



MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

ALKALMAZOTT MATEMATIKA MATE tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 09. 17.

Tartalomjegyzék

Síkidomok, háromszögek, négyszögek, sokszögek.....	2
Trigonometria a síkgeometriában.....	13
A kör.....	14
Színusztétel és koszinusztétel.....	26
Térgeometria.....	27
Vektorok.....	33
Vektorok, egyenesek és síkok egyenletei.....	34
Statisztikai alapfogalmak.....	38
Egy ismerv szerinti elemzés.....	44
Mátrixok és vektorok.....	48
Függvények.....	53
Összetett függvény és inverz függvény.....	56
Határérték, függvények határértéke és folytonossága.....	57
Sorozatok határértéke.....	58
Deriválás.....	60
Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete.....	63
Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok.....	64
Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok.....	65

Síkidomok, háromszögek, négyszögek, sokszögek

Síkidomnak nevezzük a sík zárt vonalakkal körülhatárolt részét.

A zárt vonal azt jelenti, hogy fogjuk a ceruzát, elindulunk valahonnan... és hopp, visszaérünk ugyanoda, ahonnan indultunk. Síkidom például egy háromszög, vagy egy négyzet, de síkidom egy kör is, vagy éppen a különböző emoji-k. Egy síkidomot több különböző zárt vonal is atárolhat. Olyankor, amikor csak egy zárt vonal határolja, egyszerű síkidomnak nevezzük. Mindez sokkal könnyebben elképzelhető, ha megnézed az ehhez kapcsolódó epizódot.

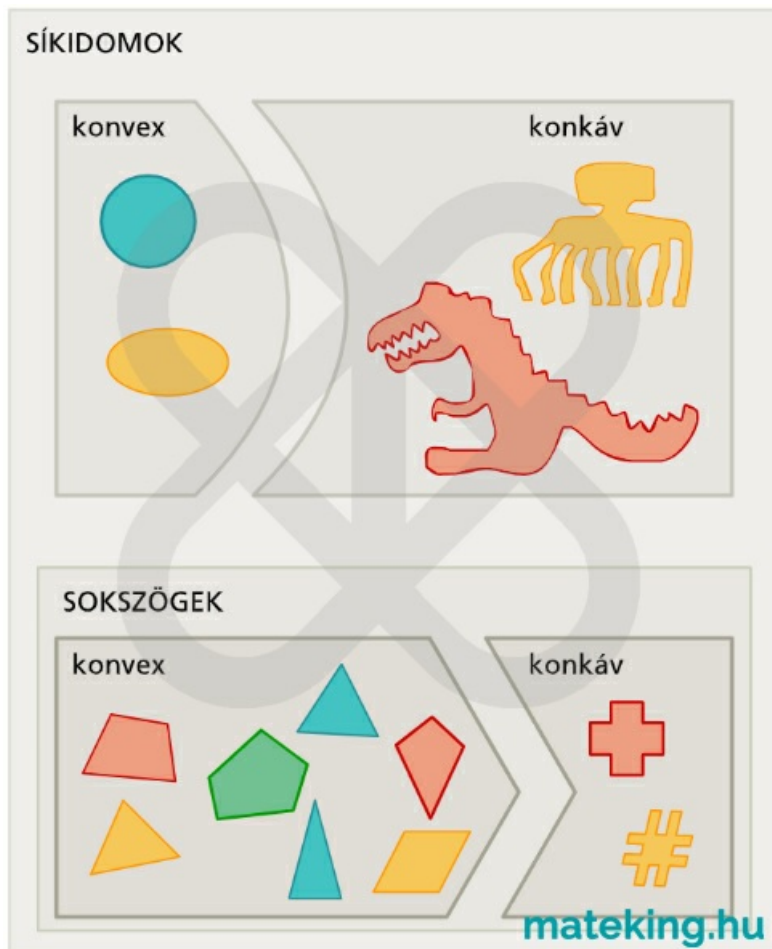


[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból álló zárt görbe (töröttvonal) határol. Vagyis azok a síkidomok sokszögek, amelyek határoló vonalai csak egyenes szakaszokból állnak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

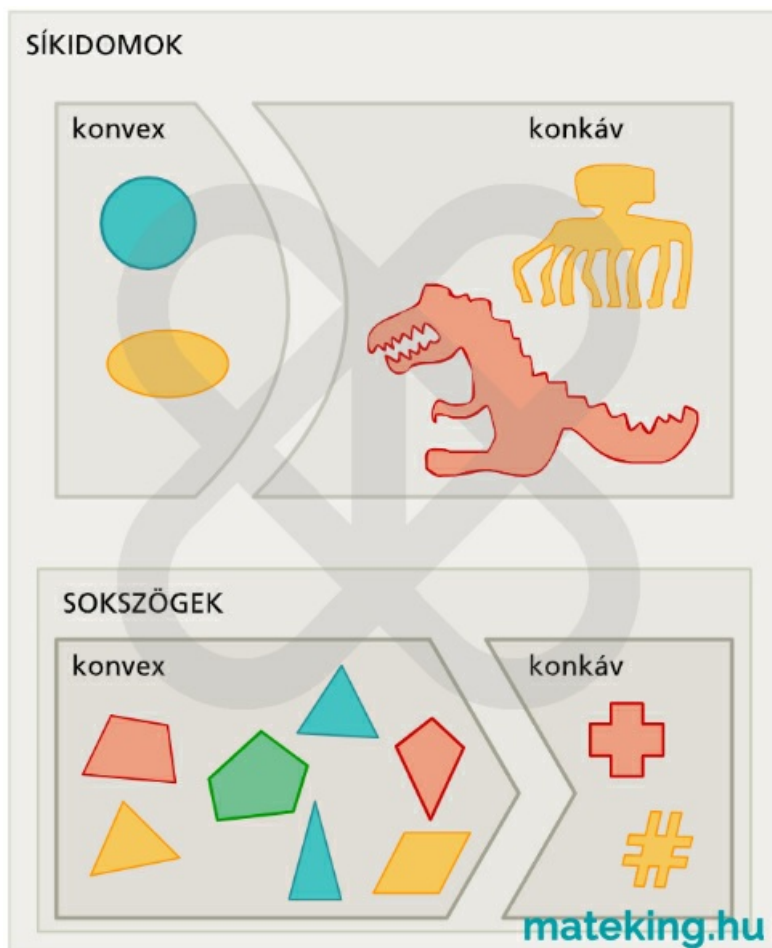
A konkáv síkidom az, amelyikben ki tudunk választani két olyan pontot, hogy az ezeket összekötő szakasznak egy része a síkidomon kívül halad. Egy kör vagy egy téglalap például nem konkáv, mert bárhogyan választunk benne két pontot, a pontokat összekötő szakasz is a síkidomban halad. De például egy szívecske már konkáv, mert ha a két kidudorodó részét összekötjük, akkor az összekötő vonal kívül halad. Mindez sokkal egyszerűbb, ha megnézed az ehhez a témához kapcsolódó epizódot.



[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konvex síkidom az, amelyikben akárhogy veszünk két belső pontot, az őket összekötő szakasz minden pontja a síkidom belsejében lesz.

Egy kör vagy egy téglalap például konvex, mert bárhogyan választunk benne két pontot, a pontokat összekötő szakasz is a síkidomban halad. De például egy szívecske már nem konvex, mert ha a két kidudorodó részét összekötjük, akkor az összekötő vonal kívül halad. Mindez sokkal egyszerűbb, ha megnézed az ehhez a témához kapcsolódó epizódot.



[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy sokszöget szabályosnak nevezünk, ha minden oldala és minden belső szöge egyforma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból álló zárt görbe (töröttvonal) határol. Ezeket az egyenes szakaszokat nevezzük a sokszög oldalainak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakasz alkotta zárt görbe határol. Ezeket a szakaszokat oldalaknak, vagy másként oldaléleknek nevezzük, és azokat a pontokat, ahol az oldalélek találkoznak, a sokszög csúcsainak hívjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sokszögek nem szomszédos csúcsait összekötő szakaszokat a sokszög átlójának nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az egyenlő szárú háromszögben van két egyforma hosszú oldal, amiket szárnak nevezünk. És hát van ugye a harmadik oldal, ez az alap.

Annait érdemes megjegyezni róla, hogy az alaphoz tartozó súlyvonal, magasságvonal, oldalfelező merőleges és szögfelező mind egybeesik. És ez egyúttal a háromszög szimmetriatengelye is.

És azt is jó tudni róla, hogy az alapon fekvő szögek egyformák.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Szabályos háromszögnek minden oldala és minden szöge egyenlő (tehát a szögek 60° -osak).

Szabályos háromszögben a körülírt kör középpontja, a magasságpont és a súlypont is egybeesnek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Derékszögű háromszögnek van 90° -os szöge.

A derékszöggel szemközti oldalt átfogónak nevezzük, a másik kettőt pedig befogónak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A hegyesszögű háromszögek minden szöge hegyesszög, azaz 0° -nál nagyobbak, de 90° -nál kisebbek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A tompaszögű háromszögek azok, amelyeknek van egy tompaszöge, azaz egy olyan szöge, ami 90° -nál nagyobb, de 180° -nál kisebb.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A háromszög egyenlőtlenség szerint minden háromszög bármelyik oldalának rövidebbnek kell lennie, mint a másik két oldal összege.

$$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A háromszög magasságvonala a csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges.

Ezek mindig egy pontban metszik egymást, és ezt a pontot magasságpontnak nevezzük.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor a magasságpont a háromszögön kívülre esik.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.

Ezek mindig egy pontban metszik egymást, ezt a pontot hívjuk a háromszög súlypontjának.

További izgalom, hogy a súlypont mindegyik súlyvonalat 2:1 arányban osztja.

Továbbá a súlyvonal felezi a háromszög területét.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A háromszög oldalfelezőmerőlegesei mindig egy pontban metszik egymást. Ez a pont minden csúcstól egyenlő távolságra van és emiatt a háromszög köré írható kör középpontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A háromszög belső szögfelezői mindig egy pontban metszik egymást. Ez a háromszögbe írható kör középpontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy háromszög oldalfelezőpontjait összekötjük, akkor a háromszög középvonalait kapjuk.

A középvonalak párhuzamosak a háromszög oldalaival és éppen fele olyan hosszúak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A jól ismert képlet háromszögek területére:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

És it jön egy kevésbé ismert háromszög-területképlet:

$$T = \frac{abc}{4R}$$

Itt R a háromszög köré írható körének sugara.

Ez pedig egy még kevésbé ismert képlet háromszögek területére:

$$T = r \cdot s$$

Itt r a beírható kör sugara, s pedig a kerület fele.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Hérón-képlet a háromszögek területképletei közül egy kevésbé ismert, de elég jól használható képlet. Akkor érdemes használni, ha ismert a háromszög mindhárom oldala.

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A leghabályosabb négyszög a négyzet. A négyzet oldalai egyenlő hosszúak és minden szöge derékszög. Egy sokszöget akkor nevezünk szabályos sokszögnek, ha minden oldala és minden szöge egyforma. Így tehát az egyetlen szabályos négyszög a négyzet. Ezen kívül a négyzetek még egy fontos dolgot tudnak: az átlóik is merőlegesek egymásra.

A négyzet területe:

$$T = a^2$$

A négyzet kerülete:

$$K = 4a$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

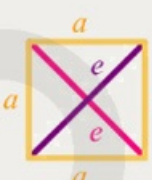
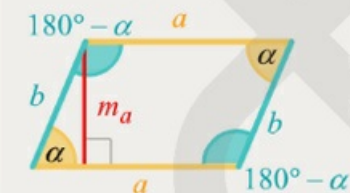
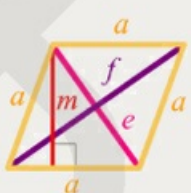
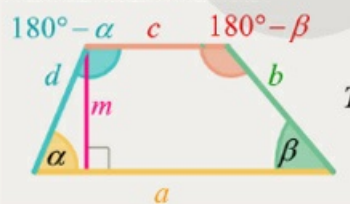
Téglalap olyan négyszög, aminek minden szöge derékszög. Vagyis az oldalak nem feltétlen egyenlő hosszúak. Olyankor, amikor az oldalai is egyenlő hosszúak, egy négyzetet kapunk. A téglalapok egyik fontos tulajdonsága, hogy a szemkötti oldalai egyforma hosszúak, vagyis két darab a hosszúságú és két darab b hosszúságú oldala van. A téglalapoknak egy másik fontos tulajdonsága pedig, hogy a szemkötti oldalai párhuzamosak egymással. Ez pedig azt jelenti, hogy a téglalapok mindig paralelogrammák is egyben (ugyanis a paralelogrammák azok a négyszögek, amelyeknek van két párhuzamos oldalpárjuk).

