MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

GAZDASÁGI SZÁMÍTÁSOK ALAPJAI tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 14.

Tartalomjegyzék

Függvények tulajdonságai és ábrázolása........ **2**
Összetett függvény és inverz függvény........ **4**
Deriválás........ **5**
Differenciálhatóság, érintő egyenlete........ **7**
Függvényvizsgálat, gazdasági feladatok........ **8**
Kamatos kamat és pénzügyi számítások........ **9**
Mátrixok és vektorok........ **10**
Elemi bázistranszformáció, egyenletrendszerek........ **15**
Kétváltozós függvények........ **17**

Függvények tulajdonságai és ábrázolása

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \quad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \quad \log\left(\text{ez itt} > 0\right) \quad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összetett függvény és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönösen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

f és g deriválható függvények, és c valós szám esetén a deriválási szabályok:

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f\left(g(x)\right))' = f'\left(g(x)\right) g'(x)$$

A deriválási szabályok megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a trötek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f\left(g(x)\right))' = f'\left(g(x)\right) g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorlni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Differenciálhatóság, érintő egyenlete

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvényvizsgálat, gazdasági feladatok

Az elaszticitás képlete:

$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

Egy függvény elaszticitása azt mondja meg, hogyha 1%-kal növeljük az x-et, akkor hány százalékkal változik a függvény értéke.

$E = 0$ Teljesen rugalmatlan

$|E| < 1$ Rugalmatlan

$|E| = 1$ Egységnyi rugalmasságú

$|E| > 1$ Rugalmas

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kamatos kamat és pénzügyi számítások

A kamatos kamat lényege, hogy beteszünk a bankba egy összeget, amit tőkének neveznek és T_0-lal jelölünk. Erre egy bizonyos időszak alatt p%-os kamatot kapunk. Eddig ezt úgy hívjuk, hogy egyszerű kamat. Attól lesz belőle kamatos kamat, hogy a kamattal megnövelt összeget újra kamatoztatjuk, és így elindul a kamatos kamat folyamata. Magának a kamatos kamatnak a képlete nagyon egyszerű, csupán néhány dologra kell figyelni, amiket részletesen be is mutatunk a kamatos kamat feladatok megoldása közben.

A T_0 összegből n darab kamatperiódus után a következő T_n összeg lesz, ha minden periódusban p-os a kamat:

$$T_n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

A képletben p jelenti a kamatot és n pedig a kamatperiódusok számát. Ezek azok a periódusok, amiknek a végén jóváírják a kamatot. Hogyha a kamatot havonta írják jóvá, akkor a periódusok hónapok, és n a hónapok száma. Hogyha féléves jóváírás van, akkor n a félévek száma, hogyha évente írják jóvá a kamatot akkor n az évek száma és így tovább. Vannak mindenféle bonyolult képletek, amik ezt megpróbálják kezelni, de kár foglalkozni velük, sokkal egyszerűbb megérteni a dolog lényegét és a sima kamatos kamat képletet használn. Mindig azt a kérdést tegyük föl magunknak, hogy milyen gyakorisággal írják jóvá a kamatot, hány jóváírás van és egy periódusra mekkora kamat jut.

Ha például az éves kamat 6% és évenkénti a kamatozás, akkor $p = 6$. Ha a jóváírás félévente történik, akkor a 6%-os éves kamatot is felezzük, tehát $p = 3$, vagy éppen havi jóváírás esetén az éves kamatot 12-vel kell osztani és így $p = 0,5$. Ha ezt a gondolatmenetet megértjük, a kamatos kamat képlete őrülten egyszerű.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

T összeget n darab perióduson keresztül azonos méretű pénzösszegekben törlesztünk. Minden periódusban p%-os a kamat. Az egy periódusra eső törlesztőrészlet:

$$a = T \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

n darab perióduson keresztül azonos méretű a pénzösszegeket fizetünk be, periódusonkénti p%-os kamat mellett. Az n periódus végén összegyűlt pénzmennyiség:

$$S_n = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mátrixok és vektorok

Egy nXk-as mátrix tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor amátrix összes elemét meg kell szorozni a számmal.

pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor amátrix minden elemét osztani kell a számmal.

pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

A mátrixok összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix szorzata akkor létezik, ha a bal oldali mátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali mátrix sorainak számával.

Ha az A mátrix m x n-es a B mátrix pedig n x k-s, akkor az eredménymátrix m x k-s lesz.

Az eredménymátrix i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali mátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali mátrix j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

pl.: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A mátrix összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kvadratikus mátrix négyzetes mátrix vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diagonális mátrix olyan kvadratikus mátrix, aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységmátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egységmátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

pl.: $I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz mátrix jele A^{-1} és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$A \cdot A^{-1} = I$ (jobb inverz)

$A^{-1} \cdot A = I$ (bal inverz)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

Pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

Pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

Pl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

Pl.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A skaláris szorzat két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$

nem asszociatív: $\left(\underline{a}^T \cdot \underline{b}\right)^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot \left(\underline{b}^T \cdot \underline{c}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektor diadikus szorzata egy mátrix. Lássuk milyen.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elemi bázistranszformáció, egyenletrendszerek

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x-ek együtthatóiból álló mátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlósmátrix alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak $\underline{e}$-s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázistranszformáció során fent maradt x-ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány x_i fönt marad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett mátrix pedig az A mátrix inverze lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x-essel, akkor marad

Az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y-ossel, akkor marad

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f_x'(x,y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f_y'(x,y)$$

Második lépés:

$$f_x'(x,y) = 0$$

$$f_y'(x,y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f_{xx}''(x,y) & f_{xy}''(x,y) \\ f_{yx}''(x,y) & f_{yy}''(x,y) \end{bmatrix}$$

Ha $det \begin{bmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{bmatrix}$ pozitív, és $f_{xx}'' > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{bmatrix}$ pozitív, és $f_{xx}'' < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $det \begin{bmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét parciális deriváltat nulla, az $f(x,y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \cdots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű deriváltakból képzett mátrix, amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f''} = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot