



MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEMATIKA 1 EDUTUS tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 09. 15.

Tartalomjegyzék

Mátrixok és vektorok.....	2
Vektorok, egyenesek és síkok egyenletei.....	7
Vektorterek, független és összefüggő vektorok.....	11
Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok rangja és inverze.....	13
Determináns, adjungált, kvadratikus alakok.....	16
Függvények.....	22
Összetett függvény és inverz függvény.....	25
Függvények határértéke és folytonossága.....	26
A határérték precíz definíciója.....	27
Deriválás.....	28
Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete.....	31
L'Hôpital szabály.....	32
Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok.....	33
Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok.....	34
Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík.....	35
Kétváltozós függvények.....	37
Komplex számok.....	40
Határozatlan integrálás, primitív függvény.....	43
Határozott integrálás.....	47

Mátrixok és vektorok

Egy $n \times k$ -as [mátrix](#) tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor a [mátrix](#) összes elemét meg kell szorozni a számmal.

$$\text{pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor a [mátrix](#) minden elemét osztani kell a számmal.

$$\text{pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A [mátrixok](#) összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) szorzata akkor létezik, ha a bal oldali [mátrix](#) oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali [mátrix](#) sorainak számával.

Ha az A [mátrix](#) m x n-es a B [mátrix](#) pedig n x k-s, akkor az eredmény [mátrix](#) m x k-s lesz.

Az eredmény [mátrix](#) i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali [mátrix](#) i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali [mátrix](#) j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A [mátrix](#) összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kvadratikus [mátrix](#) négyzetes [mátrix](#) vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A diagonális [mátrix](#) olyan kvadratikus [mátrix](#), aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az egység mátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egység mátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

$$\text{pl.: } I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az inverz mátrix jele A^{-1} és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$$A \cdot A^{-1} = I \text{ (jobb inverz)}$$

$$A^{-1} \cdot A = I \text{ (bal inverz)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

$$\text{Pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

$$\text{Pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [skaláris szorzat](#) két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$

nem asszociatív: $(\underline{a}^T \cdot \underline{b})^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot (\underline{b}^T \cdot \underline{c})$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektor diadikus szorzata egy [mátrix](#). Lássuk milyen.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő

elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot megszorozunk jobbról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik oszlopát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot megszorozunk balról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik sorát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektorok, egyenesek és síkok egyenletei

A vektor egy irányított szakasz.

Jelölése: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$

A két vektor összege:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

A két vektor különbsége:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ vektor hossza:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza:

$$\overrightarrow{AB} = |\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

És pont ugyanígy kapjuk meg az A és B pontok távolságát is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két pont közti vektor a végpontba mutató helyvektor mínusz a kezdőpontba mutató helyvektor.

$$\text{Tehát } \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$.

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ [vektorok](#) skaláris szorzata:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \gamma = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

ahol γ a két vektor által bezárt szög

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{ vagyis az } \underline{a} \text{ vektor hossza}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \text{ vagyis a } \underline{b} \text{ vektor hossza}$$

Két vektor merőleges egymásra, ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ $+90^\circ$ -os elforgatottja:

$$\underline{a}^{+90^\circ} = (-a_2, a_1)$$

Az $\underline{a}$ -90° -os elforgatottja:

$$\underline{a}^{-90^\circ} = (a_2, -a_1)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektor skaláris szorzatát kiszámolhatjuk így:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \gamma$$

ahol γ a két vektor által bezárt szög,

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{ vagyis az } \underline{a} \text{ vektor hossza}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \text{ vagyis az } \underline{b} \text{ vektor hossza}$$

Illetve kiszámolhatjuk így is:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, azaz ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ [vektorok](#) vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ [vektorok](#) által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektorterek, független és összefüggő vektorok

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha a V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden V -beli $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorhoz hozzárendelünk egy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektort, ami szintén eleme V -nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V -beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ V -beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan $\underline{0}$ V -beli vektor, hogy bármely $\underline{v}_1$ V -beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely $\underline{v}_1$ V bel vektorra létezik olyan $-\underline{v}_1$ V -beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden V -beli $\underline{v}_1$ vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \underline{v}_1$ vektort, ami szintén V -beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely $\underline{v}_1$ V -beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V -beli vektorra és λ skalárra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárookra: bármely $\underline{v}_1$ V -beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységszeres: bármely $\underline{v}_1$ V -beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan $\lambda_i \neq 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy V vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) generátor-rendszert alkotnak, ha minden $\underline{w}$ vektor a V vektortérben előáll $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$ alakban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg R^* -ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek n -nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő független [vektorok](#) maximális száma. R^3 -ban a rang például maximum három lehet.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A V vektortérnek W altere, ha $W \subset V$ és W maga is vektortér a V -beli műveletekre.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A legfeljebb n -ed fokú polinomok vektorteret alkotnak az összeadás és a skalárral való szorzás műveletekre.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ [vektorok](#) által generált altér ezen [vektorok](#) lineáris kombinációja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azon [vektorok](#) lineáris kombinációjaként.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok rangja és inverze

