$

A deriválási szabályok megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a trötek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorolni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvények közt fennálló azonosságok:

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\cosh x$ függvény inverze:

$\text{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

A $\sinh x$ függvény inverze:

$\text{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

A $\tanh x$ függvény inverze:

$\text{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\text{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\text{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\text{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok

Az elaszticitás képlete:

$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

Egy függvény elaszticitása azt mondja meg, hogyha 1%-kal növeljük az x-et, akkor hány százalékkal változik a függvény értéke.

$E = 0$ Teljesen rugalmatlan

$|E| < 1$ Rugalmatlan

$|E| = 1$ Egységnyi rugalmasságú

$|E| > 1$ Rugalmas

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok

Ha a függvény deriváltja pozitív, akkor a függvény nő,

Ha a függvény deriváltja negatív, akkor a függvény csökken.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

A függvény hangulatáról a második derivált szolgáltat információt.

Ha a második derivált negatív, akkor a függvény konkáv, ha pozitív, akkor konvex

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény stacionárius pontja x_0, ha f differenciálható az x_0 környezetében és $f'(x_0) = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \quad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \quad \log(\text{ez itt} > 0) \quad \text{tört nevező} \neq 0$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

L’Hôpital szabály

Legyen f és g deriválható az a szám környezetében (kivéve esetleg a-ban) és tegyük fel, hogy itt $g'(x) \neq 0$.

Ekkor, ha $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, ekkor a L’Hôpital-szabály (vagy L'Hospital-szabály) szerint:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$e^{-\infty} = 0 \quad e^{\infty} = \infty$

$\ln 0 = -\infty \quad \ln \infty = \infty$

$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{+0} = +\infty \quad \frac{1}{-0} = -\infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$-et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \ln |ax+b| \frac{1}{a} + c$

$\int e^{ax+b} \, dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$

$\int A^{ax+b} \, dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$

$\int \cos(ax+b) \, dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \sin(ax+b) \, dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \, dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \, dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} \, dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$\int c \cdot f = c \cdot \int f$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$\int f + g = \int f + \int g$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int f\left(g(x)\right)\cdot g'\left(x\right)=F\left(g(x)\right)+c$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnos az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$\int e^g\cdot g'=e^g+c \qquad \int a^g\cdot g'=\frac{a^g}{\ln a}+c$

$\int\frac{g'}{1+g^2}=\arctan g+c \qquad \int\frac{g'}{\sqrt{1-g^2}}=\arcsin g+c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$\int\frac{ax+b}{cx+d}\,dx=\int\frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}\,dx=\int\frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d}+\frac{E}{cx+d}\,dx=$

$=\int\frac{a}{c}+\frac{E}{cx+d}\,dx=\frac{a}{c}x+E\ln|cx+d|\frac{1}{c}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$\int\frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}\,dx \qquad \sqrt{cx+d}=u$

$\int f\left(g(x)\right)\,dx \qquad g(x)=u$

$\sqrt{1-f} \qquad f=sin^2u$

$\sqrt{1+f} \qquad f=\sinh^2u$

$\sqrt{f-1} \qquad f=\cosh^2u$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = A\int \frac{1}{ax+b}\,dx = A\ln|ax+b|\cdot\frac{1}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c}\,dx\right) =$$

$$= \frac{A}{2a}\left(\ln|ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)\cdot\sqrt{D}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az $u=\tan\frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozott integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor aNewton Leibniz formula szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f $[a,b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \le I \le S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad m_i = \inf\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \sup\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha integráljuk a pozitív számegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} \text{ ha } \alpha < 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \ge 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ ha } \alpha > 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \le 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mátrixok és vektorok

Egy nXk-as mátrix tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

pl.: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor amátrix összes elemét meg kell szorozni a számmal.

pl.: $3\cdot\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor amátrix minden elemét osztani kell a számmal.

pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

A mátrixok összeadása kommutatív, azaz

$$A+B=B+A$$

És asszociatív, azaz

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix szorzata akkor létezik, ha a bal oldalimátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldalimátrix sorainak számával.

Ha az A mátrix m x n-es a B mátrix pedig n x k-s, akkor az eredménymátrix m x k-s lesz.

