MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

GAZDASÁGI MATEK 1 tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 04. 14.

Tartalomjegyzék

Függvények

Adott az $f: A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \quad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \quad \log(\text{ez itt} > 0) \quad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összetett függvények és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönesen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kamatos kamat és pénzügyi számítások

A kamatos kamat lényege, hogy beteszünk a bankba egy összeget, amit tőkének neveznek és T_0-lal jelölünk. Erre egy bizonyos időszak alatt p%-os kamatot kapunk. Eddig ezt úgy hívjuk, hogy egyszerű kamat. Attól lesz belőle kamatos kamat, hogy a kamattal megnövelt összeget újra kamatoztatjuk, és így elindul a kamatos kamat folyamata. Magának a kamatos kamatnak a képlete nagyon egyszerű, csupán néhány dologra kell figyelni, amiket részletesen be is mutatunk a kamatos kamat feladatok megoldása közben.

A T_0 összegből n darab kamatperiódus után a következő T_n összeg lesz, ha minden periódusban p-os a kamat:

$$T_n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

A képletben p jelenti a kamatot és n pedig a kamatperiódusok számát. Ezek azok a periódusok, amiknek a végén jóváírják a kamatot. Hogyha a kamatot havonta írják jóvá, akkor a periódusok hónapok, és n a hónapok száma. Hogyha féléves jóváírás van, akkor n a félévek száma, hogyha évente írják jóvá a kamatot akkor n az évek száma és így tovább. Vannak mindenféle bonyolult képletek, amik ezt megpróbálják kezelni, de kár foglalkozni velük, sokkal egyszerűbb megérteni a dolog lényegét és a sima kamatos kamat képletet használn. Mindig azt a kérdést tegyük föl magunknak, hogy milyen gyakorisággal írják jóvá a kamatot, hány jóváírás van és egy periódusra mekkora kamat jut.

Ha például az éves kamat 6% és évenkénti a kamatozás, akkor $p = 6$. Ha a jóváírás félévente történik, akkor a 6%-os éves kamatot is felezzük, tehát $p = 3$, vagy éppen havi jóváírás esetén az éves kamatot 12-vel kell osztani és így $p = 0,5$. Ha ezt a gondolatmenetet megértjük, a kamatos kamat képlete őrülten egyszerű.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot]

T összeget n darab perióduson keresztül azonos méretű pénzösszegekben törlesztünk. Minden periódusban p%-os a kamat. Az egy periódusra eső törlesztőrészlet:

$$a = T \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot]

---

n darab perióduson keresztül azonos méretű a pénzösszegeket fizetünk be, periódusonkénti p%-os kamat mellett. Az n periódus végén összegyűlt pénzmennyiség:

$$S_n = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot]

Sorozatok határértéke

$\frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \frac{1}{n^3} \to 0 \quad \frac{1}{n^k} \to 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$n \to \infty \quad n^2 \to \infty \quad n^3 \to \infty \quad n^k \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{n} \to \infty \quad \sqrt[3]{n} \to \infty \quad \sqrt[4]{n} \to \infty \quad \sqrt[k]{n} \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$q^n \to \begin{cases} \infty \text{ ha } q > 1 \\ 0 \text{ ha } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ ha } q = 1 \\ \text{div ha } q \le -1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha$

$\left(1 + \frac{\alpha}{\text{IZÉ}}\right)^{\text{IZÉ}} \to e^\alpha$

Ha IZÉ $\to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van egy olyan valós szám, ami a sorozat határértéke.

Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens.

Egy sorozat lehet azért is divergens, mert végtelenbe tart, és lehet azért is, mert az égvilágon nem tart sehova. A sehova nem tartó sorozatok mindig oszcillálló sorozatok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to A$ és $c_n \to A$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \le b_n \le c_n$ akkor $b_n \to A$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \sqrt[n]{n} \to 1 \quad \sqrt[n]{n^k} \to 1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A végtelenbe tartó sorozatok nagyságrendi sorrendje azt mondja meg, hogy melyik sorozat milyen ütemben tart a végtelenbe. Minél nagyobb nagyságrendű egy sorozat, annál gyorsabban tart a végtelenbe. A nagysagrendi rangsor:

$$\log_n << \sqrt[k]{n} << n^k << q^n << n! << n^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha bármilyen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