Területe:

$$T = a \cdot b$$

Kerülete:

$$K = 2a + 2b$$

TRAPÉZOK	DELTOIDOK
TÉGLALAP  $T = a \cdot b$	NÉGYZET  $T = a \cdot a$ $T = \frac{e \cdot e}{2}$
PARALELOGRAMMA  $T = a \cdot m_a$ $T = b \cdot m_b$	ROMBUSZ  $T = a \cdot m$ $T = \frac{e \cdot f}{2}$
ÁLTALÁNOS TRAPÉZ  $T = \frac{a + c}{2} \cdot m$	ÁLTALÁNOS DELTOID  $T = \frac{e \cdot f}{2}$

mateking.hu

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Rombusz egy olyan négyszög, amelynek minden oldala egyforma hosszú. Vagyis egy rombusznál az oldalak egyenlő hosszúságúak, de a szögeknek nem kell derékszögnek lenniük. Amikor a rombusz szögei derékszögek, egy négyzetet kapunk. Vagyis a négyzet is rombusz. A rombuszok másik fontos tulajdonsága, hogy a szemkötti oldalaik mindig párhuzamosak egymással, vagyis a rombuszok paralelogrammák is. Ez elvezet minket a rombusz egy másik definíciójához: a rombusz egyenlő oldalú paralelogramma.

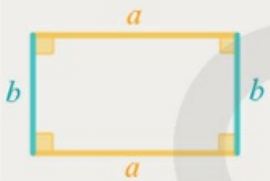
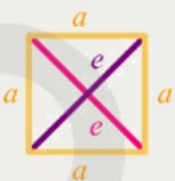
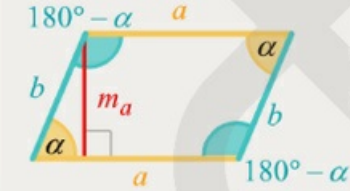
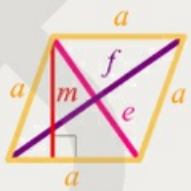
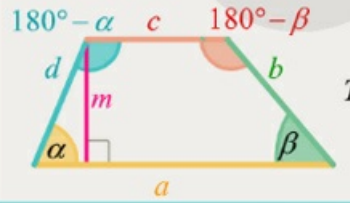
A rombusz magasságát m -mel jelöljük, az átlóit pedig e -nek és f -nek szokás nevezni. Ezeknek a segítségével tudjuk kiszámolni egy rombusz területét.

Területe:

$$T = a \cdot m = \frac{e \cdot f}{2}$$

Kerülete:

$$K = 4a$$

TRAPÉZOK	DELTOIDOK
TÉGLALAP  $T = a \cdot b$	NÉGYZET  $T = a \cdot a$ $T = \frac{e \cdot e}{2}$
PARALELOGRAMMA  $T = a \cdot m_a$ $T = b \cdot m_b$	ROMBUSZ  $T = a \cdot m$ $T = \frac{e \cdot f}{2}$
ÁLTALÁNOS TRAPÉZ  $T = \frac{a + c}{2} \cdot m$	ÁLTALÁNOS DELTOID  $T = \frac{e \cdot f}{2}$

mateking.hu

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

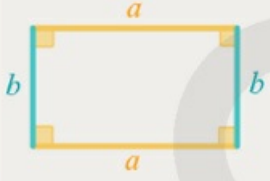
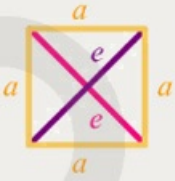
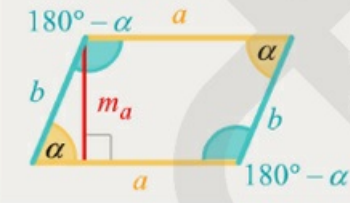
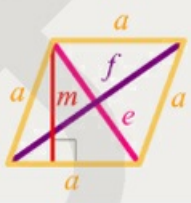
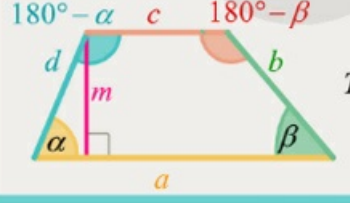
A paralelogramma olyan négyszög, aminek van két párhuzamos oldalpárja. Nagyon sok ilyen tulajdonságú négyszög van. Ilyenek a négyzetek, a téglalapok és a rombuszok. Vagyis minden négyzet, minden téglalap és minden rombusz egyben paralelogramma is. A paralelogramma magasságát m -mel szokás jelölni.

Területe:

$$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

Kerülete:

$$K = 2a + 2b$$

TRAPÉZOK	DELTOIDOK
TÉGLALAP  $T = a \cdot b$	NÉGYZET  $T = a \cdot a$ $T = \frac{e \cdot e}{2}$
PARALELOGRAMMA  $T = a \cdot m_a$ $T = b \cdot m_b$	ROMBUSZ  $T = a \cdot m$ $T = \frac{e \cdot f}{2}$
ÁLTALÁNOS TRAPÉZ  $T = \frac{a + c}{2} \cdot m$	ÁLTALÁNOS DELTOID  $T = \frac{e \cdot f}{2}$

mateking.hu

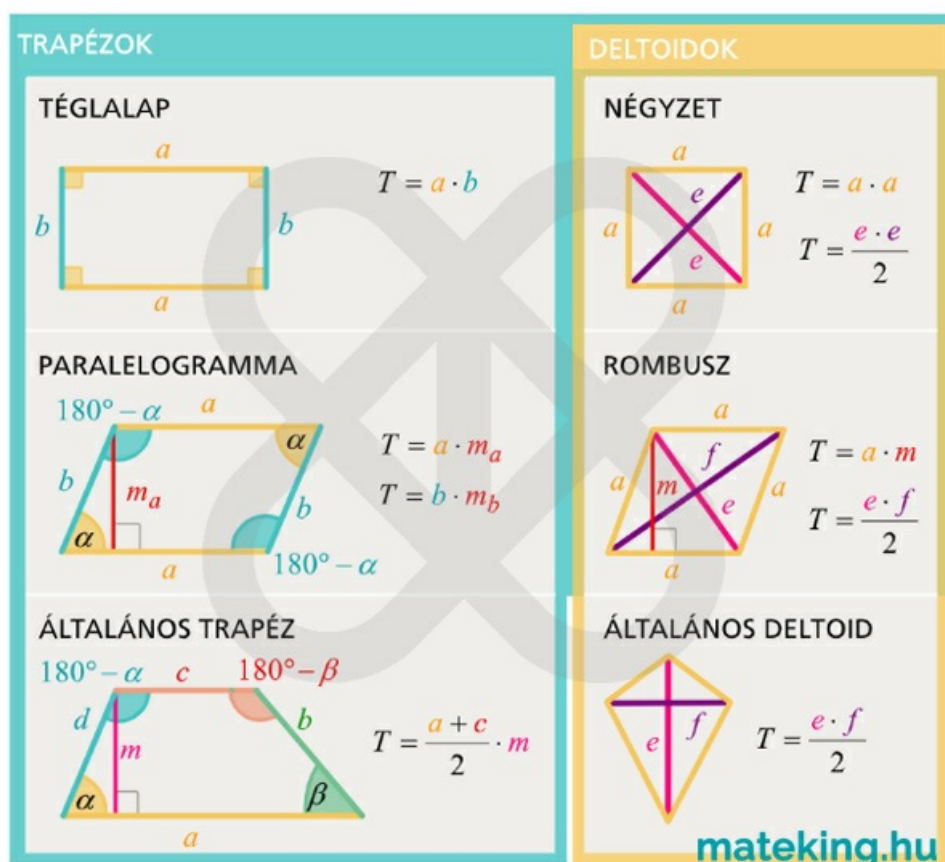
[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A trapéz olyan négyszög, aminek van legalább egy párhuzamos oldalpárja. Ezeket az oldalakat a trapéz alapjainak nevezzük és a -val meg c -vel jelöljük. Általában a nagyobbik alapot szokás a -val jelölni és a kisebbik alapot pedig c -vel. Olyankor, amikor a trapéz alapjai egyforma hosszúak, paralelogrammát kapunk. Vagyis minden paralelogramma egyben trapéz is. Sőt, ha meggondoljuk, akkor a trapéz definíciója nagyon sok négyszögre ráillik. Egy darab párhuzamos oldalpárja ugyanis van a négyzetnek, a téglalaphoz, a rombusznak és a paralelogrammáknak is. Vagyis minden négyzet, minden téglalap, minden rombusz és minden paralelogramma egyben trapéz is.

Mivel azonban ezeknek van külön neve, amikor egy feladatban trapézzal van szó, általában olyan trapézzal gondoljunk, aminek két különböző hosszúságú párhuzamos oldala van, az egyik "alul" a másik "felül" és ezek a trapéz a -val és c -vel jelölt alapjai.

Területe:

$$T = \frac{a+c}{2} \cdot m$$



[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a trapéz alapján fekvő két szög ugyanakkora, olyankor a trapéz szimmetrikus.

A szimmetrikus trapézt még szokás egyenlő szárú trapéznak is hívni, ugyanis a két szára mindig egyforma hosszú.

Ezen kívül van egy fantasztikus tulajdonsága is, hogy van köré írható köre.

Innen ered a harmadik elnevezés: húrtrapéz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

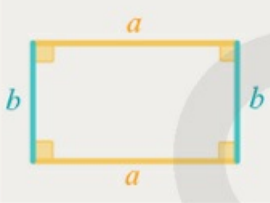
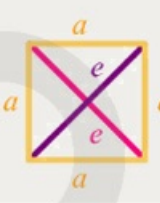
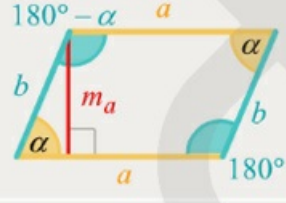
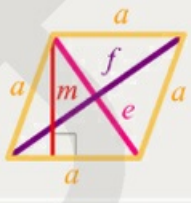
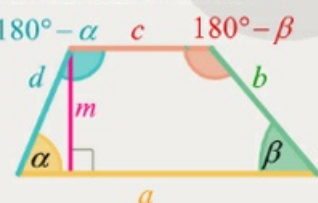
Azokat a négyszögeket nevezzük deltoidnak, amik papírsárkány alakúak és az átlóik merőlegesek egymásra.

Egy kicsit precízebben: deltoid az a négyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra és legalább az egyik átló szimmetriatengely.

A deltoidok közül kétféle speciális deltoidot érdemes megjegyezni, az egyik a rombusz, a másik a négyzet. Vagyis minden négyzet és minden rombusz deltoid. A deltoidok átlóit e -vel és f -fel jelöljük, és ezek csak akkor egyforma hosszúak, ha négyzetről van szó. A deltoidok területét általában az átlóik segítségével érdemes kiszámolni.

Területe:

$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

TRAPÉZOK	DELTOIDOK
TÉGLALAP  $T = a \cdot b$	NÉGYZET  $T = a \cdot a$ $T = \frac{e \cdot e}{2}$
PARALELOGRAMMA  $T = a \cdot m_a$ $T = b \cdot m_b$	ROMBUSZ  $T = a \cdot m$ $T = \frac{e \cdot f}{2}$
ÁLTALÁNOS TRAPÉZ  $T = \frac{a + c}{2} \cdot m$	ÁLTALÁNOS DELTOID  $T = \frac{e \cdot f}{2}$

mateking.hu

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Trigonometria a síkgeometriában

$$\sin \alpha = \frac{\text{szögelszemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{szögmelletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{szögelszemközti befogó}}{\text{szögmelletti befogó}} = \frac{a}{b}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Derékszögű háromszög α hegyesszögének koszinuszát a következőképp értelmezzük:

$$\cos \alpha = \frac{\text{szögmelletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Derékszögű háromszög α hegyesszögének szinuszt a következőképp értelmezzük:

$$\sin \alpha = \frac{\text{szögelszemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Derékszögű háromszög α hegyesszögének tangensét a következőképp értelmezzük:

$$\tan \alpha = \frac{\text{szögelszemközti befogó}}{\text{szögmelletti befogó}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

