

## Mátrixok, vektorok, vektorterek

Egy  $n \times k$ -as [mátrix](#) tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek  $n$  darab sora és  $k$  darab oszlopa van.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor a [mátrix](#) összes elemét meg kell szorozni a számmal.

$$\text{pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor a [mátrix](#) minden elemét osztani kell a számmal.

$$\text{pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A [mátrixok](#) összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) szorzata akkor létezik, ha a bal oldali [mátrix](#) oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali [mátrix](#) sorainak számával.

Ha az A [mátrix](#) m x n-es a B [mátrix](#) pedig n x k-s, akkor az eredmény [mátrix](#) m x k-s lesz.

Az eredmény [mátrix](#) i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali [mátrix](#) i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali [mátrix](#) j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A [mátrix](#) összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A kvadratikus [mátrix](#) négyzetes [mátrix](#) vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlópa.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A diagonális [mátrix](#) olyan kvadratikus [mátrix](#), aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Az egység [mátrix](#) olyan [mátrix](#), ami azt tudja, hogy bármely  $A$  mátrixra  $A \cdot I = A$ .

Az egység [mátrixok](#) olyan diagonális [mátrixok](#), aminek minden főátló-eleme egy.

pl.:  $I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Az inverz [mátrix](#) jele  $A^{-1}$  és ez egy olyan [mátrix](#), ami azt tudja, hogy

$$A \cdot A^{-1} = I \text{ (jobb inverz)}$$

$$A^{-1} \cdot A = I \text{ (bal inverz)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A transzponált a [mátrix](#) sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele  $A^T$  vagy  $A^*$

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

pl.:  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

Pl.:  $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

$$\text{Pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

kommutatív:  $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

asszociatív:  $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A [skaláris szorzat](#) két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$$

Tulajdonságok:

kommutatív:  $\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$

nem asszociatív:  $(\underline{a}^T \cdot \underline{b})^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot (\underline{b}^T \cdot \underline{c})$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Két vektor diadikus szorzata egy [mátrix](#). Lássuk milyen.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha egy mátrixot beszorzunk az  $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő

elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha egy mátrixot beszorzunk az  $\underline{I}^T = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$  vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha egy mátrixot megszorunk jobbról egy  $\underline{e}_i$  egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik oszlopát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha egy mátrixot megszorunk balról egy  $\underline{e}_i$  egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik sorát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $P(x_0, y_0)$  ponton átmenő és  $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $P(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő és  $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$  normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Van a síkban két pont:  $P(x_1, y_1)$  és  $Q(x_2, y_2)$ .

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot:  $P(x_1, y_1, z_1)$  és  $Q(x_2, y_2, z_2)$ .

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Van itt két pont a síkban:  $P(x_1, y_1)$  és  $Q(x_2, y_2)$ .

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot:  $P(x_1, y_1, z_1)$  és  $Q(x_2, y_2, z_2)$ .

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $P(x_0, y_0)$  ponton átmenő és  $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $P(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő és  $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Van itt két vektor:  $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$  és  $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  [vektorok](#) vektoriális szorzata az  $\underline{a} \times \underline{b}$  vektor, ami merőleges az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  [vektorok](#) által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $V$  nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha a  $V$  halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden  $V$ -beli  $\underline{v}_1$  és  $\underline{v}_2$  vektorhoz hozzárendelünk egy  $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$  vektort, ami szintén eleme  $V$ -nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$   $V$ -beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$   $V$ -beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan  $\underline{0}$   $V$ -beli vektor, hogy bármely  $\underline{v}_1$   $V$ -beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely  $\underline{v}_1$   $V$  bel vektorra létezik olyan  $-\underline{v}_1$   $V$ -beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden  $V$ -beli  $\underline{v}_1$  vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy  $\lambda \cdot \underline{v}_1$  vektort, ami szintén  $V$ -beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely  $\underline{v}_1$   $V$ -beli vektorra és  $\lambda, \mu$  skalárra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$   $V$ -beli vektorra és  $\lambda$  skalárra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárookra: bármely  $\underline{v}_1$   $V$ -beli vektorra és  $\lambda, \mu$  skalárra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységszeres: bármely  $\underline{v}_1$   $V$ -beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$  [vektorok](#) lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden  $\lambda_i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$  [vektorok](#) lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan  $\lambda_i \neq 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy  $V$  vektortérben a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$  [vektorok](#) generátor-rendszert alkotnak, ha minden  $\underline{w}$  vektor a  $V$  vektortérben előáll  $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$  alakban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$  [vektorok](#) független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden  $\lambda_i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg  $R^*$ -ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek  $n$ -nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő független [vektorok](#) maximális száma.  $R^3$ -ban a rang például maximum három lehet.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $V$  vektortérnek  $W$  altere, ha  $W \subset V$  és  $W$  maga is vektortér a  $V$ -beli műveletekre.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azon [vektorok](#) lineáris kombinációjaként.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---