Ennél precizebben az a_n sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén végtelen sok tagja van, hogy $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza legyen $\{A_i\}$

Ekkor a sorozat limesz inferiorja:

$$\liminf a_n = \inf \{A_i\}$$

És a limesz szuperior:

$$\limsup a_n = \sup \{A_i\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy

$|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat divergens, és határértéke plusz végtelen, ha bármely $M > 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M < a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat divergens, és határértéke minusz végtelen, ha bármely $M < 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M > a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat oszcillálva divergens, ha nincs semmilyen határértéke, vagysi sem egy valós számhoz, sem plusz vagy minusz végtelenbe nem tart.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Monotonitás és korlátosság

Az a_n sorozat szigorúan monoton nő, ha $0 < a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat szigorúan monoton csökken, ha $0 > a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton nő, ha $0 \leq a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton csökken, ha $0 \geq a_{n+1} - a_n$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot]

Függvények határértéke

Az $f(x)$ függvény folytonos az a-ban, ha értelmezve van az a-ban, létezik és véges a határértéke az a-ban, és ami a lényeg:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a-ban, ha létezik véges határértéke az a-ban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Megszüntethető szakadás:

Ha létezik véges határérték az a-ban, de ez nem egyezik meg a függvényértékkel, akkor megszüntethető szakadása van.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

Nem megszüntehető szakadás, ugrás:

Ha a bal és jobb oldali határérték két különböző szám az a-ban, akkor a szakadás nem megszüntethető és ugrásnak hívjuk.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \text{másik szám} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Nem megszüntethető, nem véges szakadás:

Ha a bal és jobb oldali határérték nem is véges az a-ban, akkor pláne nem tehető folytonossá a függvény.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nem megszüntethető oszcilláló szakadás:

Végül meglehetősen patologikus esetek is vannak, amikor még csak jobb vagy bal oldali határérték sem létezik.

$$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{\text{IZÉ}\to 0} \frac{\sin \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{\text{IZÉ}\to 0} \frac{1-\cos \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}^2} = \frac{1}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

f és g deriválható függvények, és c valós szám esetén a deriválási szabályok:

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

A deriválási szabályok megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a trötek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorlni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvények közt fennálló azonosságok:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\cosh x$ függvény inverze:

$\text{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

A $\sinh x$ függvény inverze:

$\text{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

A $\tanh x$ függvény inverze:

$\text{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\text{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\text{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\text{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Differenciálhatóság és az érintő egyenlete

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

L'Hôpital szabály

Legyen f és g deriválható az a szám környezetében (kivéve esetleg a-ban) és tegyük fel, hogy itt $g'(x) \neq 0$.

Ekkor, ha $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, ekkor a L'Hôpital-szabály (vagy L'Hospital-szabály) szerint:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$e^{-\infty} = 0 \quad e^{\infty} = \infty$

$\ln 0 = -\infty \quad \ln \infty = \infty$

$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{+0} = +\infty \quad \frac{1}{-0} = -\infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Könnyebb függvényvizsgálatok, gazdasági feladatok

Az elaszticitás képlete:

$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

Egy függvény elaszticitása azt mondja meg, hogyha 1%-kal növeljük az x-et, akkor hány százalékkal változik a függvény értéke.

$E = 0$ Teljesen rugalmatlan

$|E| < 1$ Rugalmatlan

$|E| = 1$ Egységnyi rugalmasságú

$|E| > 1$ Rugalmas

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Teljes függvényvizsgálat

Ha a függvény deriváltja pozitív, akkor a függvény nő,

Ha a függvény deriváltja negatív, akkor a függvény csökken.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

A függvény hangulatáról a második derivált szolgáltat információt.

Ha a második derivált negatív, akkor a függvény konkáv, ha pozitív, akkor konvex

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény stacionárius pontja x_0, ha f differenciálható az x_0 környezetében és $f'(x_0) = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \qquad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \qquad \log(\text{ez itt} > 0) \qquad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$-et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor a Newton Leibniz formula szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \ln |ax+b| \frac{1}{a} + c$

$\int e^{ax+b} \, dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$

$\int A^{ax+b} \, dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$

$\int \cos (ax+b) \, dx = \sin (ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \sin (ax+b) \, dx = -\cos (ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 (ax+b)} \, dx = \tan (ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 (ax+b)} \, dx = -\cot (ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} \, dx = \arctan (ax+b) \frac{1}{a} + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$\int c \cdot f = c \cdot \int f$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$\int f + g = \int f + \int g$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int f^{\alpha} \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnos az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$\int e^g \cdot g' = e^g + c \qquad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$

$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \qquad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$\int \frac{ax+b}{cx+d}\, dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}\, dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d}\, dx =$

$= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d}\, dx = \frac{a}{c}x + E \ln|cx+d| \frac{1}{c}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}\, dx \qquad \sqrt{cx+d} = u$

$\int f(g(x))\, dx \qquad g(x) = u$

$\sqrt{1-f} \qquad f = sin^2 u$

$\sqrt{1+f} \qquad f = \sinh^2 u$

$\sqrt{f-1} \qquad f = \cosh^2 u$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = A\int \frac{1}{ax+b}\,dx = A\ln|ax+b|\cdot\frac{1}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c}\,dx\right) =$$

$$= \frac{A}{2a}\left(\ln|ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)\cdot\sqrt{D}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az $u=\tan\frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozott integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor aNewton Leibniz formula szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f $[a,b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad m_i = \inf\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \sup\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha integráljuk a pozitív számegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} \text{ ha } \alpha < 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ ha } \alpha > 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Többváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x-essel, akkor marad

Az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y-ossel, akkor marad

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Első lépés:

$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x,y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x,y)$

Második lépés:

$f'_x(x,y) = 0$

$f'_y(x,y) = 0$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ha $det\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $det\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $det\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $det\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét parciális deriváltja nulla, az $f(x,y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \dots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű deriváltakból képzett mátrix, amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x,y)=c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0,y_0,z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort derivált-vektornak vagy másként gradiensnek hívjuk.

Íme a derivált-vektor:

$$\underline{f}'(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} \quad \text{röviden} \quad \underline{f}' = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

A derivált-vektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja az (x_0,y_0) pontban:

$$\frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta \underline{v}} = \underline{f}'(x_0,y_0)\cdot\underline{v}$$

(Itt $\underline{v}$ egységvektor)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y=\dots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $F(x,y)=0$ egy egyváltozós implicit függvény, akkor deriváltja:

$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$ $\frac{\delta x}{\delta y}=-\frac{F_y'(x,y)}{F_x'(x,y)}$

Ha $F(x_1,x_2,...,x_{n-1})=0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i, mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$\frac{\delta x_i}{\delta x_j}=-\frac{F_j'(x_1,x_2,...,x_{n+1})}{F_i'(x_1,x_2,...,x_{n+1})}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kettős integrál

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az x szerinti határokat adjuk meg és utána az y szerintit vagy fordítva.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kombinatorika

Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli permutációján az n különböző elem egy sorba rendezését értjük.

n darab különböző elem permutációinak száma:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

n faktoriálisán az n-nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész számok szorzatát értjük.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

pl.:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$1! = 1$$

Továbbá definíció szerint $0! = 1$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.

n darab különböző elemből kiválasztott k darab elem variációinak száma:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

n darab különböző elem közül kiválasztott k darab elem kombinációinak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n elem között van $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését ismétléses permutációnak nevezzük.

n elem közötti $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező ismétléses permutációinak száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha kör alakban helyezünk el n különböző elemet és azok sorrendjét vizsgáljuk, akkor ciklikus permutációról beszélünk.

n darab különböző elem ciklikus permutációinak száma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Valszám alapok, klasszikus valszám

Eseményeknek nevezzük a valószínűségi kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.

Megkülönböztetünk elemi eseményeket, ilyen például, hogy egy dobókockával 1-est dobunk. Vannak azonban olyan események is amik több elemi eseményből épülnek fel, ilyen például az, hogy párosat dobunk.

Az eseményeket az ABC nagybetűivel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az esemény valószínűségét úgy kaphatjuk meg, hogy megszámoljuk hány elemi eseményből áll és ezt elosztjuk az összes elemi esemény számával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B eseményt egymástól függetlennek nevezzük, ha teljesül rájuk, hogy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B eseményt kizárónak nevezünk, ha

$$A \cap B = \emptyset$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény biztosan bekövetkezik:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges esemény, akkor

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \dots + P(A \mid B_n)P(B_n)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Bayes tételt akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett (B_k) esemény valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett (A) tükrében.

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges esemény, akkor bármely B_k eseményre

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\dots+P(A|B_n)P(B_n)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Geometriai valószínűség

Ha egy esemény előfordulását geometriai alakzat (vonal, síkidom, test) mértékével jellemezzük, akkor geometriai valószínűségről beszélünk.

Ilyenkor a szokásos $P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ lehet mondjuk $P = \frac{T_{kedvező}}{T_{összes}}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Folytonosnak nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik folytonos mennyiségeket mérnek, ilyen például az idő, a távolság. Ebben az esetben az eloszlás függvény is mindig folytonos függvény lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Diszkrétnek nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik megszámlálhatóan sok értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy vagy véges sokat, vagy végtelent, de úgy, hogy fel tudjuk sorolni az értékeit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(X < x)$$

Ha az X valószínűségi változó diszkrét és értékei $X = a, X = b, X = c$ meg ilyenek, akkor az eloszlásfüggvény mindig egy lépcsőzetes függvény, ami minden számnál pontosan akkorát ugrik, mint az adott szám valószínűsége, amíg el nem érjük az 1-et.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{ha } x \leq a \\ P(X=a) \quad \text{ha } a < x \leq b \\ P(X=a) + P(X=b) \quad \text{ha } b < x \leq c \\ \dots \\ 1 \end{cases}$$

Ha az X valószínűségi változó folytonos, akkor az a és b számok között bármilyen valós értéket fölvehet. Ilyenkor az eloszlásfüggvény is folytonos, ami a-ig nullát vesz föl, a és b közt növekszik és b után végig egyet vesz föl.Vagyis ahol az X valószínűségi változó működik, ott a függvény életre kel, előtte és utána pedig hibernált állapotban van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sűrűségfüggvény úgy működik, hogy a valószínűségeket a görbe alatti területek adják meg. Az eloszlásfüggvény jele $F(x)$ volt, a sűrűségfüggvény jele $f(x)$. Az $a < X < b$ valószínűség éppen a görbe alatti terület a-tól b-ig.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ha az $X < a$ valószínűséget szeretnénk kiszámolni:

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

Ha a $b < X$ valószínűséget:

$$P(b < X) = \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

Ha ezt a három területet összeadjuk, akkor éppen a teljes görbe alatti területet kapjuk, ami a 100%-ot jelenti, így hát ez a terület éppen 1.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

nem negatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1. $\lim_{-\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{\infty} F(x) = 1$
3. monoton nő
4. balról folytonos

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
2. nem negatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

$$P(b < X) = 1 - F(b) = \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az X valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényéből úgy kapjuk meg az $f(x)$ sűrűségfüggvényét, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt deriváljuk, azaz:

$$F'(x) = f(x)$$

Ha az X valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségi függvényét ismerjük, és meg akarjuk adni az $F(x)$ eloszlásfüggvényét, akkor azt pedig így tehetjük:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Várható érték és szórás

A várható érték jele $E(X)$.

Diszkrét esetben úgy kell kiszámolni, hogy

$$E(X) = \sum X_i P(X_i)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A szórás azt mutatja meg, hogy a várható érték körül milyen nagy ingadozásra számíthatunk.

Jele: $D(X)$

Kiszámításának módja diszkrét esetben:

$$D(X) = \sqrt{E\left(X^2\right) - E^2(X)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Folytonos valószínűségi változók esetén a várható érték:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Folytonos valószínűségi változó esetén a szórást ugyanúgy kell számolni, mint diszkrét valószínűségi változó esetén:

$$D(X) = \sqrt{E\left(X^2\right) - E^2(X)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A binomiális eloszlás és a hipergeometriai eloszlás

Ezt a képletet hívjuk binomiális eloszlásnak:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Visszatevéses mintavételről beszélünk, ha egy p valószínűségű elem többszöri kihúzásának esélyét vizsgáljuk úgy, hogy ha kihúzunk egy ilyen elemet, akkor ezt követően azt visszarakjuk.

Például ha azt vizsgáljuk, hogy egy kosárban van 8 piros és 5 kék golyó, és mennyi a valószínűsége, hogy háromszor húzva két piros és egy kék golyót húznánk úgy, hogy a kihúzott golyókat mindig visszatesszük, akkor az egy visszatevéses mintavétel.

A visszatevées mintavételhez kapcsolódó eloszlás a binomiális eloszlás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A visszatevés nélküli mintavétel tipikus példája, hogy van egy doboz, benne N darab elem. Közülük K darab valamilyen tulajdonságú, az egyszerűség kedvéért hívjuk selejtesnek. Mondjuk sárga vagy szép vagy ronda. Kihúzunk n darab elemet, és ez a képlet meg fogja nekünk mondani, hogy mekkora az esélye, hogy közülük k darab a vizsgált tulajdonságú:

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

De vannak olyan esetek, amikor a visszatevés nélküli mintavételnél másik képletet kell használnunk. Ezt a másik képletet binomiális eloszlásnak nevezzük, és olyankor használjuk, amikor a selejtek száma helyett csak a selejtek arányát ismerjük.

Ez a binomiális eloszlás képlete:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

És, hogy mi alapján döntjük el, hogy a két képlet közül melyiket kell használni? A dolog nagyon logikus, nézd meg a kapcsolódó epizódot és minden világos lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hipergeometriai eloszlás a visszatevés nélküli mintavételhez kapcsolódó eloszlás, képlete pedig:

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások

A hipergeometriai eloszlás egy diszkrét eloszlás.

Ismert, hogy mennyi az összes elem és az összes selejt, vagyis N, K és n.

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A hipergeometriai eloszlás várható értéke:

$$E(X)=n\frac{K}{N}$$

A hipergeometriai eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{n\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A binomiális eloszlás egy diszkrét eloszlás.

Csak valami %-os izé ismert, a várható érték, az átlag, az arány, a valószínűség, továbbá X korlátos diszkrét valószínűségi változó.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

A binomiális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=np$$

A binomiális eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Poisson eloszlás egy diszkrét eloszlás, ahol előre ismert a várható érték, és a valószínűségi változó nem korlátos, vagyis tetszőleges bármilyen nagy érték is lehet.

Például valamilyen anyagban a hibák száma, vagy egy adott idő alatt bekövetkező események száma. APoisson eloszlásos feladatokban általában valamilyen százalék vagy arány vagy várható érték vagy átlag vagy valószínűség van megadva. Mondjuk egy könyvben az oldalak 80%-ában nincs hiba, vagy az 20 méter hosszú ruhaszövetek harmadában nincs hiba, vagy egy üzletben óránként várhatóan 13 vevő érkezik, vagy egy bankban percenként átlag 24 tranzakció történik, vagy 0,2 a valószínűsége, hogy 10 perc alatt nem érkezik segélyhívás. Ezek mind Piosson eloszlások, ahol az X nem korlátos diszkrét valószínűségi változó.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

A Poisson eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\lambda$$

A Poisson eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{\lambda}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{ha } 0<x\end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } 0<x\end{cases}$$

Az exponenciális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Az exponenciális eloszlás szórása:

$$D(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenletes eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq A \\ \frac{x-A}{B-A} & \text{ha } A < x \leq B \\ 1 & \text{ha } B < x \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & \text{ha } A < x \leq B \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke:

$$E(X) = \frac{A+B}{2}$$

Az egyenletes eloszlás szórása:

$$D(X) = \frac{B-A}{\sqrt{12}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A normális eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

A normális eloszlás várható értéke:

$$E(X) = \mu$$

A normális eloszlás szórása:

$$D(X) = \sigma$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Markov és Csebisev egyenlőtlenségek

A Markov-egyenlőtlenség egy nagyon egyszerű dolgot állít. Az, hogy az X valószínűségi változó sokkal nagyobb legyen a várható értéknél nem túl valószínű:

$$P\left(X \geq t \cdot E(X)\right) \leq \frac{1}{t}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Csebisev egyenlőtlenség arról szól, hogy a várható értéktől való eltérés nem lehet túl nagy.

Ha ez az eltérés nagyobb, mint a szórás t-szerese, akkor ennek a valószínűsége kicsi:

$$P\left(\mid X - E(X) \mid \geq t \cdot D(X)\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

Ha az eltérés kisebb, mint a szórás t-szerese, akkor ennek valószínűsége nagy:

$$P\left(\mid X - E(X) \mid < t \cdot D(X)\right) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy esemény bekövetkezésének elméleti valószínűsége p, akkor minél többször végezzük el a kísérletet, a relatív gyakoriság és az elméleti valószínűség eltérése annál kisebb lesz.

$$P\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \qquad P\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| > \epsilon\right) < \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot
