



MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

GAZDASÁG-MATEMATIKA MATE tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 10. 01.

Tartalomjegyzék

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík.....	2
Kétváltozós függvények.....	4
Mátrixok, vektorok, vektorterek.....	7
Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze.....	16
Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések.....	19
Határozatlan integrálás, primitív függvény.....	29
Határozott integrálás.....	33
Kombinatorika.....	34
Valszám alapok, klasszikus valszám.....	36
Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel.....	37
Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény.....	38
A binomiális eloszlás és a hipergeometriai eloszlás.....	41
Várható érték és szórás.....	43
Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások.....	44
Markov és Csebisev egyenlőtlenségek.....	47

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintő sík

Az $f(x, y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort gradienseknek nevezzük.

A gradienst szokás deriváltvektornak is nevezni, és az $f(x, y)$ kétváltozós függvény gradiensvektorát úgy jelöljük, hogy $\text{grad}(f(x, y))$.

A gradiensvektor elnevezés onnan ered, hogy éppen a gradiens vektor irányában emelkedik mindig a legjobban a kétváltozós függvény grafikonja, ami egy felület.

Az $f(x, y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az (x_0, y_0) pontban:

$$\text{grad}(f(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

A gradiens segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort deriváltvektornak nevezzük.

A deriváltvektort szokás gradiensek is nevezni, és az $f(x, y)$ kétváltozós függvény deriváltvektorát úgy jelöljük, hogy $\nabla f(x, y)$.

Az $f(x, y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az (x_0, y_0) pontban:

$$\text{grad}(f(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

A deriváltvektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x, y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0, y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{e}} = \text{grad}(f(x_0, y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogyha a kétváltozós függvény grafikonjának egy pontjában áll egy hagymászó, és elindul egy $\underline{v}$ irányban, akkor ebben az irányban milyen meredeken emelkedik a felület.

Ahogy a $\underline{v}$ irányt változtatjuk, az [iránymenti derivált](#) értéke is változik.

És van egy olyan $\underline{v}$ irány, ahol az [iránymenti derivált](#) maximális. Ezt az irányt nevezzük gradiens iránynak és ez mindig megegyezik a deriváltvektor irányával.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A függvényeket két nagy típusba sorolhatjuk, az explicit és az implicit függvények csoportjába. Az explicit függvények azok, amelyek egy konkrét képlettel vannak megadva, míg az implicit függvények valamilyen egyenlet formájában adhatók meg.

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $F(x, y) = 0$ egy implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i , mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x -essel, akkor marad

Az $f(x, y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x, y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y -ossal, akkor marad

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x, y) \quad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x, y)$$

Második lépés:

$$f'_x(x, y) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$f'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét [parciális derivált](#) nulla, az $f(x, y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \dots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű deriváltakból képzett [mátrix](#), amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f''} = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintő sík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [iránymenti derivált](#) azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x, y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0, y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta \underline{e}} = \text{grad}(f(x_0, y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A függvényeket két nagy típusba sorolhatjuk, az explicit és az implicit függvények csoportjába. Az explicit függvények azok, amelyek egy konkrét képlettel vannak megadva, míg az implicit függvények valamilyen egyenlet formájában adhatók meg.

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha $F(x, y) = 0$ egy implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i , mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Mátrixok, vektorok, vektorterek

Egy $n \times k$ -as [mátrix](#) tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor a [mátrix](#) összes elemét meg kell szorozni a számmal.

$$\text{pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor a [mátrix](#) minden elemét osztani kell a számmal.

$$\text{pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A [mátrixok](#) összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két [mátrix](#) szorzata akkor létezik, ha a bal oldali [mátrix](#) oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali [mátrix](#) sorainak számával.

Ha az A [mátrix](#) m x n-es a B [mátrix](#) pedig n x k-s, akkor az eredmény [mátrix](#) m x k-s lesz.

Az eredmény [mátrix](#) i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali [mátrix](#) i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali [mátrix](#) j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A [mátrix](#) összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A$$

És asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kvadratikus [mátrix](#) négyzetes [mátrix](#) vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlópa.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A diagonális [mátrix](#) olyan kvadratikus [mátrix](#), aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

$$\text{pl.: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az egység [mátrix](#) olyan [mátrix](#), ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egység [mátrixok](#) olyan diagonális [mátrixok](#), aminek minden főátló-eleme egy.