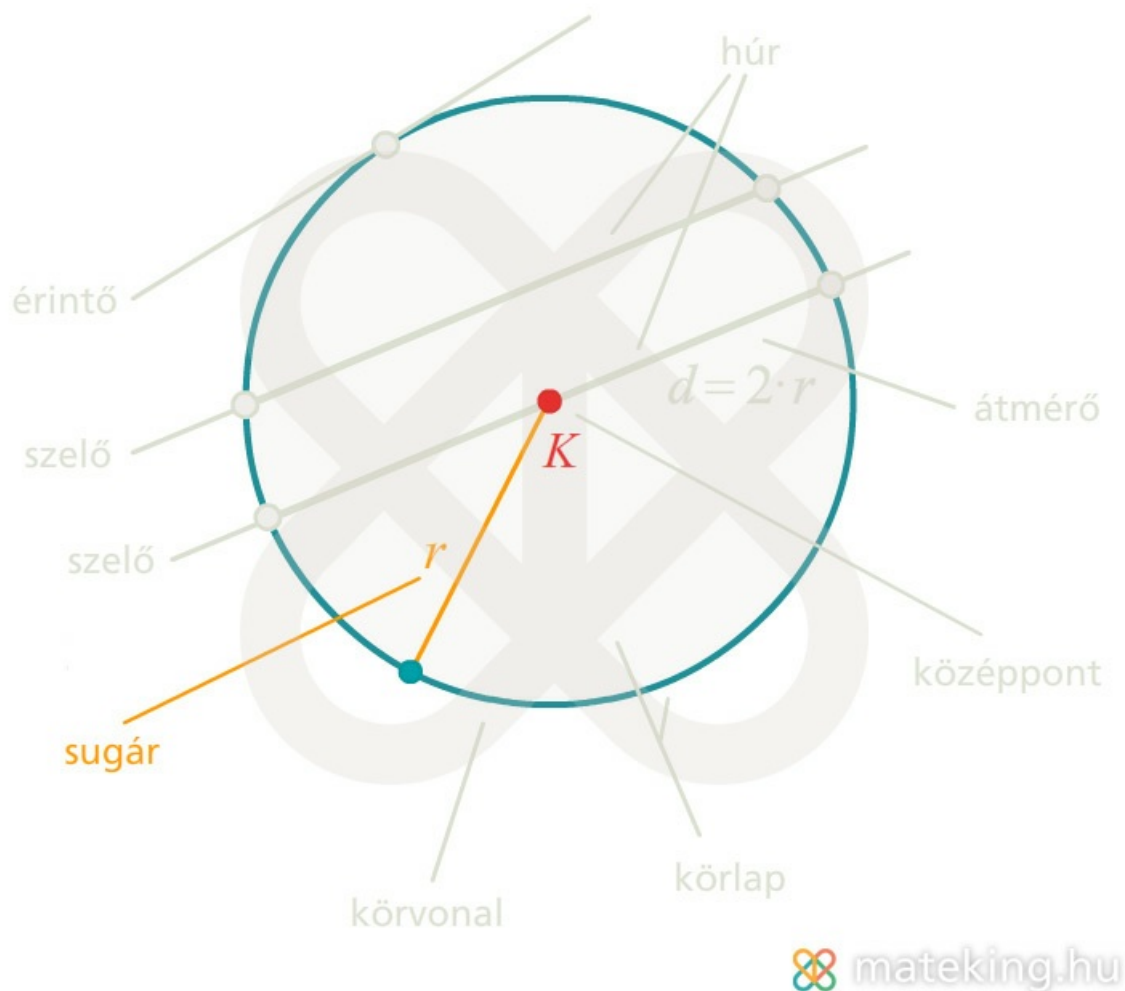
A körszelet területét úgy kapjuk, hogy először kiszámoljuk, hogy mekkora területű a körcikk, aztán pedig kivonjuk belőle az ebbe beleeső egyenlőszárú háromszög területét:

$$T_{sz} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

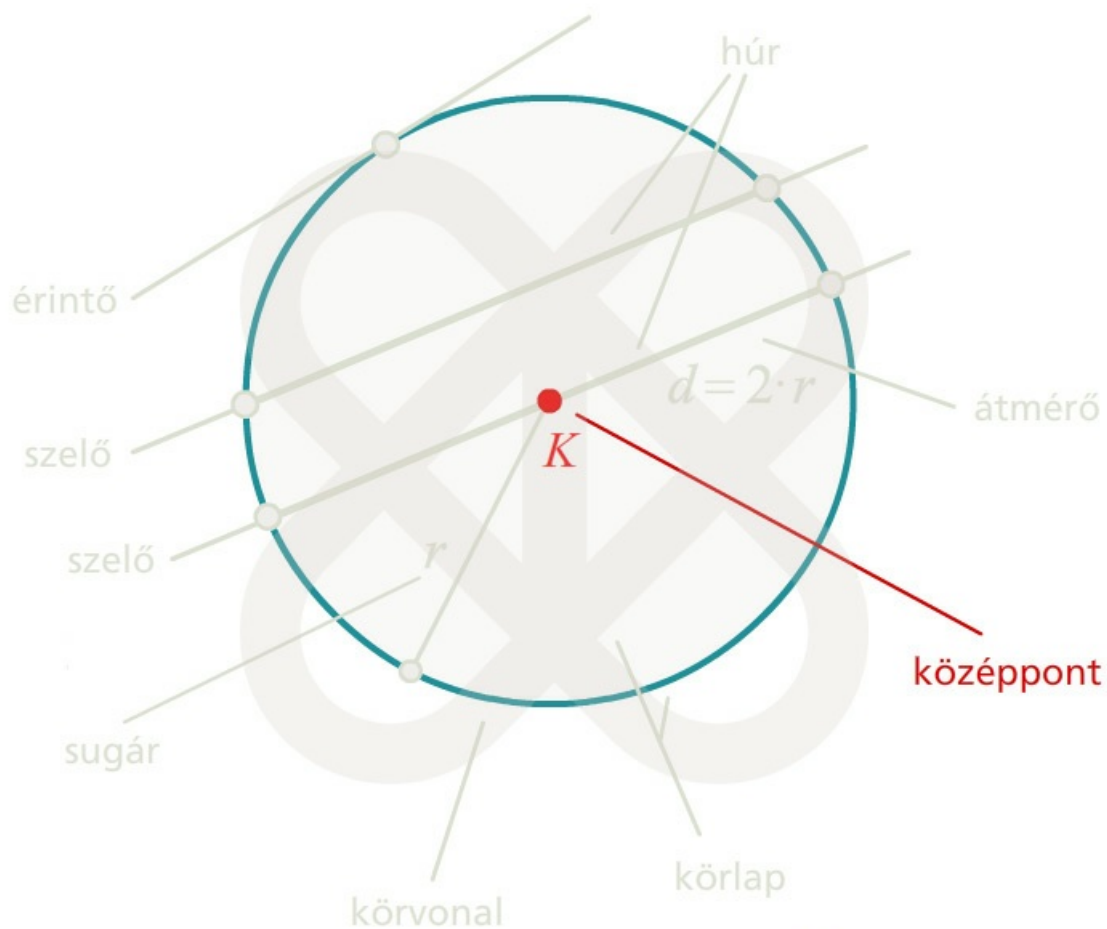
A kör

Egy kör sugara a kör középpontját a körvonal bármely pontjával összekötő szakasz hossza. A kör sugarát r betűvel jelöljük ami a radius szó kezdőbetűje.



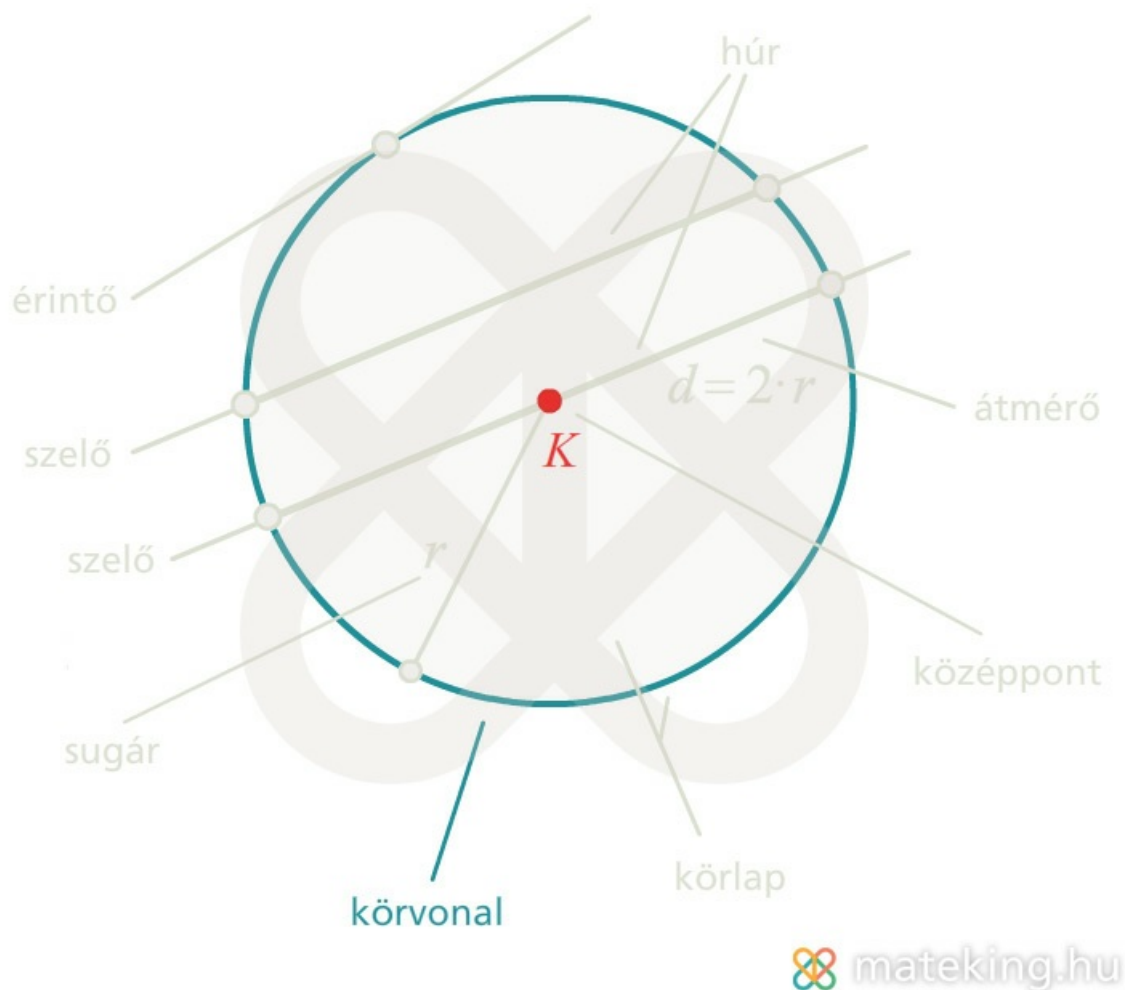
[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kör azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Ezt az adott pontot hívjuk a kör középpontjának. A kör középpontját általában O-val vagy K-val szokás jelölni.



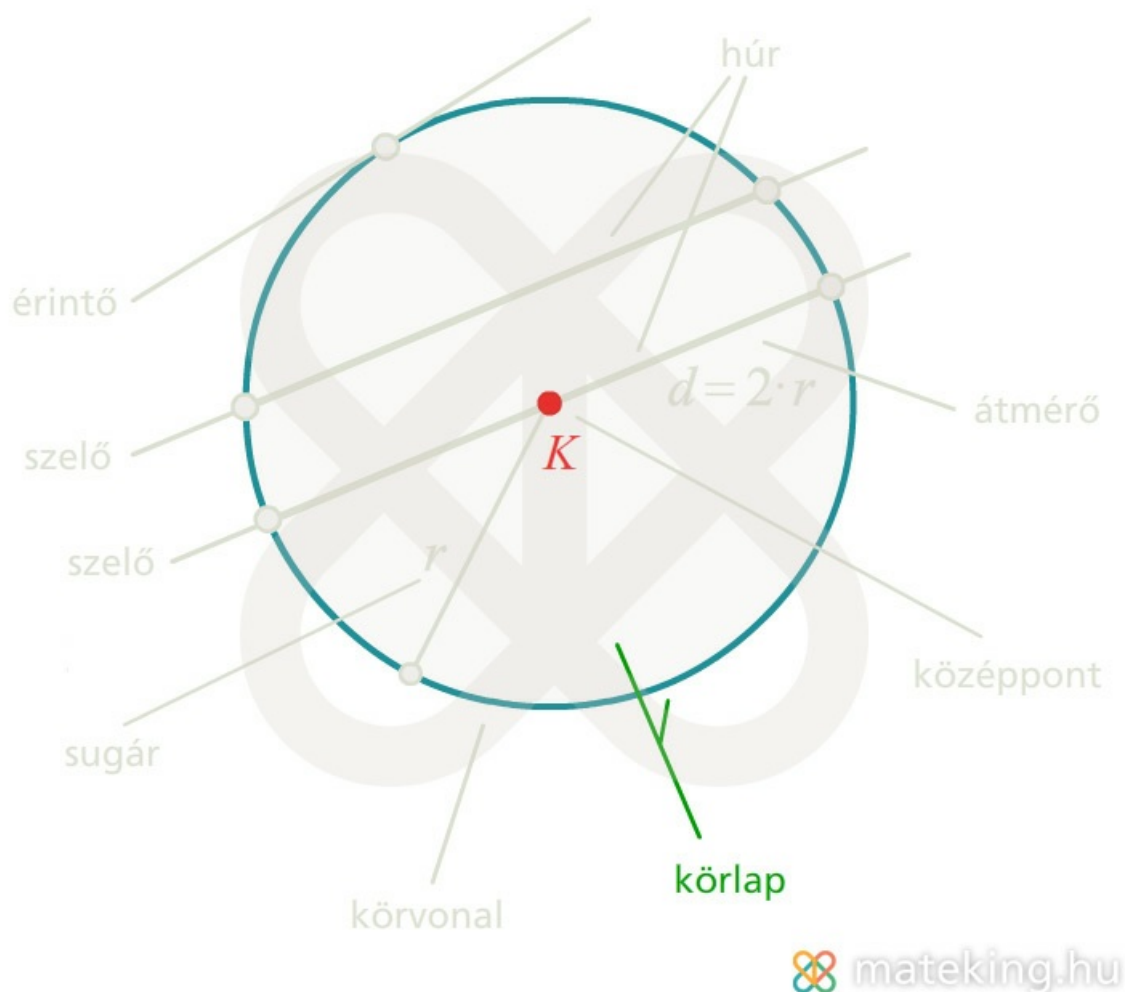
[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A körvonal azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra vannak. A körvonalat szokás egyszerűen körként is emlegetni.