Az eredménymátrix i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldalimátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali mátrix j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

pl.: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A mátrix összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kvadratikus mátrix négyzetes mátrix vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diagonális mátrix olyan kvadratikus mátrix, aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységmátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egységmátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

pl.: $I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz mátrix jele A^{-1} és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$A \cdot A^{-1} = I$ (jobb inverz)

$A^{-1} \cdot A = I$ (bal inverz)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

Pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

Pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

Pl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

Pl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A skaláris szorzat két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$

nem asszociatív: $\left(\underline{a}^T \cdot \underline{b}\right)^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot \left(\underline{b}^T \cdot \underline{c}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektor diadikus szorzata egy mátrix. Lássuk milyen.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk jobbról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik oszlopát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk balról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik sorát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Determináns, adjungált, kvadratikus alakok

Ha az A egy $n\ x\ n$-es mátrix, akkor determinánsa

$$det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}$$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 2x2-es mátrix determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A 3x3-as mátrixok determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A egy nxn-es mátrix, akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az A mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG<n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG=n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A mátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt egy 3x3-as mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt egy 2x2-es mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a22 \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a11 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az adjungált egyik legnagyobb haszna, hogy segítségével meg tudunk alkotni egy képletet a négyzetesmátrixok inverzére.

Itt is van:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenletrendszerek megoldására is megalkothatunk egy új képletet az adjungált segítségével.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Legalábbis abban az esetben, hogyha az A nxn-es invertálható mátrix.

Az egyenletrendszer megoldását úgy kapjuk meg, hogy beszorzunk az A mátrix inverzével...

$$\underline{x} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) \cdot \underline{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemek által generált Vandermonde-determináns első sorában x_1 hatványai szerepelnek, aztán a második sorában x_2 hatványai jönnek, és így tovább.

A Vandermonde-determinánst ezzel az egyszerű képlettel ki tudjuk számolni:

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j<i}(x_i - x_j)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix sarok főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarok mátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2\cdot 7 - 3\cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarok mátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2\cdot 7 - 3\cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + -+$ de mínusszal indul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A nxn-es szimmetrikus mátrix és $\underline{x}$ egy vektor R^n-ben, akkor a

$$Q(x) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés

Egy a nem negatív szám négyzetgyöke az a nem negatív szám, aminek a négyzete a.

$a \geq 0 \qquad \sqrt{a} \geq 0 \qquad \sqrt{a}^2 = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0,\ b \geq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy a szám köbgyöke az a szám, aminek a köbe a.

$a \in R \qquad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \in R,\ b \in R$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad a \in R,\ b \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökvonás másképpp viselkedik páros, illetve páratlan gyökkitevő esetén, így kétféle definíciónk lesz.

Egy a nem negatív szám $n = 2k$-adik gyöke az a nem negatív szám, amire:

$\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$

Egy tetszőleges a szám $n = 2k + 1$-edik gyöke az a szám, amire:

$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú egyenletek

A mérleg elv lényege, hogy amikor megoldunk egy egyenletet, az egyenlőségjel mindkét oldalán ugyanazokat a műveleteket kell elvégeznünk. Az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadhatjuk, vagy az egyenlet mindkét oldalából ugyanazt a számot kivonhatjuk. És az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nem nulla számmal megszorozhatjuk, vagy mindkét oldalt ugyanazzal a nem nulla számmal eloszthatjuk. Vagyis:

- ha elveszünk egy számot az egyik oldalról, akkor a másik oldalról is el kell venni

- ha hozzáadunk egy számot az egyik oldalhoz, akkor a másik oldalhoz is hozzá kell adni

-ha szorozzuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is szorozni kell ugyanezzel a számmal

-ha osztjuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is osztani kell ugyanezzel a számmal

Az összeadás, kivonás és szorzás egymásutáni lépéseivel jutunk el a megoldáshoz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A megoldás lényege, hogy gyűjtsük össze az x-eket az egyik oldalon, a másik oldalon pedig a számokat, a végén pedig leosztunk az x együtthatójával.