$$\text{pl.: } I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az inverz [mátrix](#) jele A^{-1} és ez egy olyan [mátrix](#), ami azt tudja, hogy

$$A \cdot A^{-1} = I \text{ (jobb inverz)}$$

$$A^{-1} \cdot A = I \text{ (bal inverz)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A transzponált a [mátrix](#) sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

$$\text{pl.: } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

$$\text{Pl.: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

$$\text{Pl.: } \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

$$\text{kommutatív: } \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

$$\text{asszociatív: } (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

$$\text{Pl.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [skaláris szorzat](#) két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 24$$

Tulajdonságok:

$$\text{kommutatív: } \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$$

$$\text{nem asszociatív: } (\underline{a}^T \cdot \underline{b})^T \cdot \underline{c} \neq \underline{a}^T \cdot (\underline{b}^T \cdot \underline{c})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Két vektor diadikus szorzata egy [mátrix](#). Lássuk milyen.

$$\text{Pl.: } \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő

elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot megszorozunk jobbról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik oszlopát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy mátrixot megszorozunk balról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a [mátrix](#) i-edik sorát.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ [vektorok](#) vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ [vektorok](#) által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha a V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden V -beli $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorhoz hozzárendelünk egy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektort, ami szintén eleme V -nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V -beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ V -beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan $\underline{0}$ V -beli vektor, hogy bármely $\underline{v}_1$ V -beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely $\underline{v}_1$ V bel vektorra létezik olyan $-\underline{v}_1$ V -beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden V -beli $\underline{v}_1$ vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \underline{v}_1$ vektort, ami szintén V -beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely $\underline{v}_1$ V -beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V -beli vektorra és λ skalárra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárookra: bármely $\underline{v}_1$ V -beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységszeres: bármely $\underline{v}_1$ V -beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan $\lambda_i \neq 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy V vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) generátor-rendszert alkotnak, ha minden $\underline{w}$ vektor a V vektortérben előáll $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$ alakban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ [vektorok](#) független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg R^* -ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek n -nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő független [vektorok](#) maximális száma. R^3 -ban a rang például maximum három lehet.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A V vektortérnek W altere, ha $W \subset V$ és W maga is vektortér a V -beli műveletekre.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azon [vektorok](#) lineáris kombinációjaként.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x -ek együtthatóiból álló [mátrix](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlós [mátrix](#) alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számszorását

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x -es oszlopból és e -s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x -es oszlopból és e -s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak e -s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A bázistranszformáció során fent maradt x -ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány x_i főt marad.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett [mátrix](#) pedig az A [mátrix](#) inverze lesz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Négyzetes [mátrixok](#) inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x -et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések

Ha az A egy $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$\det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{ip(i)}$$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy 2x2-es [mátrix](#) determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A 3x3-as [mátrixok](#) determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az A egy $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A [mátrix](#) determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az A [mátrix](#) szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz [mátrix](#)
- $\text{RANG} < n$
- Az A [mátrix](#) oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A [mátrix](#) reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz [mátrix](#)
- $\text{RANG} = n$
- Az A [mátrix](#) oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A [mátrix](#) k -edik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) sajátértéke egy olyan λ valós szám, amelyhez van valami $\underline{v}$ nem nullvektor, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátérték lényege, hogy vannak olyan [mátrixok](#), és olyan [vektorok](#), hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. Az egység mátrixpéldául ilyen: ha az egység mátrixszal megszorozunk egy tetszőleges vektort, akkor ugyanazt a vektort kapjuk. Ilyenkor minden vektor sajátvektor és a sajátérték 1, mert minden vektorból az 1-szerese lesz.

A saját[vektorok](#) és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le. A síkbeli tükrözés az x tengelyre például egy geometriai transzformáció, aminek a mátrixa két sajátértékkel rendelkezik. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Az y tengelyen lévő [vektorok](#) viszont az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátértékei. Az 1 és a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) sajátvektora egy olyan $\underline{v}$ nem nullvektor, amelyhez van valami λ valós szám, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátvektor lényege, hogy vannak olyan [mátrixok](#), és olyan [vektorok](#), hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. A saját[vektorok](#) és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le.

Vegyük például a síkbeli tükrözést az x tengelyre. Ez egy geometriai transzformáció. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Vagyis ezek a [vektorok](#) egytől egyig saját[vektorok](#), mert teljesítik azt amit egy sajátvektornak tudnia kell: ha megszorozzuk a mátrixot a vektorral, akkor az eredeti vektor számszorosát kapjuk. Itt most éppen az eredeti vektor 1-szeresét kapjuk. Az y tengelyen lévő [vektorok](#) szintén saját[vektorok](#), mert az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. Vagyis ezek a [vektorok](#) saját maguk -1-szeresei lesznek. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátvektorai: az x tengely és az y tengely vektorai. Az x tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték az 1, míg az y tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A karakterisztikus egyenlet a sajátértékek kiszámolásához szükséges egyenlet:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet segít nekünk kiszámolni egy [mátrix](#) sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Az egyenletet karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy $n \times n$ -es [mátrix](#) karakterisztikus egyenlete n -edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5×5 -ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda \cdot I)$$

A karakterisztikus polinom segít nekünk kiszámolni egy [mátrix](#) sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Vagyis a sajátértékek mindig a karakterisztikus polinom gyökei. Előfordul, hogy egy sajátérték többszörös gyök, és az is megeshet, hogy komplex gyökei vannak a karakterisztikus polinomnak.

Azt az egyenletet, amikor a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy $n \times n$ -es [mátrix](#) karakterisztikus egyenlete n -edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5×5 -ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az A [mátrix](#) egy $n \times n$ -es diagonalizálható [mátrix](#), akkor a sajátfelbontása:

$$A = X \cdot \text{diag}(A) \cdot X^{-1}$$

Itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$ vagyis egyszerűen úgy keletkezi, hogy a sajátvektorokat fogjuk, és leírjuk egymás mellé és

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A spektrálfelbontás segítségével könnyebben hatványozhatunk:

$$A^n = X \cdot (\text{diag}(A))^n \cdot X^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) sarok főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarok [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarok [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A nxn-es [mátrix](#) pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A nxn-es [mátrix](#) negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + - +$ de mínusszal indul.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A nxn-es [mátrix](#) pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A nxn-es [mátrix](#) negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A nxn-es [mátrix](#) indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha A $n \times n$ -es szimmetrikus [mátrix](#) és $\underline{x}$ egy vektor R^n -ben, akkor a

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezésnél V_2 -nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1 -beli [vektorok](#) képe is nullvektor lesz. Ezen [vektorok](#) halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a [mátrixok](#) pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1 -ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

$$\varphi^{-1} \text{ mátrixa } (\varphi)_b^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A φ lineáris leképezésnek a $\underline{b}_1 \ \underline{b}_2 \ \dots \ \underline{b}_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1) \ \varphi(\underline{b}_2) \ \varphi(\underline{b}_3) \ \dots \ \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is V_1 -ben, a leképezés mátrixa mindig egy $n \times n$ -es mátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak V_1 -ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret $Hom(V_1, V_2)$ -nek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha A és B olyan mátrixok, hogy létezik egy C mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$ -et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \ln |ax+b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnós az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \quad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \quad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{cx+d} dx &= \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d} dx = \\ &= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + E \ln |cx+d| \frac{1}{c} \end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}} dx \quad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x)) dx \quad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \quad f = \sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \quad f = \sinh^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \quad f = \cosh^2 u$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{ax+b} dx &= A \int \frac{1}{ax+b} dx = A \ln |ax+b| \cdot \frac{1}{a} \\ \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= A \int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c} dx \right) = \\ &= \frac{A}{2a} \left(\ln |ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}} \right) \cdot \sqrt{D} \right)\end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéssel integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéssel integrálás egyik legfurcsább esete az $u = \tan \frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozott integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor a [Newton Leibniz formula](#) szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f[a, b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ $m_i = \inf \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ $M_i = \sup \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha integráljuk a pozitív számegegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} & \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Kombinatorika

Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli permutációján az n különböző elem egy sorba rendezését értjük.

n darab különböző elem permutációinak száma:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

n faktoriálisán az n -nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész számok szorzatát értjük.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

pl.:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$1! = 1$$

Továbbá definíció szerint $0! = 1$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.

n darab különböző elemből kiválasztott k darab elem variációinak száma:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha n különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

n darab különböző elem közül kiválasztott k darab elem kombinációinak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha n elem között van $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését ismétléses permutációnak nevezzük.

n elem közötti $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező ismétléses permutációinak száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k -ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem k -ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha kör alakban helyezünk el n különböző elemet és azok sorrendjét vizsgáljuk, akkor ciklikus permutációról beszélünk.

n darab különböző elem ciklikus permutációinak száma $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Valszám alapok, klasszikus valszám

Eseményeknek nevezzük a valószínűségi kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteket.

Megkülönböztetünk elemi eseményeket, ilyen például, hogy egy dobókockával 1-est dobunk. Vannak azonban olyan események is amik több elemi eseményből épülnek fel, ilyen például az, hogy párosat dobunk.

Az eseményeket az ABC nagybetűivel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az [esemény](#) valószínűségét úgy kaphatjuk meg, hogy megszámloljuk hány elemi eseményből áll és ezt elosztjuk az összes [elemi esemény](#) számával.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A és B eseményt egymástól függetlennek nevezzük, ha teljesül rájuk, hogy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A és B eseményt kizárónak nevezünk, ha

$$A \cap B = \emptyset$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A [esemény valószínűsége](#), ha tudjuk, hogy a B [esemény](#) biztosan bekövetkezik:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges [esemény](#), akkor

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_n)P(B_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Bayes tételt akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett (B_k) [esemény](#) valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett (A) tükrében.

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges [esemény](#), akkor bármely B_k eseményre

$$P(B_k | A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Folytonosnak nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik folytonos mennyiségeket mérnek, ilyen például az idő, a távolság. Ebben az esetben az [eloszlás](#) függvény is mindig folytonos függvény lesz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Diszkrétnek nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik megszámlálhatóan sok értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy vagy véges sokat, vagy végtelent, de úgy, hogy fel tudjuk sorolni az értékeit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az X [valószínűségi változó](#) eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(X < x)$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) diszkrét és értékei $X = a, X = b, X = c$ meg ilyenek, akkor az [eloszlásfüggvény](#) mindig egy lépcsőzetes függvény, ami minden számnál pontosan akkorát ugrik, mint az adott szám valószínűsége, amíg el nem érjük az 1-et.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ P(X = a) & \text{ha } a < x \leq b \\ P(X = a) + P(X = b) & \text{ha } b < x \leq c \\ \dots \\ 1 \end{cases}$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) folytonos, akkor az a és b számok között bármilyen valós értéket fölvehet. Ilyenkor az [eloszlásfüggvény](#) is folytonos, ami a -ig nullát vesz föl, a és b közt növekszik és b után végig egyet vesz föl. Vagyis ahol az X [valószínűségi változó](#) működik, ott a függvény életre kel, előtte és utána pedig hibernált állapotban van.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [sűrűségfüggvény](#) úgy működik, hogy a valószínűségeket a görbe alatti területek adják meg. Az [eloszlásfüggvény](#) jele $F(x)$ volt, a [sűrűségfüggvény](#) jele $f(x)$. Az $a < X < b$ valószínűség éppen a görbe alatti terület a -tól b -ig.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Ha az $X < a$ valószínűséget szeretnénk kiszámolni:

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Ha a $b < X$ valószínűséget:

$$P(b < X) = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

Ha ezt a három területet összeadjuk, akkor éppen a teljes görbe alatti területet kapjuk, ami a 100%-ot jelenti, így hát ez a terület éppen 1.

A [sűrűségfüggvény](#) tulajdonságai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

nem negatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$1. \lim_{-\infty} F(x) = 0$$

$$2. \lim_{\infty} F(x) = 1$$

3. monoton nő

4. balról folytonos

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

2. nem negatív

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(b < X) = 1 - F(b) = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az X [valószínűségi változó](#) $F(x)$ eloszlásfüggvényéből úgy kapjuk meg az $f(x)$ sűrűségfüggvényét, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt deriváljuk, azaz:

$$F'(x) = f(x)$$

Ha az X [valószínűségi változó](#) $f(x)$ sűrűségi függvényét ismerjük, és meg akarjuk adni az $F(x)$ eloszlásfüggvényét, akkor azt pedig így tehetjük:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A binomiális eloszlás és a hipergeometriai eloszlás

Ezt a képletet hívjuk [binomiális](#) eloszlásnak:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Visszatevéses mintavételről beszélünk, ha egy p valószínűségű elem többszöri kihúzásának esélyét vizsgáljuk úgy, hogy ha kihúzzunk egy ilyen elemet, akkor ezt követően azt visszarakjuk.

Például ha azt vizsgáljuk, hogy egy kosárban van 8 piros és 5 kék golyó, és mennyi a valószínűsége, hogy háromszor húzva két piros és egy kék golyót húznánk úgy, hogy a kihúzott golyókat mindig visszatesszük, akkor az egy visszatevéses [mintavétel](#).

A visszatevéses mintavételhez kapcsolódó [eloszlás](#) a [binomiális eloszlás](#).

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A visszatevés nélküli [mintavétel](#) tipikus példája, hogy van egy doboz, benne N darab elem. Közülük K darab valamilyen tulajdonságú, az egyszerűség kedvéért hívjuk selejtesnek. Mondjuk sárga vagy szép vagy ronda. Kihúzzunk n darab elemet, és ez a képlet meg fogja nekünk mondani, hogy mekkora az esélye, hogy közülük k darab a vizsgált tulajdonságú:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

De vannak olyan esetek, amikor a visszatevés nélküli mintavételnél másik képletet kell használnunk. Ezt a másik képletet [binomiális](#) eloszlásnak nevezzük, és olyankor használjuk, amikor a selejtek száma helyett csak a selejtek arányát ismerjük.

Ez a [binomiális eloszlás](#) képlete:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

És, hogy mi alapján döntjük el, hogy a két képlet közül melyiket kell használni? A dolog nagyon logikus, nézd meg a kapcsolódó epizódot és minden világos lesz.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [hipergeometriai eloszlás](#) a visszatevés nélküli mintavételhez kapcsolódó [eloszlás](#), képlete pedig:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Várható érték és szórás

A [várható érték](#) jele $E(X)$.

Diszkrét esetben úgy kell kiszámolni, hogy

$$E(X) = \sum X_i P(X_i)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A szórás azt mutatja meg, hogy a [várható érték](#) körül milyen nagy ingadozásra számíthatunk.

Jele: $D(X)$

Kiszámításának módja diszkrét esetben:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Folytonos [valószínűségi változók](#) esetén a [várható érték](#):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Folytonos [valószínűségi változó](#) esetén a szórást ugyanúgy kell számolni, mint diszkrét [valószínűségi változó](#) esetén:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások

A [hipergeometriai eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#).

Ismert, hogy mennyi az összes elem és az összes selejt, vagyis N , K és n .

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A [hipergeometriai eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = n \frac{K}{N}$$

A [hipergeometriai eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [binomiális eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#).

Csak valami %-os izé ismert, a [várható érték](#), az átlag, az arány, a valószínűség, továbbá X korlátos diszkrét [valószínűségi változó](#).

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

A [binomiális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = np$$

A [binomiális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [Poisson eloszlás](#) egy diszkrét [eloszlás](#), ahol előre ismert a [várható érték](#), és a [valószínűségi változó](#) nem korlátos, vagyis tetszőlegesen bármilyen nagy érték is lehet.

Például valamilyen anyagban a hibák száma, vagy egy adott idő alatt bekövetkező események száma. A [Poisson](#) eloszlásos feladatokban általában valamilyen százalék vagy arány vagy [várható érték](#) vagy átlag vagy valószínűség van megadva. Mondjuk egy könyvben az oldalak 80%-ában nincs hiba, vagy az 20 méter hosszú ruhaszövetek harmadában nincs hiba, vagy egy üzletben óránként várhatóan 13 vevő érkezik, vagy egy bankban percenként átlag 24 tranzakció történik, vagy 0,2 a valószínűsége, hogy 10 perc alatt nem érkezik segélyhívás. Ezek mind Poisson eloszlások, ahol az X nem korlátos diszkrét [valószínűségi változó](#).

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

A [Poisson eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \lambda$$

A [Poisson eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sqrt{\lambda}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [exponenciális eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Az [exponenciális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Az [exponenciális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az [egyenletes eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq A \\ \frac{x-A}{B-A} & \text{ha } A < x \leq B \\ 1 & \text{ha } B < x \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & \text{ha } A < x \leq B \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Az [egyenletes eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \frac{A+B}{2}$$

Az [egyenletes eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \frac{B-A}{\sqrt{12}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [normális eloszlás](#) egy folytonos [eloszlás](#).

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

A [normális eloszlás](#) várható értéke:

$$E(X) = \mu$$

A [normális eloszlás](#) szórása:

$$D(X) = \sigma$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Markov és Csebisev egyenlőtlenségek

A Markov-egyenlőtlenség egy nagyon egyszerű dolgot állít. Az, hogy az X [valószínűségi változó](#) sokkal nagyobb legyen a várható értéknél nem túl valószínű:

$$P(X \geq t \cdot E(X)) \leq \frac{1}{t}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [Csebisev egyenlőtlenség](#) arról szól, hogy a várható értéktől való eltérés nem lehet túl nagy.

Ha ez az eltérés nagyobb, mint a szórás t -szerese, akkor ennek a valószínűsége kicsi:

$$P(|X - E(X)| \geq t \cdot D(X)) \leq \frac{1}{t^2}$$

Ha az eltérés kisebb, mint a szórás t -szerese, akkor ennek valószínűsége nagy:

$$P(|X - E(X)| < t \cdot D(X)) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy [esemény](#) bekövetkezésének elméleti valószínűsége p , akkor minél többször végezzük el a kísérletet, a relatív gyakoriság és az elméleti valószínűség eltérése annál kisebb lesz.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)