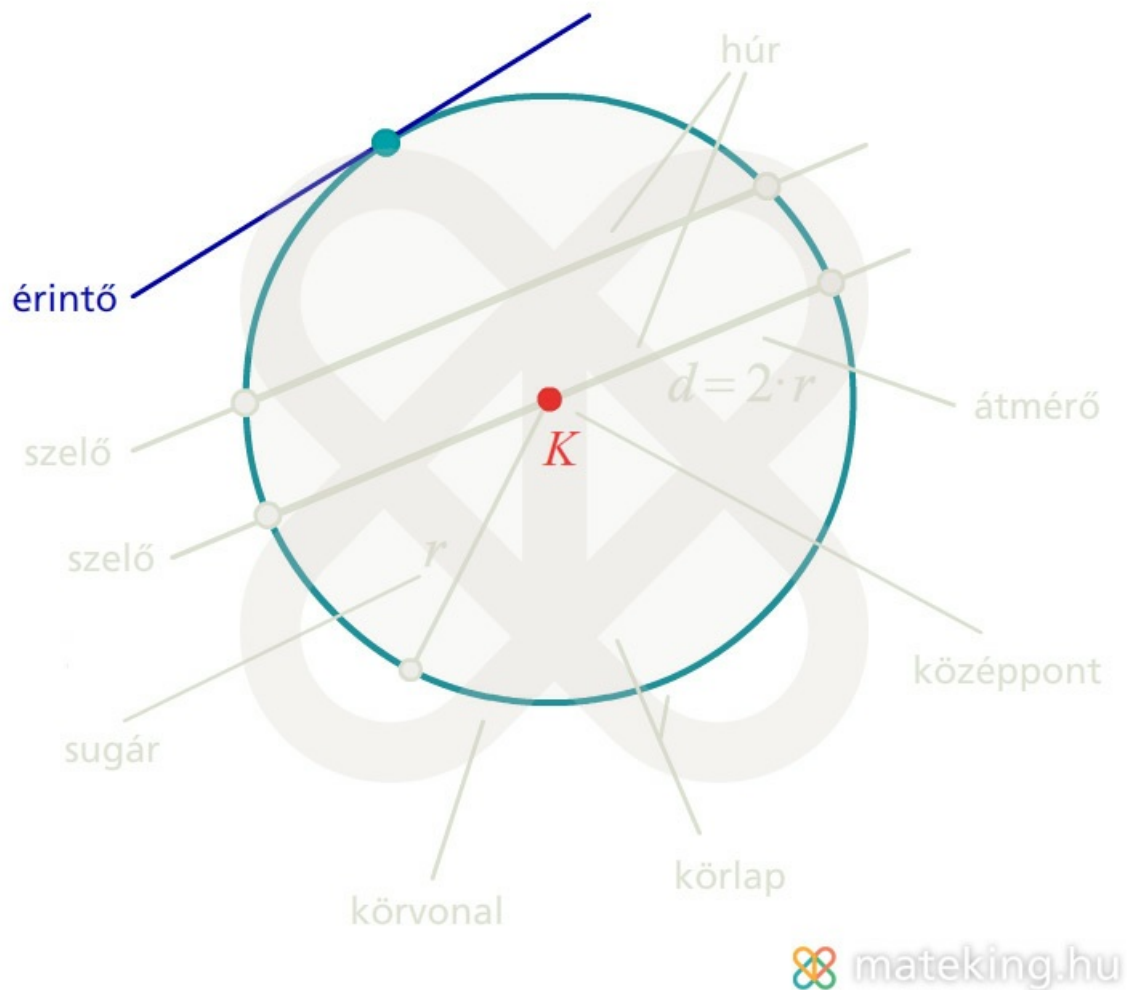
[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A körlap vagy körlemez a körvonal és a körvonalon belüli rész együttes elnevezése. Ezt így egyben szokás egyszerűen csak simán körnek is nevezni. Matematikailag precíz definíciója: azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) legfeljebb egy adott r távolságra (r a kör sugara) vannak.



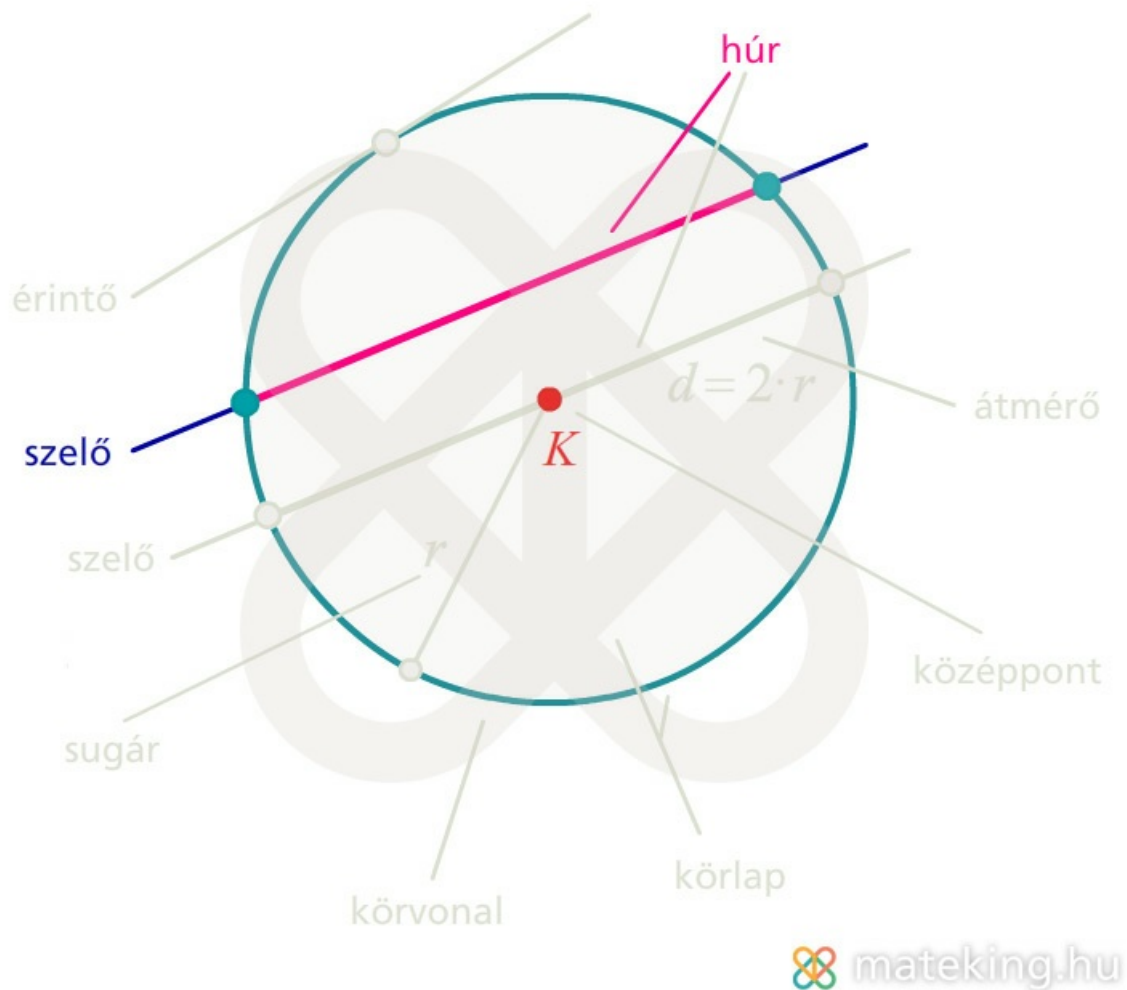
[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy egyenes éppen olyan távol halad egy kör középpontjától, mint a kör sugara, akkor ez az egyenes érinti a kört. Az érintőnek csak egy közös pontja van a körrel, amit érintési pontnak nevezünk. Az érintési pontba vezető sugár mindig merőleges az érintőre.



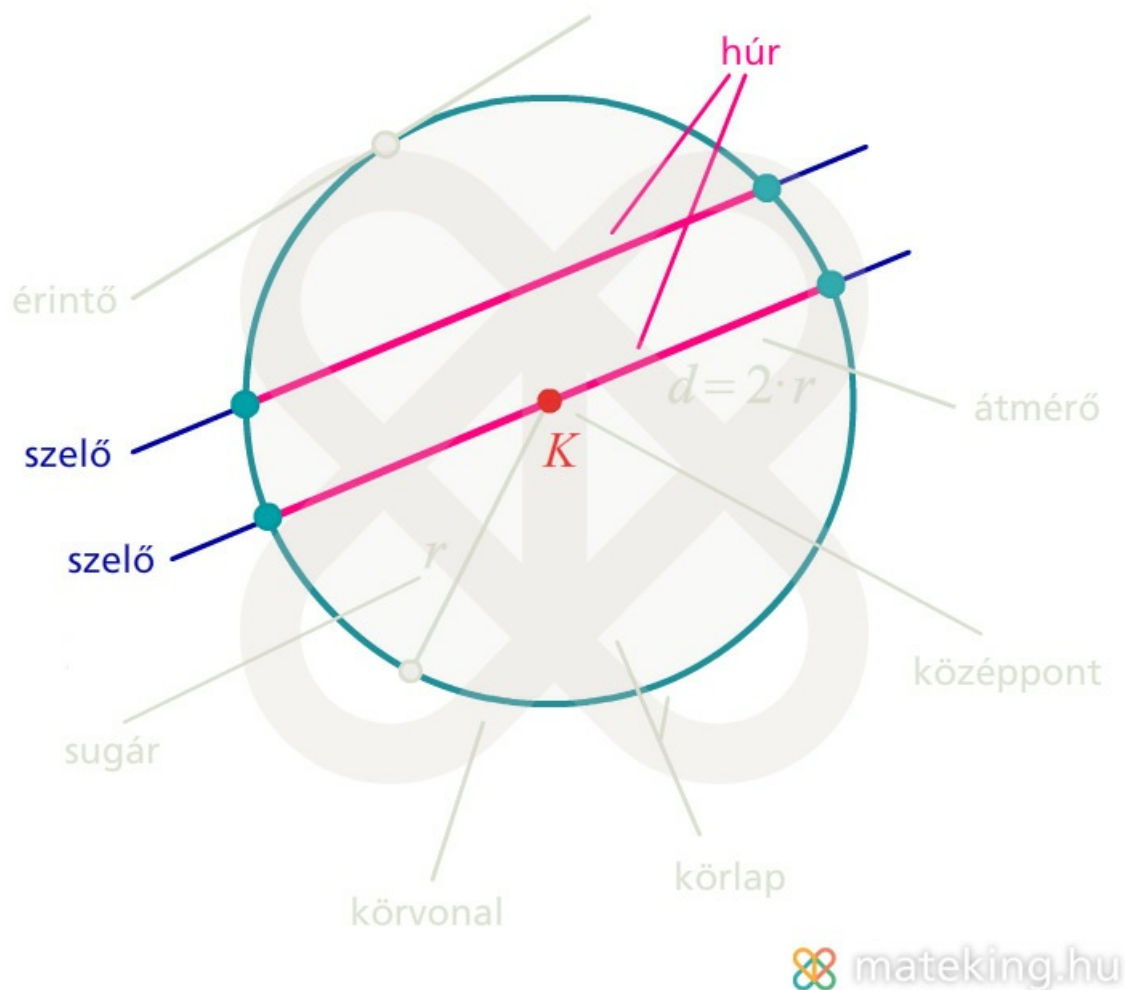
[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat az egyeneseket, amik metszik a kört úgy hívjuk, hogy szelő. A szelők két pontban metszik a kört és a két pont közötti szakasz a húr. Olyankor, amikor a szelő éppen átmegy a kör középpontján, a szelő a kör területét felezi, és ilyenkor a metszéspontok közötti hűrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.



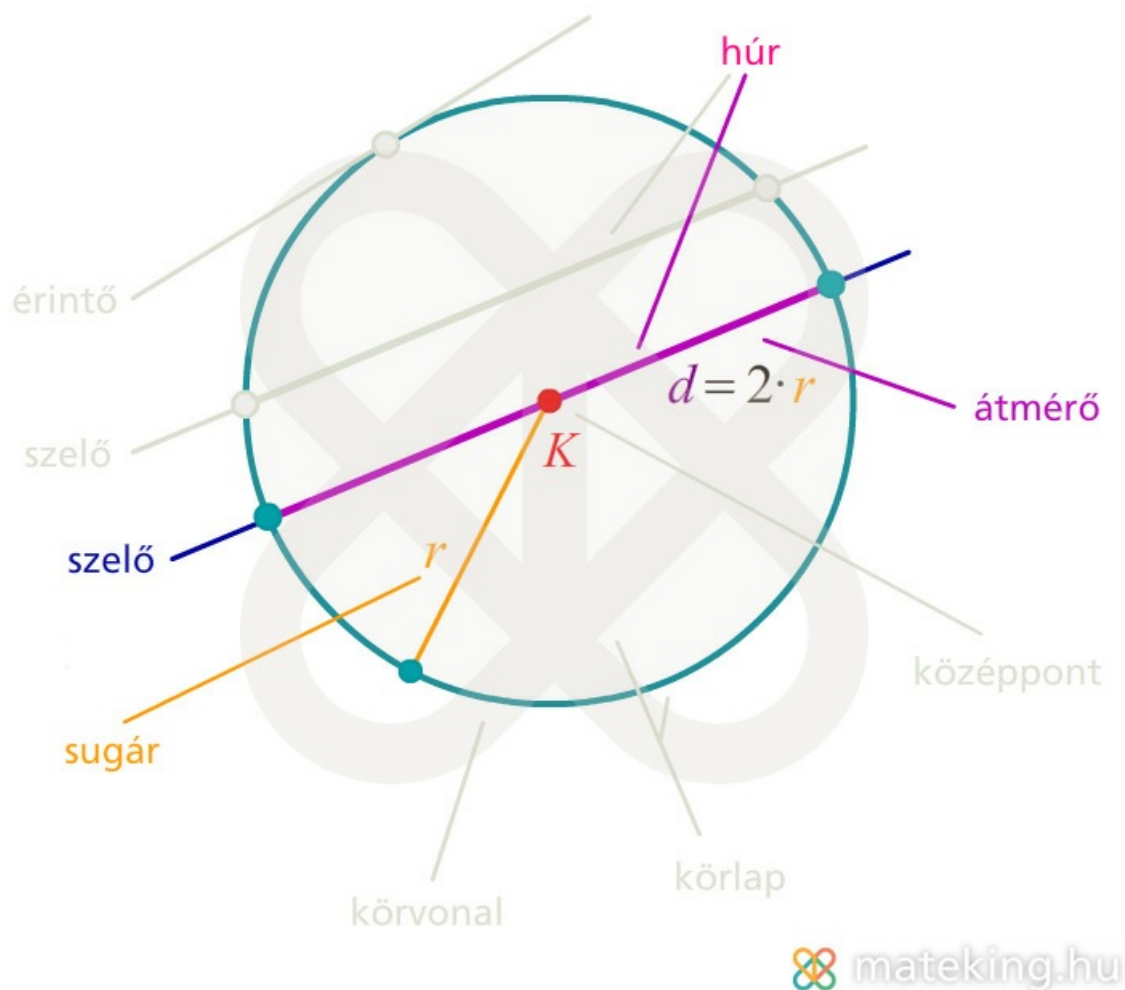
[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy körben a körvonal két különböző pontját összekötő szakaszt húrnak nevezzük. Olyankor, amikor a húr éppen átmegy a kör középpontján, a húr átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.



[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kör középpontját áthaladó húst átmérőnek nevezzük. Az átmérő a kör maximális szélessége, és az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese. Jele d a diameter szó kezdőbetűje alapján.



[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy adott ponttól állandó távolságra lévő pontok halmazát körvonalnak nevezzük. És ezt az állandó távolságot hívjuk a kör sugarának. A sugár jele r . A kör középpontját általában K -val jelöljük.

És most nézzük a kör részeit:

Középpont: A kör azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Ezt az adott pontot hívjuk a kör középpontjának. A kör középpontját általában O -val vagy K -val szokás jelölni.

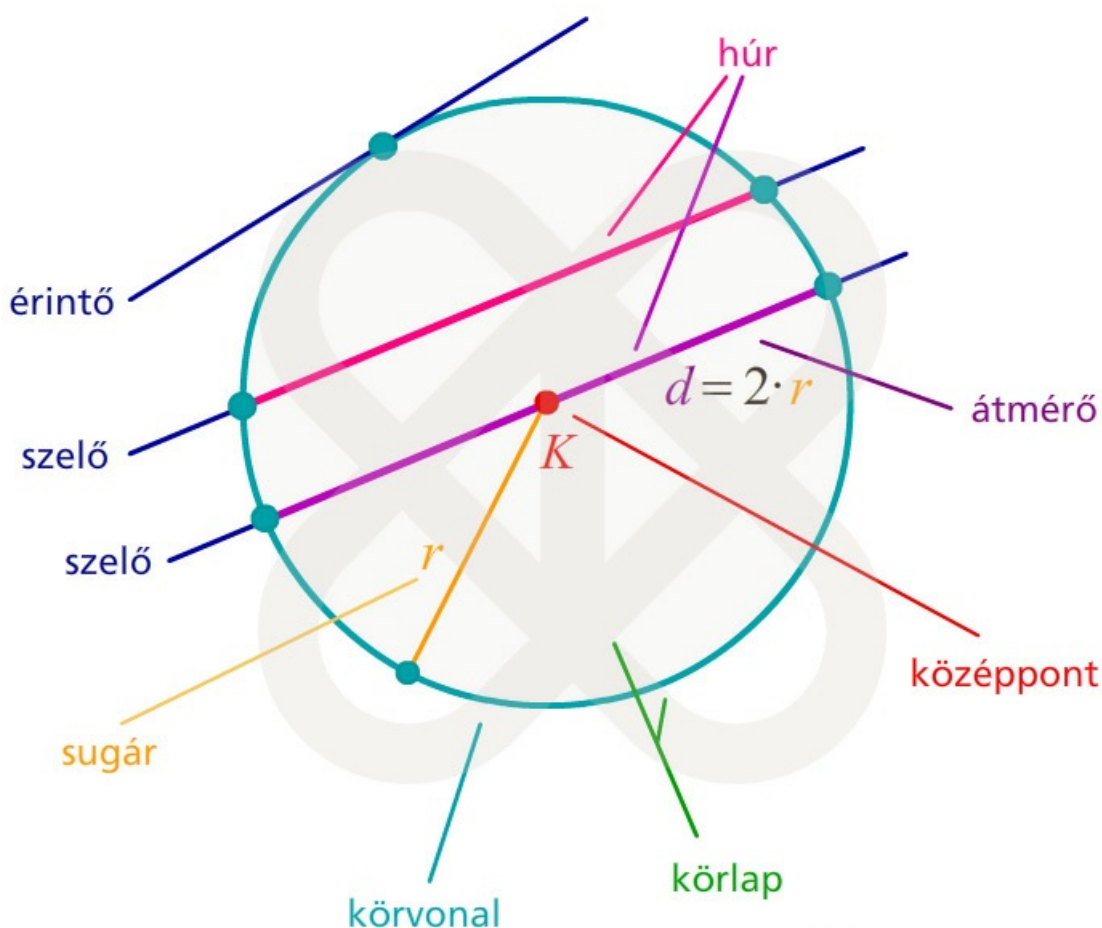
Körvonal: A körvonal azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra vannak. A körvonalat szokás egyszerűen körként is emlegetni.

Sugár: Egy kör sugara a kör középpontját a körvonal bármely pontjával összekötő szakasz hossza. A kör sugarát r betűvel jelöljük ami a radius szó kezdőbetűje.

Körlap vagy körlemez: A körlap vagy körlemez a körvonal és a körvonalon belüli rész együttes elnevezése. Ezt így egyben szokás egyszerűen csak simán körnek is nevezni. Matematikailag precíz definíciója: azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) legfeljebb egy adott r távolságra (r a kör sugara) vannak.

Húr: Egy körben a körvonal két különböző pontját összekötő szakaszt húrnak nevezzük. Olyankor, amikor a húr éppen átmegy a kör középpontján, a húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.

Átmérő: A kör középpontját áthaladó húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő a kör maximális szélessége, és az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese. Jele d a diameter szó kezdőbetűje alapján.

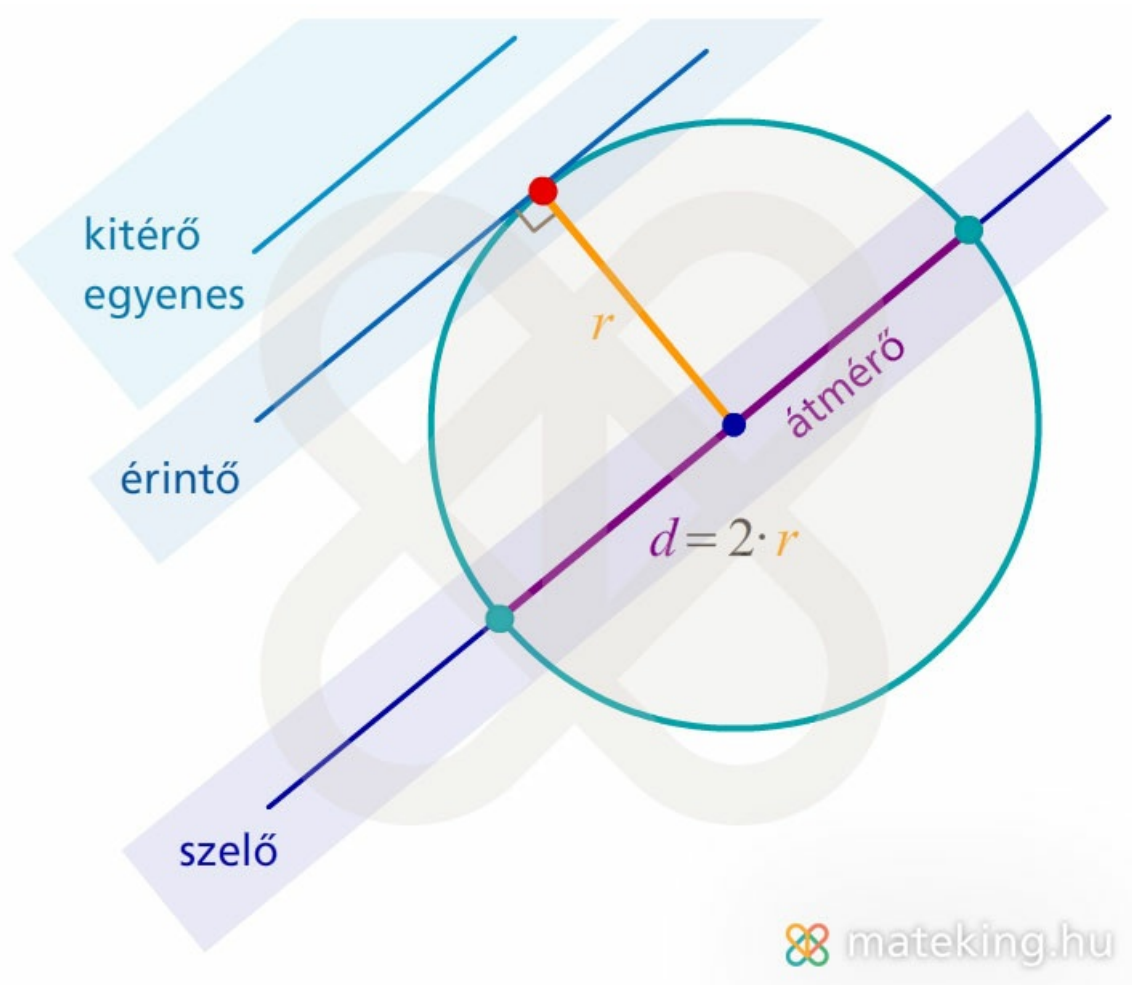


A kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkban háromféle lehet. Az egyenes vagy metszi a kört vagy érinti, vagy kitérő.

Szelő: Azokat az egyeneseket, amik metszik a kört úgy hívjuk, hogy szelő. A szelők két pontban metszik a kört és a két pont közötti szakasz a húr. Olyankor, amikor a szelő éppen átmegy a kör középpontján, a szelő a kör területét felezi, és ilyenkor a metszéspontok közötti húst átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.

Érintő: Ha az egyenes éppen olyan távol halad a kör középpontjától, mint a kör sugara, akkor érintőt kapunk. Az érintőnek csak egy közös pontja van a körrel, amit érintési pontnak nevezünk. Az érintési pontba vezető sugár mindig merőleges az érintőre.

Kitérő egyenes: Végül az is lehet, hogy a körnek egyetlen közös pontja sincs a körrel, ilyenkor kitérő egyenesnek nevezzük.



[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két kör kölcsönös helyzete a síkban már eléggé sokféle lehet. Két fő esetet lehet megkülönböztetni egymástól. Az egyik eset, amikor a két kör sugara nem ugyanakkora, a másik eset pedig az, amikor a két kör sugara ugyanakkora.

Két kör kölcsönös helyzete, ha a körök sugara nem ugyanakkora:

Elkerülő körök: Ha a két kör középpontjának távolsága nagyobb, mint a körök sugarainak összege, akkor a köröknek nincs közös pontjuk.

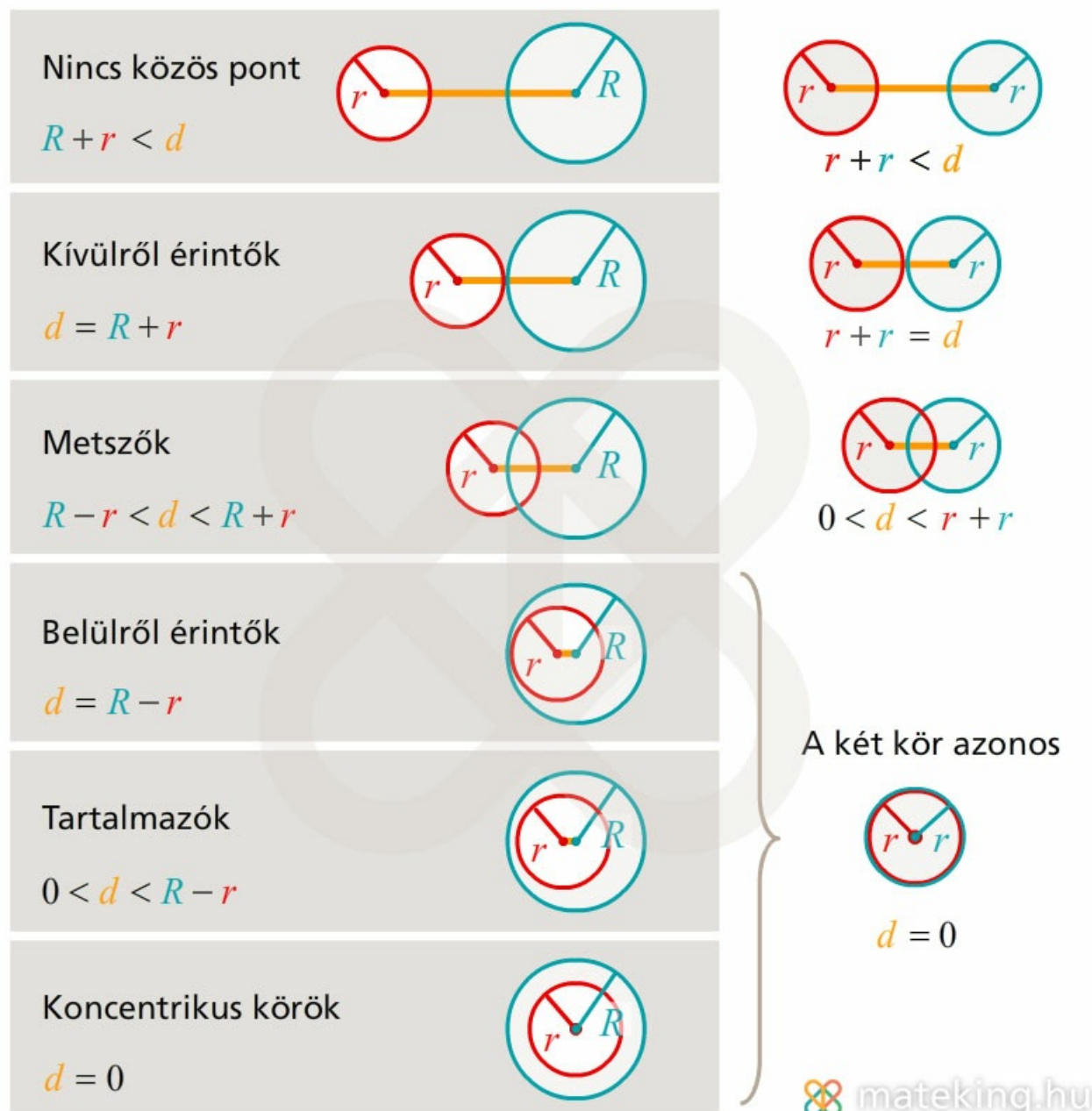
Kívülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága éppen a sugarak összege, akkor egy közös pontjuk van és ilyenkor a két kör kívülről érinti egymást.

Metsző körök: Ha a körök középpontjainak távolsága kisebb, mint a sugarak összege, de nagyobb, mint a sugarak különbsége, akkor a körök metszik egymást. Ilyenkor a körvonalaiknak két közös pontja van.

Belülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága a két kör sugarának a különbsége, akkor az egyik kör belülről érinti a másikat.

Tartalmazó körök: Ha a két középpont távolsága még ennél is kisebb, de pozitív, akkor az egyik kör tartalmazza a másik kört.

Koncentrikus körök: Végül, ha a két kör középpontjának a távolsága nulla, vagyis a középpontok egybeesnek, akkor azt mondjuk, hogy a körök koncentrikus körök.



Két kör kölcsönös helyzete, ha a körök sugara ugyanakkora:

Elkerülő körök: Ha a két kör középpontjának távolsága nagyobb, mint a körök sugarainak összege, akkor a köröknek nincs közös pontjuk.

Kívülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága éppen a sugarak összege, akkor egy közös pontjuk van és ilyenkor a két kör kívülről érinti egymást.

Metsző körök: Ha a körök középpontjainak távolsága kisebb, mint a sugarak összege, de nagyobb, mint nulla, akkor a körök metszik egymást. Ilyenkor a körvonalaiknak két közös pontja van.

Egybeeső körök: Ha a középpontok távolsága nulla, vagyis a középpontok egybeesnek, akkor azt mondjuk, hogy a körök koncentrikus körök.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az r sugarú kör kerülete:

$$K = 2r \cdot \pi$$

Területe:

$$T = r^2 \cdot \pi$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A körcikk ívhossza és területe úgy aránylik a kör kerületéhez és területéhez, mint a körcikkhez tartozó középponti szög a 360° -hoz:

$$I_\alpha = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2r \cdot \pi$$

$$T_\alpha = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Thalész-tétel azt mondja, hogy ha az AB szakasz egy kör átmérője, és C a kör tetszőleges harmadik pontja, akkor az ACB -szög mindig derékszög.

Ezt úgy is szokás mondani, hogy az AB szakasz a körív bármely harmadik C pontjából derékszögben látszik.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Szinusztétel és koszinusztétel

Bármely háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával. De ne ezt jegyezzük meg. A szinusztétel ennél sokkal többet is tud. Mégpedig ezt, ahol R a háromszög köré írható körének a sugara:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Koszinusz tétel minden háromszögben felírható:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Térgeometria

Vegyünk egy síkbeli sokszöget és a sík felett egy pontot. Ha a pontot összekötjük a síkbeli alakzat csúcsaival, akkor egy térbeli alakzatot kapunk, amit úgy hívunk, hogy gúla.

A gúla felszíne:

$$A = T + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3}$$

ahol m a gúla magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kúp egy gúlaszerű térbeli test, melynek alapja egy kör.

A kúp felszíne:

$$A = T + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3}$$

ahol m a kúp magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A hasáb egy olyan test, amelynek két párhuzamos lapja egymással egybevágó sokszög, a többi lapja pedig paralelogramma.

A hasábok felszíne:

$$A = 2T + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = T \cdot m$$

ahol m a hasáb magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kocka térfogata:

$$V = a^3$$

ahol a az oldalélének hosszát jelenti.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kocka felszíne:

$$A = 6a^2$$

ahol a a kocka élének hossza.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A henger olyan, mint a hasáb, csak nem sokszög a két párhuzamos lap, hanem kör.

A hengerek felszíne:

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot m$$

Térfogata:

$$V = r^2\pi \cdot m$$

ahol m a henger magassága, r az alapkörének sugara.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hasábok térfogatát a következőképp számolhatjuk ki:

$$V = T \cdot m$$

ahol m a hasáb magassága, T pedig az alaplappal területe.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hasábok felszínét a következőképp számolhatjuk ki:

$$A = 2T + \text{palást területe}$$

ahol T az alaplappal (vagy fedőlap) területe, a palást területe pedig az oldallapok területeinek összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$V = r^2\pi \cdot m$$

ahol m a henger magassága, r az alapkörének sugara.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot m$$

ahol r az alapkör sugara, m a henger magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Gúlák térfogatát a következőképp számolhatjuk ki:

$$V = \frac{T \cdot m}{3}$$

ahol m a gúla magassága, T pedig az alaplap területe.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$A = T + \text{palást területe}$$

ahol T az alaplap területe

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$V = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3}$$

ahol r az alapkör sugara, m a kúp magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$A = r^2 \pi + a \cdot r \cdot \pi$$

ahol r az alapkör sugara, a az alkotó.

$$\text{Továbbá } a^2 = r^2 + m^2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyszetalapú gúla térfogata könnyebben kiszámolható így:

$$V = \frac{a^2 \cdot m}{3}$$

ahol a a gúla alapélének hossza, m a gúla magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyszetalapú gúla felszíne könnyebben kiszámolható így:

$$A = a^2 + 2 \cdot \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot a$$

ahol a a gúla alapélének hossza, m a gúla magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A gömb egy adott ponttól (középpont) egyenlő távolságra lévő pontok halmaza.

A gömb felszíne:

$$A = 4r^2\pi$$

Térfogata pedig:

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

ahol r a gömb sugara.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A gömb térfogata:

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

ahol r a gömb sugara.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A gömb felszíne:

$$A = 4r^2\pi$$

ahol r a gömb sugara.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a gömböt kettévágjuk egy olyan síkkal, ami épp átmegy a középpontján, akkor a vágás során keletkező kör sugara éppen megegyezik a gömb sugarával. Ezt a kört nevezzük főkörnek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a gömb középpontját összekötjük a gömbfelület bármelyik pontjával, akkor az így keletkező szakasz hossza állandó, és ez az állandó hosszúság a gömb sugara.

A sugarat r -el jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a gömb középpontját összekötjük a gömbfelület bármelyik pontjával, akkor az így keletkező szakasz hossza állandó, és ez az állandó hosszúság a gömb sugara. Ha meghosszabbítjuk ezt a szakaszt a másik irányba is, akkor egy átmérőt kapunk

Az átmérő jele d , és mindig sugár kétszerese.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy forgáskúpot az alaplap síkjával párhuzamosan metszünk el, akkor egy csonkakúpot kapunk.

A csonkakúp felszíne:

$$A = T + t + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = \frac{(R^2\pi + R \cdot r \cdot \pi + r^2\pi) \cdot m}{3}$$

ahol R az alapkör, r a fedőkör sugara, m pedig a csonkakúp magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$V = \frac{(R^2\pi + R \cdot r \cdot \pi + r^2\pi) \cdot m}{3}$$

ahol R az alapkör, r a fedőkör sugara, m pedig a csonkakúp magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$A = T + t + \text{palást területe}$$

ahol T az alaplap, t pedig a fedőlap területe, a palást területe pedig az oldallapok területeinek összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy gúlát az alaplap síkjával párhuzamosan metszünk el, akkor egy csonkagúlát kapunk.

A csonkagúla felszíne:

$$A = T + t + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = \frac{(T + \sqrt{T \cdot t} + t) \cdot m}{3}$$

ahol T az alaplap, t a fedőlap területe, m pedig a csonkagúla magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$V = \frac{(T + \sqrt{T \cdot t} + t) \cdot m}{3}$$

ahol T az alaplap, t a fedőlap területe, m pedig a csonkagúla magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$A = T + t + \text{palást területe}$$

ahol T az alaplap, t a fedőlap területe, a palást területe pedig az oldallapok területeinek összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A négyzet alapú csonkagúla térfogata egyszerűbben is kiszámolható így:

$$V = \frac{(a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot m}{3}$$

Ahol a az alaplapon oldalélének, b a fedőlap oldalának hossza, m pedig a csonkagúla magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A csonkagúla felszíne könnyebben kiszámolható, ha négyzetalapú:

$$A = a^2 + b^2 + 2 \cdot (a + b) \cdot h$$

ahol a az alaplapon oldalélének, b a fedőlap oldalélének hossza, h pedig az oldallap (trapéz) magassága.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektorok

A vektor egy irányított szakasz.

Jelölése: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$

A két vektor összege:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

A két vektor különbsége:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ vektor hossza:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza:

$$\overrightarrow{AB} = |\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

És pont ugyanígy kapjuk meg az A és B pontok távolságát is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két pont közti vektor a végpontba mutató helyvektor minusz a kezdőpontba mutató helyvektor.

$$\text{Tehát } \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektorok, egyenesek és síkok egyenletei

A vektor egy irányított szakasz.

Jelölése: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$

A két vektor összege:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

A két vektor különbsége:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ vektor hossza:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza:

$$\overrightarrow{AB} = |\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

És pont ugyanígy kapjuk meg az A és B pontok távolságát is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két pont közti vektor a végpontba mutató helyvektor minusz a kezdőpontba mutató helyvektor.

$$\text{Tehát } \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$.

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ [vektorok](#) skaláris szorzata:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \gamma = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

ahol γ a két vektor által bezárt szög

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{ vagyis az } \underline{a} \text{ vektor hossza}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \text{ vagyis a } \underline{b} \text{ vektor hossza}$$

Két vektor merőleges egymásra, ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ $+90^\circ$ -os elforgatottja:

$$\underline{a}^{+90^\circ} = (-a_2, a_1)$$

Az $\underline{a}$ -90° -os elforgatottja:

$$\underline{a}^{-90^\circ} = (a_2, -a_1)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektor skaláris szorzatát kiszámolhatjuk így:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \gamma$$

ahol γ a két vektor által bezárt szög,

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{ vagyis az } \underline{a} \text{ vektor hossza}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \text{ vagyis az } \underline{b} \text{ vektor hossza}$$

Illetve kiszámolhatjuk így is:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, azaz ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ [vektorok](#) vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ [vektorok](#) által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Statisztikai alapfogalmak

Az ismérvek olyan vizsgálati szempontok, amelyek alapján a [sokaság](#) részekre osztható.

Vannak olyanok, amik csak két részre osztják a sokaságot, például azokra, akik megbuktak statisztikából és azokra akik nem. Olyan is van, ami mondjuk öt részre osztja a sokaságot, sőt olyan is lehet, hogy végtelen sok részre osztja.

Négy fő ismérvfajta különböztethető meg:

- területi
- időbeli
- mennyiségi
- minőségi

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az ismérveken belül négyféle mérési szintet tudunk megkülönböztetni.

A nominális (névleges) mérési skála a [sokaság](#) elemeit valamilyen tulajdonság szerint csoportokba sorolja, de a csoportok között nincsen semmilyen sorrendiség.

Ilyenek pl.:

- Az áldozatok halálának oka (MINŐSÉGI)
- A terroristák származási országa (TERÜLETI)
- A pilóták állampolgársága (MINŐSÉGI)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az ismérveken belül négyféle mérési szintet tudunk megkülönböztetni.

Az ordinális (sorrendi) mérési skála a [sokaság](#) elemeit valamilyen tulajdonság szerint csoportokba sorolja, és a csoportok között van sorrendiség.

Ilyenek pl.:

- A [statisztika](#) vizsga osztályzata (MINŐSÉGI)
- A hotelek csillagos értékelése (MINŐSÉGI)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az intervallum-skála a [sokaság](#) elemeit valamilyen mérés szerint rendezi sorba.

Az intervallum-skála jellegzetes tulajdonsága, hogy a "mennyivel több" kérdésre választ tud adni, de a "hányszor annyi" kérdésre nem.

Ilyenek pl.:

- Hőmérséklet (MENNYISÉG)
- Születési dátum (IDŐBELI)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az arány-skála a [sokaság](#) elemeit szintén valamilyen mérés szerint rendezi sorba, de abban különbözik az intervallum-skálától, hogy ennek van valódi nullpontja.

Innen ered az arány-skála elnevezés is, van értelme az egymáshoz viszonyított arányoknak.

Ilyenek pl.:

- Életkor (MENNYISÉGI)
- Testmagasság (MENNYISÉGI)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hogyha egy [sokaság](#) elemei egymástól jól elkülöníthető egységek, akkor a [sokaság](#) diszkrét.

Egy évfolyam hallgatói például diszkrét [sokaság](#), egy borászat által termelt éves bormennyiség viszont már nem.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hogyha egy [sokaság](#) nem diszkrét, akkor az folytonos.

Egy évfolyam hallgatói például diszkrét [sokaság](#), egy borászat által termelt éves bormennyiség viszont már folytonos [sokaság](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az időpontra vonatkozó sokaságokat álló sokaságnak nevezzük.

Például egy város lakosainak száma január elsején egy álló [sokaság](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az időtartamra vonatkozó sokaságokat mozgó sokaságnak nevezzük.

Például egy városban január elsején született lakosok száma mozgó [sokaság](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [viszonyszámok](#) jele V és kiszámolásának módja meglehetősen semmitmondó:

$$V = \frac{A}{B}$$

A képletben A és B bármi lehet, de a képlet mégis roppant fontos.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha több viszonzyszámunk van, fölmerülhet az igény ezek átlagolására.

Az egyik ilyen lehetőség a számtani átlag.

$$\bar{V} = \frac{V_1 \cdot B_1 + V_2 \cdot B_2}{B_1 + B_2} = \frac{A_1 + A_2}{B_1 + B_2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha több viszonyszámunk van, fölmerülhet az igény ezek átlagolására.

Az egyik ilyen lehetőség a harmonikus átlag.

$$\bar{V} = \frac{A_1 + A_2}{\frac{A_1}{V_1} + \frac{A_2}{V_2}} = \frac{A_1 + A_2}{B_1 + B_2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A dinamikus [viszonyszámok idősorok](#) adataiból számított hányadosok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A megoszlási viszonyszám egy [sokaság](#) valamely részének az egészhez viszonyított arányát írja le.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az intenzitási viszonyszám két, egymással valamilyen kapcsolatban álló [sokaság](#) mennyiségeinek hányadosa.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat az adatsorokat nevezzük idősoroknak, melyek egy vagy több [ismérv](#) időben történő megoszlását írják le.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázis [viszonyszámok](#) mindig a bázishoz viszonyítanak.

$$b_m = \frac{y_m}{y_1}$$

A bázis [viszonyszámok](#) és a lánc [viszonyszámok](#) közötti kapcsolat a következő:

$$l_2 \cdot l_3 \cdot \dots \cdot l_m = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \dots \cdot \frac{y_m}{y_{m-1}} = b_m$$

Egy másik nagyon fontos összefüggés, hogy

$$l_m = \frac{y_m}{y_{m-1}} = \frac{b_m}{b_{m-1}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A lánc[viszonyszámok](#) mindig az előző évhez viszonyítanak.

$$l_m = \frac{y_m}{y_{m-1}}$$

A bázis[viszonyszámok](#) és a lánc[viszonyszámok](#) közötti kapcsolat a következő:

$$l_2 \cdot l_3 \cdot \dots \cdot l_m = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \dots \cdot \frac{y_m}{y_{m-1}} = b_m$$

Egy másik nagyon fontos összefüggés, hogy

$$l_m = \frac{y_m}{y_{m-1}} = \frac{b_m}{b_{m-1}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A változás átlagos mértéke:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_1}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$$

Tehát összeadogatjuk a változásokat, aztán elosztjuk...

Az évek száma n , de nem n -el osztunk, azért nem, mert a változások számával kell osztanunk, ebből pedig egyel kevesebb van.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A változás üteme azt adja meg, hogy hány százalékos volt a változás.

A változás üteme:

$$\bar{l} = \sqrt[n-1]{l_2 \cdot l_3 \cdot l_4 \cdot \dots \cdot l_n} = \sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^n l_t} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

A gyökkitevőben azért van $n - 1$, mert nem az évek száma kell, hanem a változások száma, egyik évről a másikra. Ez pedig $n - 1$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A tartam[idősorok](#) egy vizsgált időtartamra vonatkozó megfigyeléseket tartalmaznak.

Például egy év baleseteinek a számát, egy hónapban eladott fogkrémek számát, stb. Ilyenkor az adatok összeadása értelmes eredményt ad.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az állapot[idősorok](#) egy vizsgált időtartam egy adott pillanatára vonatkozó megfigyeléseket tartalmazzák, például az ország lakosságának számát egy adott év adott pillanatában, vagy a raktáron lévő fogkrémkészletet egy adott hónap adott pillanatában, stb. és ilyenkor az adatok összeadásával nem kapunk értelmezhető eredményt.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy speciális átlag, például ha négy hónap adataiból számoljuk ki az átlagot, viszont csak három hónapos időtartamra.

Az állapotidősornál mindig kronologikus átlagot számolunk:

$$\bar{y}_k = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \dots + \frac{y_n}{2}}{n-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A statisztikai táblákat három fő csoportba tudjuk sorolni.

A legegyszerűbb típust egyszerű táblának nevezzük.

Ezek tulajdonképpen egymás mellett szerepeltetett valamilyen adatok.

A táblában nincsen sem "Összesen" sor, sem pedig "Összesen" oszlop.

Például:

Ország	GDP/fő (USD)	Gépjárművek (db/1000 fő)
Ausztria	50 380	550
Belgium	46 237	503
Hollandia	52 646	481
Svájc	82 484	539

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A statisztikai táblákat három fő csoportba tudjuk sorolni.

Az egyik típus az úgynevezett csoportosító tábla, aminek lényege, hogy az adatokat valamelyik [ismérv](#) szerint tudjuk összesíteni.

Például:

Ország	Népesség (millió)	Sertések száma (millió)
Ausztria	8,9	2,8
Belgium	11,5	6,2
Hollandia	17,4	11,9
Svájc	8,6	1,4
Összesen:	46,4	22,3

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A statisztikai táblákat három fő csoportba tudjuk sorolni.

Az egyik típus az úgynevezett [kombinációs tábla](#) vagy más néven [kontingencia tábla](#), amely esetében mindegyik [ismérv](#) szerint tudjuk az adatokat összesíteni.

Például:

	Nő	Férfi	Össz,
Vezető	7	18	25
Közép-vezető	11	23	34
Beosztott	756	185	941
Össz.	774	226	1000

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy ismerv szerinti elemzés

Az adatsor leggyakoribb értéke a [módusz](#). Hogyha például Bob matekjegyei ezek:

2, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 2, 4

Akkor egyszerűen meg kell számolni, hogy melyikből van a legtöbb, és az a matekjegy lesz a [módusz](#). Most 2-esből van a legtöbb, így Bob matekjegyeinek a módusza 2. A [módusz](#) jele Mo és így most $Mo=2$.

Léteznek olyan eloszlások is, amelyeknek több módusza van. Hogyha például Bob jegyei:

1, 2, 2, 3, 5, 3, 3, 4, 2

Itt 2-esből és 3-asból ugyanannyi van, mindkettőből 3 darab. Ez egy kétmódusú [eloszlás](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [medián](#) a növekvő sorba rendezett adatsor középső értéke. Ha az adatsorban páros sok elem van, akkor nincs középső elem, ilyenkor a két középső elem átlagát vesszük.

Hogyha például Bob matekjegyei ezek:

2, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 2, 4

Akkor egyszerűen növekvő sorba kell rakni..

1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

És aztán meg kell keresni melyik a középső. Most nincsen középső, mert páros sok elem van, így ilyenkor a két középen lévő átlagoljuk:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, **2,5**, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

Ezeknek az átlaga 2,5 vagyis a [medián](#) most 2,5. A [medián](#) jele Me , így $Me=2,5$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az átlagot úgy kapjuk meg, hogy az összes elemet összeadjuk, és aztán elosztjuk az elemek számával.

Jele: $\bar{x}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az átlagtól való átlagos eltérés egyik legjobb mérőszáma a szórás. Hátránya, hogy egy kicsit ronda a szórás képlete. A szórást egy szigma nevű görög betűvel jelöljük.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az adatsor első felének a felezőpontja az alsó kvartilis.

Az alsó kvartilis jele: Q_1

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az adatsor második felének a felezőpontja a felső kvartilis.

A felső kvartilis jele: Q_3

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kvartilisek és a [medián](#) azt szemlélteti, hogyan oszlanak el az adatsorban szereplő adatok. Ezek segítségével készíthető el a doboz-ábra, vagy másnéven dobozdiagram. Szokás még sodrófa diagramnak is nevezni, és az angol elnevezést is gyakran használják, ami a box plot.

Egy sobarendezett adatsorban öt darab speciális negyedelőpontot fogunk használni. Az első az adatsor legkisebb értéke, ez a Q_0 . Aztán a következő negyedelő az alsó kvartilis, ami Q_1 utána jön a felezőpont vagyis a [medián](#), ezt Me -vel és Q_2 -vel is jelöljük, végül a felső kvartilis, ami a Q_3 . Az adatsor legnagyobb értéke pedig Q_4 . A legnagyobb és a legkisebb érték különbsége a terjedelem, míg a két kvartilis különbségét félterjedelemnek vagy más néven interkvartilisnek hívjuk. Ezekből épül föl a doboz-ábra vagy másként dobozdiagram.

Előfordulhat, hogy az adatsorban kiugró értékek is szerepelnek. A kiugró érték az, ami az alsó kvartilisnél legalább a félterjedelem másfélszeresénél kisebb, vagy pedig a felső kvartilisnél legalább a félterjedelem másfélszeresénél nagyobb. Huh, ez elég bonyolult hangzik. De valójában nagyon egyszerű, csak nézd meg kapcsolódó epizódot és kiderül.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A relatív szórás azt mondja meg, hogy a szórás az átlagnak hány százaléka:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$Mo = mo + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot h_{mo}$$

A képletben mo a nyers [módusz](#), ami a legnagyobb gyakoriságú osztály alsó határa. A k_1 -et úgy kapjuk, ha ennek az osztályköznek a gyakoriságából kivonjuk az előtte lévő osztályköz gyakoriságát. A k_2 -t pedig úgy kapjuk, ha ennek az osztályköznek a gyakoriságából az utána lévő osztályköz gyakoriságát vonjuk le. A h_{mo} pedig ennek az osztályköznek a hosszát jelöli.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$Me = me + \frac{\frac{N}{2} - f'_{me-1}}{f_{me}} \cdot h_{me}$$

Itt f' a kumulált gyakoriság. me a mediánt tartalmazó osztályköz eleje, f_{me} a mediánt tartalmazó osztályköz gyakorisága, f'_{me-1} a [medián](#) előtti osztályköz kumulált gyakorisága, h_{me} pedig a mediánt tartalmazó osztályköz hossza.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$Q_{\frac{k}{m}} = a_i + \frac{\frac{k}{m} \cdot N - f'_{i-1}}{f_i} \cdot h_i$$

Az alsó kvartilis:

$$Q_{\frac{1}{4}} = a_i + \frac{\frac{1}{4} \cdot N - f'_{i-1}}{f_i} \cdot h_i$$

A felső kvartilis:

$$Q_{\frac{3}{4}} = a_i + \frac{\frac{3}{4} \cdot N - f'_{i-1}}{f_i} \cdot h_i$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A relatív gyakoriság jele g_i , és úgy kell kiszámolni, hogy a gyakoriságot osztjuk az összes elemszámmal:

$$g_i = \frac{f_i}{N}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az értékösszeg jele S_i és úgy kapjuk meg, hogy az osztályközöket megszorozzuk a gyakorisággal.

$$S_i = X_i \cdot f_i$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Herfindahl-index egy eszköz a [koncentráció](#) vizsgálatára.

$$HI = \sum Z_i^2$$

A Herfindahl-index $1/N$ és 1 között vesz fel értékeket és minél közelebb van az 1 -hez, annál nagyobb a [koncentráció](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Lorenz-görbe egy eszköz a [koncentráció](#) vizsgálatára.

A Lorenz-görbe az úgynevezett koncentrációs területtel szemlélteti a [koncentráció](#) mértékét.

Minél nagyobb ez a terület, a [koncentráció](#) annál erősebb.

Olyankor pedig, amikor a [Lorenz görbe](#) egybeesik a négyzet átlójával, a [koncentráció](#) nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [alakmutatók](#) arról szólnak, hogy az [eloszlás](#) mennyire asszimmetrikus.

Az egyik legegyszerűbb és leggyakrabban használt [alakmutatók](#), az úgynevezett Pearson-féle mérőszámok:

$$P = 3 \frac{\bar{X} - Me}{\sigma} \quad A = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma}$$

A negatív értékek jobb oldali asszimetriát jelentenek. A pozitív értékek esetén pedig bal oldali asszimetria van.

A Pearson-féle P és A mutatók általában -1 és 1 között tartózkodnak és csak extrém esetekben vesznek föl 1-nél nagyobb vagy -1-nél kisebb értéket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [alakmutatók](#) arról szólnak, hogy az [eloszlás](#) mennyire asszimmetrikus.

Az egyik legegyszerűbb és leggyakrabban használt [alakmutatók](#), az úgynevezett Pearson-féle mérőszámok mellett az F-mutatók:

$$F_{0,25} = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{(Q_3 - Me) + (Me - Q_1)}$$

$$F_{0,1} = \frac{(D_9 - Me) - (Me - D_1)}{(D_9 - Me) + (Me - D_1)}$$

ahol D_1 az első, D_9 pedig a kilencedik decilist jelenti.

A negatív értékek jobb oldali asszimetriát jelentenek. A pozitív értékek esetén pedig bal oldali asszimetria van.

Az F mutató csak -1 és 1 között lehet.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A csúcosság azt jelenti, hogy az [eloszlás](#) görbéje mennyire csúcsosodik ki.

A csúcosság mérésére a következő mutató van forgalomban:

$$\alpha_4 = \frac{M_4(\bar{X})}{\sigma^4} - 3$$

Itt $M_4(\bar{X})$ az úgynevezett negyedik momentum, és így számolható ki:

$$M_4(\bar{X}) = \frac{\sum (\bar{X} - x_i)^4}{N}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mátrixok és vektorok

Egy $n \times k$ -as [mátrix](#) tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor a [mátrix](#) összes elemét meg kell szorozni a számmal.

$$\text{pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor a [mátrix](#) minden elemét osztani kell a számmal.

$$\text{pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A [mátrixok](#) összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) szorzata akkor létezik, ha a bal oldali [mátrix](#) oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali [mátrix](#) sorainak számával.

Ha az A [mátrix](#) $m \times n$ -es a B [mátrix](#) pedig $n \times k$ -s, akkor az eredmény [mátrix](#) $m \times k$ -s lesz.

Az eredmény [mátrix](#) i -edik sorának j -edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali [mátrix](#) i -edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali [mátrix](#) j -edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A [mátrix](#) összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kvadratikus [mátrix](#) négyzetes [mátrix](#) vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A diagonális [mátrix](#) olyan kvadratikus [mátrix](#), aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az egység mátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egység mátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

$$\text{pl.: } I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az inverz mátrix jele A^{-1} és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$$A \cdot A^{-1} = I \text{ (jobb inverz)}$$

$$A^{-1} \cdot A = I \text{ (bal inverz)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

$$\text{Pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

$$\text{Pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

$$\text{kommutatív: } \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

$$\text{asszociatív: } (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [skaláris szorzat](#) két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$$

Tulajdonságok:

$$\text{kommutatív: } \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$$

$$\text{nem asszociatív: } (\underline{a}^T \cdot \underline{b})^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot (\underline{b}^T \cdot \underline{c})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektor diadikus szorzata egy [mátrix](#). Lássuk milyen.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő

elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot megszorozunk jobbról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik oszlopát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot megszorozunk balról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik sorát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Függvények

Adott az $f: A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x -eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[n]{\text{ez itt}} \geq 0$ $\sqrt[n]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ tört nevező $\neq 0$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a, b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a, b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precízebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precízebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Belső függvénytranszformáció: $f(x + a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x) + a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x -re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x -re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Összetett függvény és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x -hez különböző y -okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönösen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határérték, függvények határértéke és folytonossága

Az $f(x)$ függvény folytonos az a -ban, ha értelmezve van az a -ban, létezik és véges a határértéke az a -ban, és ami a lényeg:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a -ban, ha létezik véges határértéke az a -ban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Megszüntethető szakadás:

Ha létezik véges [határérték](#) az a -ban, de ez nem egyezik meg a függvényértékkel, akkor megszüntethető szakadása van.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

Nem megszüntethető szakadás, ugrás:

Ha a bal és jobb oldali [határérték](#) két különböző szám az a -ban, akkor a szakadás nem megszüntethető és ugrásnak hívjuk.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{másik szám} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Nem megszüntethető, nem véges szakadás:

Ha a bal és jobb oldali [határérték](#) nem is véges az a -ban, akkor pláne nem tehető folytonossá a függvény.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nem megszüntethető oszcilláló szakadás:

Végül meglehetősen patológikus esetek is vannak, amikor még csak jobb vagy bal oldali [határérték](#) sem létezik.

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \nexists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{\sin |z|}{|z|} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{1 - \cos |z|}{|z|^2} = \frac{1}{2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Sorozatok határértéke

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{n^k} \rightarrow 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$n \rightarrow \infty \quad n^2 \rightarrow \infty \quad n^3 \rightarrow \infty \quad n^k \rightarrow \infty$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\sqrt{n} \rightarrow \infty \quad \sqrt[3]{n} \rightarrow \infty \quad \sqrt[4]{n} \rightarrow \infty \quad \sqrt[k]{n} \rightarrow \infty$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$q^n \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{ha } q > 1 \\ 0 & \text{ha } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{ha } q = 1 \\ \text{div} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \rightarrow e^\alpha$$

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\mathbb{Z}\mathbb{E}}\right)^{\mathbb{Z}\mathbb{E}} \rightarrow e^\alpha$$

$$\text{Ha } \mathbb{Z}\mathbb{E} \rightarrow \infty$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van egy olyan valós szám, ami a sorozat határértéke.

Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens.

Egy sorozat lehet azért is divergens, mert végtelenbe tart, és lehet azért is, mert az égvilágon nem tart sehova. A sehova nem tartó [sorozatok](#) mindig oszcilláló [sorozatok](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $a_n \rightarrow A$ és $c_n \rightarrow A$ és van olyan n_0 , hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$ akkor $b_n \rightarrow A$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \quad \sqrt[n]{n^k} \rightarrow 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A végtelenbe tartó [sorozatok](#) nagyságrendi sorrendje azt mondja meg, hogy melyik sorozat milyen ütemben tart a végtelenbe. Minél nagyobb nagyságrendű egy sorozat, annál gyorsabban tart a végtelenbe. A nagyságrendi rangsor:

$$\log_n \ll \sqrt[k]{n} \ll n^k \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az egyoldali rendőr-elv arról szól, hogyha egy sorozat végtelenbe tart, akkor elég alulról becsülni egy másik végtelenhez tartó sorozattal, és az egyoldali rendőr-elv szerint az eredeti sorozat is végtelenbe fog tartani. Amikor pedig az eredeti sorozat mínusz végtelenbe tart, akkor az egyoldali rendőr-elvet használva felülről becsülünk egy másik mínusz végtelenbe tartó sorozattal:

Ha $a_n \rightarrow \infty$ és van olyan n_0 , hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n$ akkor $b_n \rightarrow \infty$.

Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és van olyan n_0 , hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \geq b_n$ akkor $b_n \rightarrow -\infty$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha bármilyen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

Ennél precízebben az a_n sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén végtelen sok tagja van, hogy $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza legyen $\{A_i\}$

Ekkor a sorozat limesz inferiorja:

$$\liminf a_n = \inf \{A_i\}$$

És a limesz superior:

$$\limsup a_n = \sup \{A_i\}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciáhányados:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

f és g deriválható függvények, és C valós szám esetén a [deriválási szabályok](#):

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

A [deriválási szabályok](#) megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a törtek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorolni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvények közt fennálló azonosságok:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\cosh x$ függvény inverze:

$$\operatorname{arcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

A $\sinh x$ függvény inverze:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

A $\tanh x$ függvény inverze:

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciáhányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfelé megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfelé megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciáhányados:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok

Az elaszticitás képlete:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Egy függvény elaszticitása azt mondja meg, hogyha 1%-kal növeljük az x -et, akkor hány százalékkal változik a függvény értéke.

$E = 0$ Teljesen rugalmatlan

$|E| < 1$ Rugalmatlan

$|E| = 1$ Egységnyi rugalmasságú

$|E| > 1$ Rugalmas

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok

Ha a függvény deriváltja pozitív, akkor a függvény nő,

Ha a függvény deriváltja negatív, akkor a függvény csökken.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precízebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precízebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

A függvény hangulatáról a második derivált szolgáltat információt.

Ha a második derivált negatív, akkor a függvény konkáv, ha pozitív, akkor konvex

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ függvény stacionárius pontja x_0 , ha f differenciálható az x_0 környezetében és $f'(x_0) = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x -eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[n]{\text{ez itt}} \geq 0$ $\sqrt[n]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ tört nevező $\neq 0$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)