Ha törtet is látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha törtet látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Figyeljünk rá, hogy ilyenkor az egyenlet minden tagját meg kell szorozni (a tagokat $+$, $-$ vagy $=$ jelek választják el egymástól...).

Miután megszabadultunk a törtektől az egyenlet megoldásának lépései a szokásosak a mérleg elv segítségével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy

$|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat divergens, és határértéke plusz végtelen, ha bármely $M > 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M < a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat divergens, és határértéke minusz végtelen, ha bármely $M < 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M > a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat oszcillálva divergens, ha nincs semmilyen határértéke, vagysi sem egy valós számhoz, sem plusz vagy minusz végtelenbe nem tart.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenséget ugyanúgy kell megoldani, mint egyenletet. Amire figyelnünk kell, hogy ha negatív számmal szorzunk, az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyik megoldás az, hogy szorzattá alakítjuk, aztán pedig számegyenesen ábrázoljuk a tényezők előjelét.

A második megoldás, hogy ábrázoljuk vázlatosan a másodfokú függvényt, amit az egyenlőtlenségből alkotunk, majd leolvassuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Másodfokú egyenletek

Ha a másodfokú egyenlet így néz ki:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Akkor a megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodfokú egyenlet megoldóképletének gyök alatti részét nevezzük diszkriminánsnak.

$$D = b^2 - 4ac$$

Ez dönti el, hogy a másodfokú egyenletnek hány valós megoldása lesz.

Ha a diszkrimináns nulla, akkor csak egy.

Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek két valós megoldása van.

Ha pedig negatív, akkor az egyenletnek nincs valós megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Viète-formulák nem valami titkós gyógyszer hatóanyag, hanem a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket írja le:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Olyankor, amikor a másodfokú tag együtthatója 1, a Viète-formulák is egyszerűbbek:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 x_2 = q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számtani és mértani sorozatok

Azokat a sorozatokat, ahol minden tag pontosan ugyanannyival nagyobb az előző tagnál, számtani sorozatnak nevezzük.

A sorozat differenciája az a szám, amennyivel mindegyik tag nagyobb az előzőnél.

A sorozat első elemét a_1-gyel, a differenciát d-vel jelöljük.

A számtani sorozat n-edik tagját így tudjuk kiszámolni:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Az első n tagjának összegét pedig így:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

A számtani sorozatok tehát olyan legalább három számból álló számsorozatok ahol az egymással szomszédos tagok (egy tag, és az őt megelőző tag) különbsége állandó. Ezt az állandót, amely minden sorozatnál más és más, a sorozat különbségének, vagy másként differenciájának nevezzük, és d-vel jelöljük. A számtani sorozat elnevezés onnan ered, hogy a sorozatnak bármely három egymást követő tagjára igaz, hogy a három szám közül a középső a két másik számnak a számtani közepe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mértani sorozatnak nevezzük azokat a legalább három tagból álló sorozatokat, ahol bármely két egymást követő tag (egy tag és az őt megelőző tag) hányadosa állandó. Ezt a hányadost kvóciensnek nevezzük és q-val jelöljük. Egy kicsit egyszerűbben megfogalmazva egy sorozat akkor mértani sorozat, ha minden tagja pontosan q-szor annyi, mint az előző tag, ahol q egy tetszőleges nem nulla szám, és ezt hívjuk a sorozat hányadosának, vagy másként kvóciensének.

Vagyis a sorozat kvóciense vagy hányadosa az a szám, ahányszor mindegyik tag nagyobb az előzőnél.

A sorozat első elemét a_1-gyel, a kvóciensét vagy hányadosát q-val jelöljük.

A mértani sorozat n-edik tagját így tudjuk kiszámolni:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Az első n tagjának összegét pedig így:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Olyankor, amikor $q = 1$ ez az összegképlet nem működik. Ilyenkor a sorozat minden tagja az előző tag egyszerese, ami azt jelenti, hogy a sorozatnak minden tagja ugyanannyi. Ekkor az összegképlet így néz ki: $S_n = a_1 \cdot n$

A mértani sorozat elnevezés onnan ered, hogy a nem negatív tagú mértani sorozatokra igaz, hogy bármely három egymást követő tagja közül a középső tag a másik két tag mértani közepe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot