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x -ek együtthatóiból álló [mátrix](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlós [mátrix](#) alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x -es oszlopból és e -s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x -es oszlopból és e -s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak e -s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázistranszformáció során fent maradt x -ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány x_i főt marad.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss-Jordan elimináció a Gauss-elimináció pro változata. A dolog lényege az, hogy nemcsak a vezéregyesek alatt nullázzuk ki, hanem felettük is. Előnye, hogy így a megoldások az elimináció végeztével egyből leolvashatók.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) oszloprangja az oszlopvektorai közül kiválasztható független [vektorok](#) maximális száma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) sorrangja a sorvektorai közül kiválasztható független [vektorok](#) maximális száma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [mátrix](#) rangja a [mátrix](#) Gauss elimináció során keletkezett vezéregyeseinek száma, amely megegyezik a [mátrix](#) sorrangjával vagy oszlopvektorával

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy mátrixot teljes oszloprangúnak nevezünk, hogyha az oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy mátrixot teljes sorrangúnak nevezünk, hogyha a sorvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bármely mátrixot fel lehet bontani két olyan [mátrix](#) szorzatára, amelyek közül az egyik teljes oszloprangú, a másik pedig teljes sorrangú. Ezt bázisfelbontásnak hívják, és egy kissé Gauss-Jordan eliminációval tudjuk elkészíteni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett [mátrix](#) pedig az A [mátrix](#) inverze lesz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x -et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Determináns, adjungált, kvadratikus alakok

Ha az A egy $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$\det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{ip(i)}$$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy 2×2 -es [mátrix](#) determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A 3×3 -as [mátrixok](#) determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az A egy $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A [mátrix](#) determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az A [mátrix](#) szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz [mátrix](#)
- $\text{RANG} < n$
- Az A [mátrix](#) oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A [mátrix](#) reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz [mátrix](#)
- $\text{RANG} = n$
- Az A [mátrix](#) oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A [mátrix](#) k -edik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt egy 3x3-as [mátrix](#).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ +\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Itt egy 2x2-es [mátrix](#).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az adjungált egyik legnagyobb haszna, hogy segítségével meg tudunk alkotni egy képletet a négyzetes [mátrixok](#) inverzére.

Itt is van:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az egyenletrendszerek megoldására is megalkothatunk egy új képletet az adjungált segítségével.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Legalábbis abban az esetben, hogyha az A nxn-es invertálható [mátrix](#).

Az egyenletrendszer megoldását úgy kapjuk meg, hogy beszorzunk az A [mátrix](#) inverzével...

$$\underline{x} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \cdot \underline{b}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemek által generált Vandermonde-determináns első sorában x_1 hatványai szerepelnek, aztán a második sorában x_2 hatványai jönnek, és így tovább.

A Vandermonde-determinánst ezzel az egyszerű képlettel ki tudjuk számolni:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j < i} (x_i - x_j)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) sarak főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarak [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarak [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + - +$ de mínusszal indul.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2×2 -es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2×2 -es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha A $n \times n$ -es szimmetrikus [mátrix](#) és $\underline{x}$ egy vektor R^n -ben, akkor a

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Függvények

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x -eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[n]{\text{ez itt}} \geq 0$ $\sqrt[n]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ tört nevező $\neq 0$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precízebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precízebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Belső függvénytranszformáció: $f(x + a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x) + a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x -re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x -re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Összetett függvény és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x -hez különböző y -okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönösen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Függvények határértéke és folytonossága

Az $f(x)$ függvény folytonos az a -ban, ha értelmezve van az a -ban, létezik és véges a határértéke az a -ban, és ami a lényeg:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a -ban, ha létezik véges határértéke az a -ban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Megszüntethető szakadás:

Ha létezik véges [határérték](#) az a -ban, de ez nem egyezik meg a függvényértékkel, akkor megszüntethető szakadása van.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

Nem megszüntethető szakadás, ugrás:

Ha a bal és jobb oldali [határérték](#) két különböző szám az a -ban, akkor a szakadás nem megszüntethető és ugrásnak hívjuk.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{másik szám} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Nem megszüntethető, nem véges szakadás:

Ha a bal és jobb oldali [határérték](#) nem is véges az a -ban, akkor pláne nem tehető folytonossá a függvény.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nem megszüntethető oszcilláló szakadás:

Végül meglehetősen patológikus esetek is vannak, amikor még csak jobb vagy bal oldali [határérték](#) sem létezik.

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \nexists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{\sin |z|}{|z|} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{1 - \cos |z|}{|z|^2} = \frac{1}{2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A határérték precíz definíciója

Az $f(x)$ [függvény határértéke](#) az x_0 helyen B , ha minden $\epsilon > 0$ -ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ [függvény határértéke](#) az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$ -ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ [függvény határértéke](#) az x_0 helyen B , ha minden $\epsilon > 0$ -ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ [függvény határértéke](#) az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$ -ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciáhányados:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

f és g deriválható függvények, és C valós szám esetén a [deriválási szabályok](#):

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

A [deriválási szabályok](#) megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a törtek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorolni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvények közt fennálló azonosságok:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\cosh x$ függvény inverze:

$$\operatorname{arcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

A $\sinh x$ függvény inverze:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

A $\tanh x$ függvény inverze:

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciáhányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfelé megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfelé megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciáhányados:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

L'Hôpital szabály

Legyen f és g deriválható az a szám környezetében (kivéve esetleg a -ban) és tegyük fel, hogy itt $g'(x) \neq 0$.

Ekkor, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, ekkor a L'Hôpital-szabály (vagy [L'Hospital-szabály](#)) szerint:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$e^{-\infty} = 0 \quad e^{\infty} = \infty$$

$$\ln 0 = -\infty \quad \ln \infty = \infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{+0} = +\infty \quad \frac{1}{-0} = -\infty$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok

Az elaszticitás képlete:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Egy függvény elaszticitása azt mondja meg, hogyha 1%-kal növeljük az x -et, akkor hány százalékkal változik a függvény értéke.

$E = 0$ Teljesen rugalmatlan

$|E| < 1$ Rugalmatlan

$|E| = 1$ Egységnyi rugalmasságú

$|E| > 1$ Rugalmas

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok

Ha a függvény deriváltja pozitív, akkor a függvény nő,

Ha a függvény deriváltja negatív, akkor a függvény csökken.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precízebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precízebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

A függvény hangulatáról a második derivált szolgáltat információt.

Ha a második derivált negatív, akkor a függvény konkáv, ha pozitív, akkor konvex

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ függvény stacionárius pontja x_0 , ha f differenciálható az x_0 környezetében és $f'(x_0) = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x -eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[n]{\text{ez itt}} \geq 0$ $\sqrt[n]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ tört nevező $\neq 0$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintő sík

Az $f(x, y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort gradiensnek nevezzük.

A gradienst szokás deriváltvektornak is nevezni, és az $f(x, y)$ kétváltozós függvény gradiensvektorát úgy jelöljük, hogy $\text{grad}(f(x, y))$.

A gradiensvektor elnevezés onnan ered, hogy éppen a gradiens vektor irányában emelkedik mindig a legjobban a kétváltozós függvény grafikonja, ami egy felület.

Az $f(x, y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az (x_0, y_0) pontban:

$$\text{grad}(f(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

A gradiens segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort deriváltvektornak nevezzük.

A deriváltvektort szokás gradiensnek is nevezni, és az $f(x, y)$ kétváltozós függvény deriváltvektorát úgy jelöljük, hogy $\nabla f(x, y)$.

Az $f(x, y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az (x_0, y_0) pontban:

$$\text{grad}(f(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

A deriváltvektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x, y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0, y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{e}} = \text{grad}(f(x_0, y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogyha a kétváltozós függvény grafikonjának egy pontjában áll egy hagymászó, és elindul egy $\underline{v}$ irányban, akkor ebben az irányban milyen meredeken emelkedik a felület.

Ahogy a $\underline{v}$ irányt változtatjuk, az [iránymenti derivált](#) értéke is változik.

És van egy olyan $\underline{v}$ irány, ahol az [iránymenti derivált](#) maximális. Ezt az irányt nevezzük gradiens iránynak és ez mindig megegyezik a deriváltvektor irányával.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A függvényeket két nagy típusba sorolhatjuk, az explicit és az implicit függvények csoportjába. Az explicit függvények azok, amelyek egy konkrét képlettel vannak megadva, míg az implicit függvények valamilyen egyenlet formájában adhatók meg.

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $F(x, y) = 0$ egy implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i , mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x , y sík felett a függvény, ami egy felület.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x -essel, akkor marad

Az $f(x, y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y -ossal, akkor marad

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x, y) \quad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x, y)$$

Második lépés:

$$f'_x(x, y) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$f'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét [parciális derivált](#) nulla, az $f(x, y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \dots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű deriváltakból képzett [mátrix](#), amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f''} = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x, y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0, y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{e}} = \text{grad}(f(x_0, y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Komplex számok

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

A két komplex szám összege:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

A két komplex szám különbsége:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

A két komplex szám szorzata:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [komplex számok](#) egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tengelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. Az imaginárius tengely egysége az i , ami olyan, mint a valós tengelyen az 1, csak éppen egy meglehetősen furcsa dolgot tud. Az imaginárius egység egy olyan komplex szám, aminek a négyzete -1 és i -vel jelöljük, azaz

$$i^2 = -1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A komplex számokat azért hívjuk "komplex"-nek, mert két részből tevődnek össze. Egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tengelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. A [komplex számok](#) egy valós számból és egy imaginárius számból tevődnek össze:

$$z = a + bi$$

Itt a és b valós számok, az i pedig az imaginárius egység, ami azt tudja, hogy $i^2 = -1$.

Magukat a valós számokat és az imaginárius számokat is komplex számnak tekinthetjük. A valós számok olyan [komplex számok](#), amelyeknek az imaginárius része nulla, míg az imaginárius számok olyan [komplex számok](#), amelyeknek a valós része nulla. A [komplex számok](#) egy síkon, az úgynevezett komplex számsíkon helyezkednek el. Kicsit olyanok, mint a koordinátageometriában a kétdimenziós sík vektorai, ahol az i és j bázisvektorkat szokás használni, az x tengelynél az i és az y tengelynél a j vektorral. Ennek az analógiának köszönhetően vannak, akik az imaginárius számokat nem is i -vel, hanem j -vel jelölik. Bár ez segíthet erősíteni az analógiát a sík vektoraival, de mégis zavaró, mivel aki komolyabban is foglalkozik a komplex számokkal, a hivatalos jelöléssel fog találkozni, ahol az imaginárius tengelyen i -k vannak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A valós számokat úgy érdemes elképzelni, mint egy koordináta-rendszer x tengelyét. És minden helyet ki is töltenek a valós számok ezen a számegyenesen. A [komplex számok](#) egy valós és egy imaginárius (képzetes) részből épülnek föl, és szemléltetésükhöz nem egy, hanem két koordinátatengelyre van szükség. Az x tengelyen vannak a valós számok, az y tengelyen pedig az imaginárius, vagyis a képzetes számok. A valós számok tengelyén az egység a szokásos 1, míg az imaginárius számok tengelyén az egység az i . A két tengely által kifeszített síkot nevezzük komplex számsíknak, vagy másként Gauss-féle számsíknak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt ez a komplex szám:

$$z = a + bi$$

Komplex számoknak van ilyenje, hogy imaginárius egység:

$$i^2 = -1$$

[Komplex számok](#) konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt ez a komplex szám: $z = a + bi$

Ennek a komplex számnak az abszolútértéke:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ ahol}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{r}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két komplex szám trigonometrikus alakban: $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

[Komplex számok szorzása](#) trigonometrikus alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

[Komplex számok osztása](#) trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban: $r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Ekkor ennek a komplex számnak az n -edik hatványa:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Ekkor ennek a komplex számnak az n -edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két komplex szám exponenciális alakban: $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

[Komplex számok szorzása](#) exponenciális alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

[Komplex számok osztása](#) exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban: $z = r e^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az n -edik hatványa:

$$z^n = r^n e^{ni\theta}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban: $z = r e^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az n -edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$ -et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \ln |ax+b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnós az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \quad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \quad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{cx+d} dx &= \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d} dx = \\ &= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + E \ln |cx+d| + \frac{1}{c} \end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}} dx \quad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x)) dx \quad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \quad f = \sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \quad f = \sinh^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \quad f = \cosh^2 u$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{ax+b} dx &= A \int \frac{1}{ax+b} dx = A \ln |ax+b| \cdot \frac{1}{a} \\ \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= A \int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c} dx \right) = \\ &= \frac{A}{2a} \left(\ln |ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}} \right) \cdot \sqrt{D} \right)\end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéssel integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéssel integrálás egyik legfurcsább esete az $u = \tan \frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozott integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor a [Newton Leibniz formula](#) szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az f $[a, b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ $m_i = \inf \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ $M_i = \sup \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha integráljuk a pozitív számegegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} & \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)