MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

KÖZÉPISKOLAI MATEK (TELJES) tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 02. 11.

Tartalomjegyzék

Algebra, betűs kifejezések használata..... **2**

Nevezetes azonosságok, binomiális tétel..... **5**

Hatványozás, hatványazonosságok, normálalak..... **6**

Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés..... **8**

Halmazok..... **9**

Gráfok..... **11**

Bizonyítási módszerek, matematikai logika..... **12**

Oszthatóság, számelmélet, számrendszerek..... **14**

Egyenes arányosság, fordított arányosság..... **17**

Elsőfokú egyenletek..... **18**

Másodfokú egyenletek..... **19**

Egyenlőtlenségek..... **20**

Egyenletrendszerek..... **21**

Szöveges feladatok..... **22**

Függvények..... **23**

Elsőfokú függvények..... **25**

Függvénytranszformációk, függvények ábrázolása..... **26**

Pontok, egyenesek, síkok, szögek, a geometria alapjai..... **27**

Síkidomok, háromszögek, négyszögek, sokszögek..... **31**

A kör..... **42**

A Pitagorasz-tétel..... **54**

Tükrözések, forgatások, egybevágósági transzformációk..... **55**

Mértékegységek és mértékegység-átváltás..... **57**

Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek..... **58**

Gyökös azonosságok és gyökös egyenletek..... **59**

Középpontos hasonlóság..... **61**

Trigonometria a síkgeometriában..... **63**

Kombinatorika..... **64**

Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek..... **66**

Logaritmus, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek..... **67**

Százalékszámítás..... **68**

Kamatos kamat és pénzügyi számítások..... **70**

Számtani és mértani sorozatok..... **71**

Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek..... **72**

Szinusztétel és koszinusztétel..... **74**

Feladatok függvényekkel..... **75**

Vektorok..... **76**

Koordinátageometria..... **77**

Térgeometria..... **78**

Statisztika..... **84**

Valószínűségszámítás..... **86**

Geometriai valószínűség..... **89**

A várható érték..... **90**

A parabola (emelt szint)..... **91**

A teljes indukció (emelt szint)..... **92**

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése (emelt szint)..... **93**

Sorozatok határértéke (emelt szint)..... **94**

Sorozatok monotonitása és korlátossága (emelt szint)..... **95**

Függvények határértéke és folytonossága (emelt szint)..... **96**

Deriválás (emelt szint)..... **97**

Függvényvizsgálat, szélsőérték feladatok (emelt szint)..... **99**

Függvények érintője (emelt szint)..... **100**

Az integrálás (emelt szint)..... **101**

Algebra, betűs kifejezések használata

Ha több művelet szerepel egymás után, akkor ezeket a műveleti sorrend szerint kell elvégeznünk.

A műveleti sorrendben az első mindig a zárójel, vagyis a zárójelben szereplő műveleteket kell elsőként elvégezni.
A második a szorzás és az osztás. Ha több szorzás és osztás van, akkor balról jobbra kell őket elvégezni.
Végül az utolsó szint az összeadás és kivonás, és itt is ha több is van belőlük, akkor balról jobbra kell elvégezni.

A hatványozás még egy kicsit bezavarhat a dologba, így érdemes megnézni külön a hatványozásról és a hatványazonosságokról szóló epizódokat is.

Most pedig nézzünk egy példát a műveleti sorrendre:

Pl.: $3 \cdot (5-3) + 2:2 = 3 \cdot 2 + 2:2 = 6 + 1 = 7$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az együttható a betűs kifejezés előtt álló szám.

Pl.: $3x$ kifejezés együtthatója 3.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az algebrai kifejezésekben a betűket változóknak nevezzük.

Pl.: $2x + y$ algebrai kifejezésben x és y változók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A betűs kifejezéseket nevezzük algebrai kifejezéseknek.

Pl.: $2x + y$ egy algebrai kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az önmagában álló számokat nevezzük konstansnak.

Pl. $2x + y + 5$ kifejezésben az 5 konstans.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egynemű kifejezések azok a betűs kifejezések, amik csak az együtthatójukban különböznek.

pl.: $5x$ és $3x$ egynemű kifejezések, mert csak az együtthatóik (5 és 3) különböznek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egynemű kifejezések mindig összevonhatóak. Az összevont kifejezés együtthatója az eredeti együtthatók összege lesz.

Pl.: $3x + 5x + 2x = (3 + 5 + 2)x = 10x$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Zárójel felbontásakor minden tagot minden taggal szorozni kell.

Pl.: $5 \cdot (4x + 6) = 5 \cdot 4x + 5 \cdot 6 = 20x + 30$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kiemelés a zárójelfelbontás megfordítása.

A dolog úgy indul, hogy találnunk kell egy közös részt, amit kiemelhetünk.

A kiemelés során egy többtagú kifejezést egy vagy többtagú kifejezések szorzatává alakítjuk át úgy, hogy minden tagból kiemeljük a közös részeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0}$ $\sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ $\text{tört nevező} \neq 0$

pl.

$\frac{2}{x-3}$ értelmezési tartománya $x \in R \setminus \{3\}$, mert tört van benne és a tört nevezője nem lehet nulla ($x \neq 3$)

$\sqrt{2x+5}$ értelmezési tartománya $x \in \left[-\frac{5}{2}, \infty\right[$, mert páros gyök alatt van (második) és így a gyök alatti kifejezés ≥ 0

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A törtek egyszerűsítése azt jelenti, hogy a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nem nulla számmal osztjuk. Ha nincs olyan szám, amivel mind a számláló és a nevező is osztható lenne, akkor már nem egyszerűsíthető tovább a tört.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Algebrai törteknek nevezzük azokat a törteket, melyek nevezőjében betűs kifejezés van.

Tehát ha csak a tört számlálójában van betűs kifejezés (pl.x), de a nevezőjében nem, akkor az még nem algebrai tört.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Zárójel felbontásakor minden tagot minden taggal szorozni kell.

Ha a szorzás mindkét tényezője többtagú, akkor az első tényező első tagjával szorozzuk végig a másik tényező tagjait, majd pedig folytatjuk az első tényező második tagjával.

Pl.: $(a+b)\cdot(c-5)=a\cdot c-5\cdot a+b\cdot c-5\cdot b$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítési érték azt jelenti, hogy a betűs kifejezés helyére írjuk be a behelyettesítendő értéket.

Pl.: $2x+5$ kifejezés helyettesítési értéke $x=3$-ban: $2\cdot 3+5=6+5=11$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nevezetes azonosságok, binomiális tétel

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\overset{\text{páros}}{\sqrt{\text{ez itt}}} \geq 0 \qquad \overset{\text{páratlan}}{\sqrt{\text{ez itt bármi}}} \qquad \log(\text{ez itt} > 0) \qquad \text{tört nevező} \neq 0$

pl.

$\frac{2}{x-3}$ értelmezési tartománya $x \in R \setminus \{3\}$, mert tört van benne és a tört nevezője nem lehet nulla ($x \neq 3$)

$\sqrt{2x+5}$ értelmezési tartománya $x \in \left[-\frac{5}{2}, \infty\right[$, mert páros gyök alatt van (második) és így a gyök alatti kifejezés ≥ 0

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Binomiális tétel:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatványozás, hatványazonosságok, normálalak

A hatványozás a szám önmagával vett szorzatait rövidíti.

Pl.: $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Itt a 6-ot a hatvány alapjának nevezzük, a 3-at kitevőnek, az eredményt pedig a hatvány értékének.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha azonos alapú hatványokat szorzunk, akkor a kitevők összeadódnak.

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha azonos alapú hatványokat osztunk, akkor a kitevők kivonódnak.

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatvány hatványa a kitevők szorzata.

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden nem nulla szám nulladik hatványa 1.

$a^0 = 1$, ha $a \neq 0$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy nem nulla szám negatív egész kitevőjű hatványát úgy számolhatjuk ki, hogy a reciprokát a kitevő ellentettjére emeljük.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szorzat mindkét tényezője ugyanarra a hatványra van emelve, akkor a hatványt leírhatjuk csak egyszer zárójellel.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ez az azonosság visszafele irányba hasznosabb, ha egy zárójeles szorzat hatványozva van, akkor azt szét lehet szedni és mindkét tényezőt hatványozni kell.

Pl.: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy törtnek a számlálója és nevezője is ugyanarra a hatványra van emelve, akkor a hatványt leírhatjuk csak egyszer zárójellel.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ez az azonosság visszafele irányba hasznosabb, ha egy zárójeles tört hatványozva van, akkor azt szét lehet szedni és a számlálót és nevezőt is hatványozni kell.

Pl.: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A túl nagy vagy éppen túl pici számok leírására találták ki a normálalakot.

A normálalak mindig egy szorzat, az első tényezője egy abszolútértékben 1-nél nagyobb vagy egyenlő, 10-nél kisebb szám. A másik tényezője pedig egy 10 hatvány.

Pl.: $35000 = 3{,}5 \cdot 10^4$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés

Egy a nem negatív szám négyzetgyöke az a nem negatív szám, aminek a négyzete a.

$$a \geq 0 \qquad \sqrt{a} \geq 0 \qquad \sqrt{a}^2 = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0,\ b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy a szám köbgyöke az a szám, aminek a köbe a.

$$a \in R \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \in R,\ b \in R$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad a \in R,\ b \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökvonás másképpp viselkedik páros, illetve páratlan gyökkitevő esetén, így kétféle definíciónk lesz.

Egy a nem negatív szám $n = 2k$-adik gyöke az a nem negatív szám, amire:

$$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$$

Egy tetszőleges a szám $n = 2k + 1$-edik gyöke az a szám, amire:

$$(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Halmazok

Vannak az A és B halmazok.

Az A és B halmazok uniója: Azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.

Jele: $A \cup B$

Az A és B halmazok metszete: Azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jele: $A \cap B$

Az A és B halmazok különbsége: Azon elemek halmaza, amelyek az A halmazba benne vannak, de a B halmazba nem.

Jele: $A \setminus B$

Az A halmaz komplementere a H alaphalmazon nézve: Az alaphalmaz azon elemeinek halmza, amelyek nincsenek benne az A-ban.

Jele: $\overline{A}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logikai szita formula két halmazra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A logikai szita formula három halmazra:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az első De Morgan azonosság azt mondja, hogy a metszet komplementere pont megegyezik a komplementrek uniójával:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A második De Morgan azonosság pedig azt mondja, hogy az unió komplementere éppen megegyezik a komplementerek metszetével:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát hatványhalmaznak nevezzük.

Pl.: az $A = \{x, y, z\}$ halmaz hatványhalmaza:
$P(A) = \{\emptyset. \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B halmazok Descartes-szorzata úgy működik, hogy elkészítjük az összes lehetséges rendezett párt, aminek az első elemét A-ból, a második elemét pedig B-ből vesszük, és ezeket a rendezett párokat betesszük egy halmazba, amit az A és B halmazok Descartes-szorzatának hívunk.

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f halmazt függvénynek nevezzük, ha minden eleme rendezett pár, és ha $\langle x_1, y_1 \rangle \in f$ és $\langle x_1, y_2 \rangle \in f$ akkor szükségképpen $y_1 = y_2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfok

A gráf csúcsokból és azokat összekötő élekből áll.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf összefüggő, ha bármelyik csúcsából el lehet jutni bármelyik másik csúcsába élek mentén.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gráf egy csúcsának fokszáma a gráf e csúcsában összefutó élek száma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráfban körnek nevezünk egy olyan utat, amely csupa különböző csúcsokon és éleken haladva visszavezet a kiinduló csúcsába.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy gráfban nincs kör, de maga a gráf összefüggő, akkor fának nevezzük.

Egy n csúcsú fának mindig $n-1$ darab éle van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a gráfokat, ahol minden csúcs mindegyikkel össze van kötve, teljes gráfnak hívjuk.

Az n csúcsú teljes gráf éleinek a száma:

$\frac{n(n-1)}{2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf egyszerű, ha nincs benne sem többszörös él, sem hurokél.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf Euler-köre olyan zárt élsorozat, amely a gráf összes élét pontosan egyszer tartalmazza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bizonyítási módszerek, matematikai logika

Az univerzális kvantor egy jelölése a "minden" kifejezésnek.

Jele: $\forall$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egzisztenciális kvantor egy jelölése a "létezik" vagy "van olyan" kifejezésnek.

Jele: $\exists$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás negációja (vagy tagadása) egy egyváltozós művelet. Egy A kijelentés negációja az a kijelentés, amely akkor igaz, ha A hamis és akkor hamis, ha A igaz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthetjük, hogy az igaz vagy hamis.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \wedge B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \vee B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A "ha A, akkor B" kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet nevezzük implikációnak. Az implikáció akkor hamis, ha A igaz és B hamis, minden más esetben igaz.

Jele: $A \Rightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az ekvivalencia egy olyan logikai művelet, amikor $A \Rightarrow B$ és $A \Leftarrow B$. Az ekvivalencia akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, különben hamis.

Jele: $A \Leftrightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) = A \Leftrightarrow \neg B$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Oszthatóság, számelmélet, számrendszerek

Az a egész számnak a b egész szám osztója, ha létezik olyan q egész szám, hogy $a = b \cdot q$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyenek a és b természetes számok. Ekkor felírhatók

$$a = q \cdot b + r \qquad 0 < r < b$$

Ahol q és r is természetes számok és q az osztás hányadosa, r pedig a maradék.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy szám akkor osztható 2-vel, ha páros, azaz 0, 2, 4, 6, vagy 8-ra végződik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy szám akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyéből alkottot szám osztható 4-gyel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy szám akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

6-tal azok a számok oszthatók, amik 2-vel és 3-mal is oszthatók.

Ezek éppen a 3-mal osztható páros számok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy szám akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

10-zel azok a számok oszthatók, amik 0-ra végződnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

11-gyel akkor osztható egy szám, ha hátulról kezdve $+ - + - \ldots$ előjelekkel összeadjuk a számjegyeket, akkor az így kapott szám osztható 11-gyel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a és b szám legnagyobb közös osztója az a d pozitív szám, amire $d \mid a$ és $d \mid b$, és e közös osztók közül ez a legnagyobb.

Jelölés: $d = (a, b)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

a és b relatív prímek, ha $(a, b) = 1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a \mid c$ és $b \mid c$ és $(a, b) = 1$ akkor $ab \mid c$

Ha $c \mid ab$ és $(a, c) = 1$ akkor $c \mid b$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat az 1-től különböző pozitív egész számokat, amelyeknek az 1-en és önmagukon kívül nincsen más pozitív egész osztója, prímeknek nevezzük.

Szemléletesen a prímek az egész számok építőkockái. Vagyis a prímek segítségével tudjuk felépíteni az egész számokat. A 60 például így épül föl, hogy:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Itt a 2, a 3 és az 5 is prím, mert ezek már nem bonthatók kisebb építőkockákra. Az 1-et pedig azért nem tekintjük prímnek, mert a számok felépítésében nem sok hasznát vesszük, hiszen $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

A legkisebb prím tehát a 2, és ez az egyetlen páros szám amelyik prím, hiszen az összes többi páros szám már osztható 2-vel. A 2 után következő prím a 3, aztán az 5, és a 7. A prímeket egy speciális módszerrel nagyon könnyű kiválogatni az egész számok közül. Ezt a módszert úgy hívják, hogy Eratoszthenész szitája és meg tudod nézni itt a kapcsolódó epizódban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A nullától és az egytől különböző összes n pozitív egész szám felbontható prímek szorzatára a sorrendtől eltekintve egyértelműen.

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ahol $k \in Z^+$

Itt k a felbontásban szereplő különböző prímek száma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A legkisebb közös többszörös megtalálásának lépései:

1. Elkészítjük a prímtényezős felbontást
2. Vesszük az összes prímet a két prímtényezős felbontásból
3. Mindegyik prím a nagyobbik kitevőt kapja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A tizes számrendszerbe való átváltás lépései:

1. Elkészítjük a helyiérték-táblázatot (a helyiértékek mindig a számrendszer számának hatványai).
2. Oszloponként összeszorozzuk a helyiértéket a számjeggyel és összeadjuk ezeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kettes számrendszerbe átváltáshoz elkezdjük a számot 2-vel maradékosan osztogatni, amíg már csak a 0 marad. Ezt követően pedig a maradékokat lentről felfelé visszaolvasva kapjuk meg a kettes számrendszerbeli számot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenes arányosság, fordított arányosság

Két mennyiség akkor egyenesen arányos, hogyha az egyiket valahányszorosára változtatjuk, akkor a másik is ugyanennyiszeresére változik.

Tipikus példa egy vonatjegy ára és a megtett távolság. Hogyha például a jegy 0,4 euróba kerül kilométerenként, akkor 1 kilométer 0,4 euró, 2 kilométer kétszer annyi, vagyis 0,8 euró, 3 kilométer háromszor annyi, vagyis 1,2 euró és így tovább. Egy másik tipikus példa a munkavégzéses feladatok. Ha például egy teherautó 400 tonna földet tud elszállítani, akkor két ugyanolyan teherautó kétszer annyit, vagyis 800 tonnát, három teherautó 1200 tonnát, és így tovább.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mennyiség akkor fordítottan arányos, hogyha az egyiket valahányszorosára változtatjuk, akkor a másik ugyanennyied részére változik.

Tipikus példa fordított arányosságra a munkavégzéssel kapcsolatos kérdések. Ha egy adott munkát egy gép 12 óra alatt tud megcsinálni, akkor két ugyanolyan géppel 6 óra alatt lehet végezni, három egyforma géppel pedig 4 óra alatt. Vagyis a 12-t osztjuk a gépek számával. Egy másik tipikus példa, hogy egy rakományt 10 fordulóval tudnak teherautóval elszállítani. Ha két teherautót használunk akkor 10/2=5 forduló kell, és így tovább.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú egyenletek

A mérleg elv lényege, hogy amikor megoldunk egy egyenletet, az egyenlőségjel mindkét oldalán ugyanazokat a műveleteket kell elvégeznünk. Az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadhatjuk, vagy az egyenlet mindkét oldalából ugyanazt a számot kivonhatjuk. És az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nem nulla számmal megszorozhatjuk, vagy mindkét oldalt ugyanazzal a nem nulla számmal eloszthatjuk. Vagyis:

- ha elveszünk egy számot az egyik oldalról, akkor a másik oldalról is el kell venni

- ha hozzáadunk egy számot az egyik oldalhoz, akkor a másik oldalhoz is hozzá kell adni

-ha szorozzuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is szorozni kell ugyanezzel a számmal

-ha osztjuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is osztani kell ugyanezzel a számmal

Az összeadás, kivonás és szorzás egymásutáni lépéseivel jutunk el a megoldáshoz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A megoldás lényege, hogy gyűjtsük össze az x-eket az egyik oldalon, a másik oldalon pedig a számokat, a végén pedig leosztunk az x együtthatójával.

Ha törtet is látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha törtet látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Figyeljünk rá, hogy ilyenkor az egyenlet minden tagját meg kell szorozni (a tagokat $+$, $-$ vagy $=$ jelek választják el egymástól...).

Miután megszabadultunk a törtektől az egyenlet megoldásának lépései a szokásosak a mérleg elv segítségével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Másodfokú egyenletek

Ha a másodfokú egyenlet így néz ki:

$$ax^2+bx+c=0$$

Akkor a megoldóképlet:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodfokú egyenlet megoldóképletének gyök alatti részét nevezzük diszkriminánsnak.

$$D=b^2-4ac$$

Ez dönti el, hogy a másodfokú egyenletnek hány valós megoldása lesz.

Ha a diszkrimináns nulla, akkor csak egy.

Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek két valós megoldása van.

Ha pedig negatív, akkor az egyenletnek nincs valós megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $ax^2+bx+c=0$ alakú másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Viète-formulák nem valami titkós gyógyszer hatóanyag, hanem a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket írja le:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Olyankor, amikor a másodfokú tag együtthatója 1, a Viète-formulák is egyszerűbbek:

$$x^2+px+q=0 \qquad x_1+x_2=-p \qquad x_1x_2=q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenséget ugyanúgy kell megoldani, mint egyenletet. Amire figyelnünk kell, hogy ha negatív számmal szorzunk, az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyik megoldás az, hogy szorzattá alakítjuk, aztán pedig számegyenesen ábrázoljuk a tényezők előjelét.

A második megoldás, hogy ábrázoljuk vázlatosan a másodfokú függvényt, amit az egyenlőtlenségből alkotunk, majd leolvassuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenletrendszerek

A behelyettesítő módszer az egyenletrendszerek megoldásának egyik technikája.

Lényege, hogy kiválasztjuk az egyik egyenletet, ahonnét az egyik változót kifejezzük a másikkal. Ilyenkor célszerű a számunkra szimpatikusabb, egyszerűbb egyenletet választani.

Ezt követően az így kapott kifejezést behelyettesítjük a másik, fel nem használt egyenletbe, így egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenlő együtthatók módszere egy megoldási technika az egyenletrendszerekhez.

Lényege, hogy ha a két egyenletben vagy az x vagy az y együtthatói megegyeznek, akkor a két egyenletet egymásból kivonva azok kiesnek, és egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.

Ha az együtthatók egymás ellentettjei lennének, akkor pedig össze kell adni a két egyenletet.

A módszer akkor is működik, ha nem volnának egyenlő együtthatók, ilyenkor bátran szorozhatjuk az egyenleteket addig, amíg nem lesznek egyenlő együtthatók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szöveges feladatok

Az utazásról szóló szöveges feladatok megoldása során jól jönnek a még fizikából tanult összefüggések:

$v = \frac{s}{t} \qquad s = v \cdot t \qquad t = \frac{s}{v}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Adott az A és B nem üres halmaz.

Ha az A halmaz bizonyos elemeihez egyértelműen hozzárendeljük a B halmaz bizonyos elemeit, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f: A \mapsto B$ függvény. A függvény értelmezési tartománya azoknak az elemeknek a halmaza az A halmazban, amikhez a függvény hozzárendel B halmazbeli elemeket.

Az értelmezési tartományt az angol domain szó alapján, ami egyébként azt jelenti, hogy tartomány, így jelöljük: D_f.

De a gyengébb idegzetűek kedvéért szokás úgy is jelölni, hogy É.T.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f: x \mapsto y$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ha $x_1 \neq x_2$ akkor $y_1 \neq y_2$. Vagyis különböző x-ekhez mindig különböző y-okat rendel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a pontokat, ahol a függvény grafikonja az x tengelyt metszi, zérushelynek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú függvények

A lineáris függvény képlete:

$y = m \cdot x + b$ vagy $x \mapsto m \cdot x + b$ vagy $f(x) = m \cdot x + b$

Az egyik dolog, amit érdemes tudni róla, hogy milyen meredeken megy.

Ezt meredekségnek hívjuk, és így jön ki:

$$m = \frac{\text{amennyit fölfelemegy}}{\text{amennyit előremegy}}$$

A másik dolog, amit érdemes tudni, hogy hol metszi a függvény grafikonja az y tengelyt.

Ezt úgy hívjuk ,hogy tengelymetszet, és a jele b a képletéből.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvénytranszformációk, függvények ábrázolása

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x)=f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x)=-f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pontok, egyenesek, síkok, szögek, a geometria alapjai

A geometria legapróbb építőkockái a pontok. A pontokat az ABC nagy betűivel jelöljük.

Az egyenesek mindkét irányban végtelen kiterjedésű és végtelenül keskeny egyenes vonalak. De ez csak az egyenes vizuális leírása, matematikai definíciója nincsen, ugyanis az egyenes a ponthoz hasonlóan alapfogalom.

A sík is geometria alpafogalom. A síkok már két dimenziósak, ellentétben az egy dimenziós egyenessel. Az egyenesen csak jobbra és balra tudunk mozogni, egy síkban viszont már két lényegesen különböző irány létezik, jobbra-balra és előre-hátra. Ennél is nagyobb a dimenziója a térnek, amiben a pontok, az egyenesek és a síkok helyezkednek el. A térben három lényegesen különböző irány van, ezért a tér három dimenziós. Létezik benne jobbra-balra, előre-hára és fel-le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy egyenesnek a két pont közötti részét szakasznak nevezzük.

A szakasz az egyenessel ellentétben mindig véges hosszúságú, és a hossza mindig a két pont távolsága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy síkot egy egyenessel kettévágunk, akkor két félsík keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a teret egy síkkal két részre vágjuk, akkor két féltér keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík egy pontjából kiinduló két félegyenes a síkot két tartományra osztja. Ezek a tartományok és a két félegyenes szöget alkotnak. Azt, hogy a két szögtartomány közül melyikről van szó, a szárak közé rajzolt körívvel jelezzük. A szög csúcsa a két félegyenes közös végpontja, a szög szárai pedig maguk a félegyenesek. A félegyenesek közötti részt szögtartománynak nevezzük. A két félegyenes mindig két ilyen tartományt határoz meg, és egy körívvel jelöljük, hogy épp melyik szögtartományról van szó.

A szögeket a görög abc betűivel jelöljük: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

A szögeket nagyságuk szerint szokás csoportosítani. A szögek mérésére a fokot szokás használni, egy teljes kör éppen 360 fok, a derékszög pedig a 90 fok. Amikor a két szögszár éppen egybeesik, akkor az általuk meghatározott szög a nullszög és a teljes szög, az egyik 0 fokos, a másik 360 fokos. Amikor a két félegyenes 0 és 90 fok közötti szöget zár be, azt úgy hívjuk, hogy hegyes-szög. Amikor épp 90 fokos szögben állnak, azt derékszögnek nevezzük. A 90 foknál nagyobb és 180 foknál kisebb szögek a tompaszögek. A 180 fokos szöget egyenes-szögnek nevezzük, míg a 180 fok és 360 fok közötti szögeket homorúszögnek hívjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 0° és 90° közé esik, akkor hegyesszögnek nevezzük.

Az α szög hegyesszög, ha $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög pontosan 90°-os, akkor derékszögnek is nevezzük.

Az α szög derékszög, ha $\alpha = 90^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 90° és 180° közé esik, akkor tompaszögnek nevezzük.

Az α szög tompaszög, ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög pontosan 180°-os, akkor egyenesszögnek is nevezzük.

Az α szög egyenesszög, ha $\alpha = 180^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 180° és 360° közé esik, akkor homorúszögnek nevezzük.

Az α szög homorúszög, ha $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két pont távolsága a pontokat összekötő szakasz hossza.

Ha tehát le kell mérni két pont távolságát, csak rá kell helyezni a vonalzónkat a két pontra, és már látjuk is a két pont távolságát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pont és egyenes távolságának leméréséhez először a pontból merőlegest kell állítanunk az egyenesre.

A távolság pedig ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pont és sík távolságának leméréséhez először a pontból merőlegest kell állítanunk a síkra.

A pont és sík távolsága pedig ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a két egyenes metszi egymást, akkor a távolságuknak nincs sok értelme vagy 0.

Ha a két egyenes egymással párhuzamos, akkor a távolságukat úgy kapjuk meg, hogy az egyik egyenes tetszőleges pontjából merőlegest bocsátunk a másik egyenesre.

És a két egyenes távolsága ennek a merőleges szakasznak a hossza.

Ha az egyenesek különböző síkokban futnak, úgy hívjuk őket, hogy kitérő egyenesek.

A kitérő egynesek nem párhuzamosak, de nem is metszik egymást.

A kitérő egyenesek mindig két párhuzamos síkban futnak, így a távolságuk a két sík távolsága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az egyenesek különböző síkokban futnak, úgy hívjuk őket, hogy kitérő egyenesek.

A kitérő egynesek nem párhuzamosak, de nem is metszik egymást.

Kitérő egyenesek láthatunk például autópályáknál, ahol az egyik út keresztezi a másikat egy hídon át.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a két sík metszi egymást, olyankor egy egyenesben metszik egymást és a távolságuknak nincs sok értelme vagy 0.

Ha a két sík párhuzamos, akkor a két sík távolságát úgy kapjuk meg, hogy veszünk az egyik síkon egy tetszőleges pontot, a pontbl merőlegest állítunk a síkra, és a távolságuk ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két ponttól azonos távolságra lévő pontok halmaza a két pontot összekötő szakasznak a szakaszfelező merőleges egyenese.

Három ponttól azonos távolságra lévő pont a három pon köré írható kör középpontja.

Két metsző egyenestől azonos távolságra lévő pontok halmaza a két egyenes szögének szögfelezője.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szögben a szögszárak egymással párhuzamosak és egyforma irányúak is, akkor ezeket a szögeket egyállású szögeknek nevezzük.

Az egyállású szögek egyenlők.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szögben a szögszárak egymással párhuzamosak, de irányuk ellentétes, akkor ezeket a szögeket váltószögeknek nevezzük.

A váltószögek egyenlők.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két váltószöget a csúcsuknál összeillesztünk, akkor ezeket a szögeket csúcsszögeknek nevezzük.

A csúcsszögek egyenlők.

Ha két egyenes metszi egymást, akkor mindig két-két csúcsszög pár keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szög szárai párhuzamosak és az egyik száruk közös, akkor ezeket a szögeket kiegészítő szögnek nevezzük.

A kiegészítő szögek nem egyenlők (kivéve ha 90°-90°-osak), de ha összeadjuk őket, mindig 180 fokot kapunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

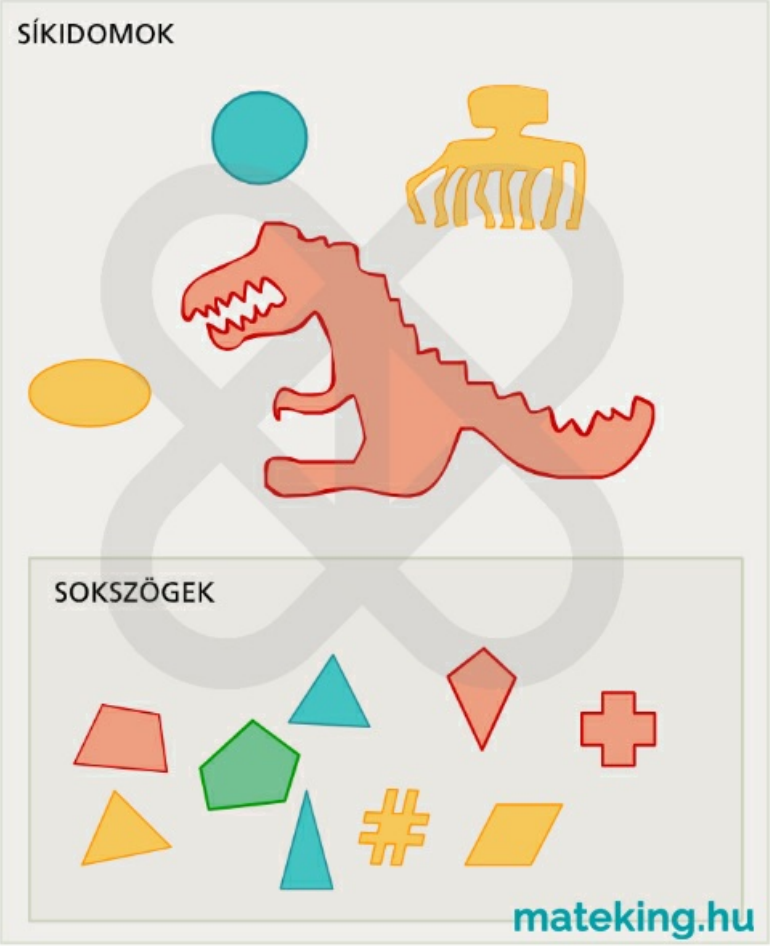
Ha két szög 90 fokra egészíti ki egymást, akkor pótszögeknek hívjuk őket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Síkidomok, háromszögek, négyszögek, sokszögek

Síkidomnak nevezzük a sík zárt vonalakkal körülhatárolt részét.

A zárt vonal azt jelenti, hogy fogjuk a ceruzát, elindulunk valahonnan... és hopp, visszaérünk ugyanoda, ahonnan indultunk. Síkodom például egy háromszög, vagy egy négyzet, de síkidom egy kör is, vagy éppen a kölönböző emojik. Egy síkidomot több különböző zárt vonal is atárolhat. Olyankor, amikor csak egy zárt vonal határolja, egyszerű síkidomnak nevezzük. Mindez sokkal könnyebben elképzelhető, ha megnézed az ehhez kapcsolódó epizódot.

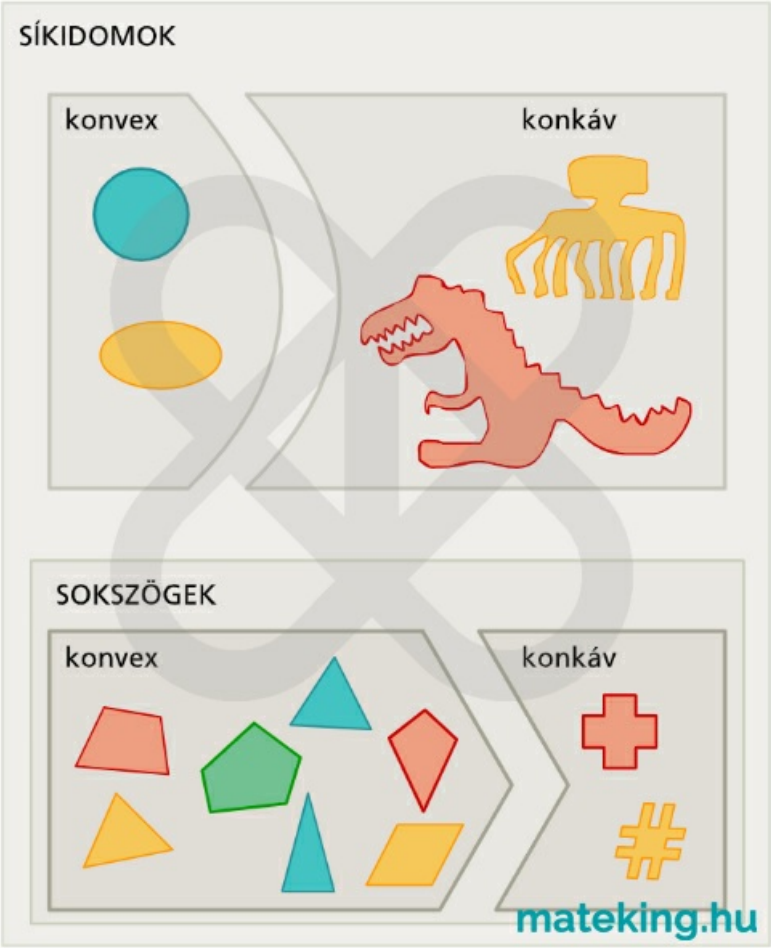


Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból álló zárt görbe (töröttvonal) határol. Vagyis azok a síkidomok sokszögek, amelyek határoló vonalai csak egyenes szakaszokból állnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

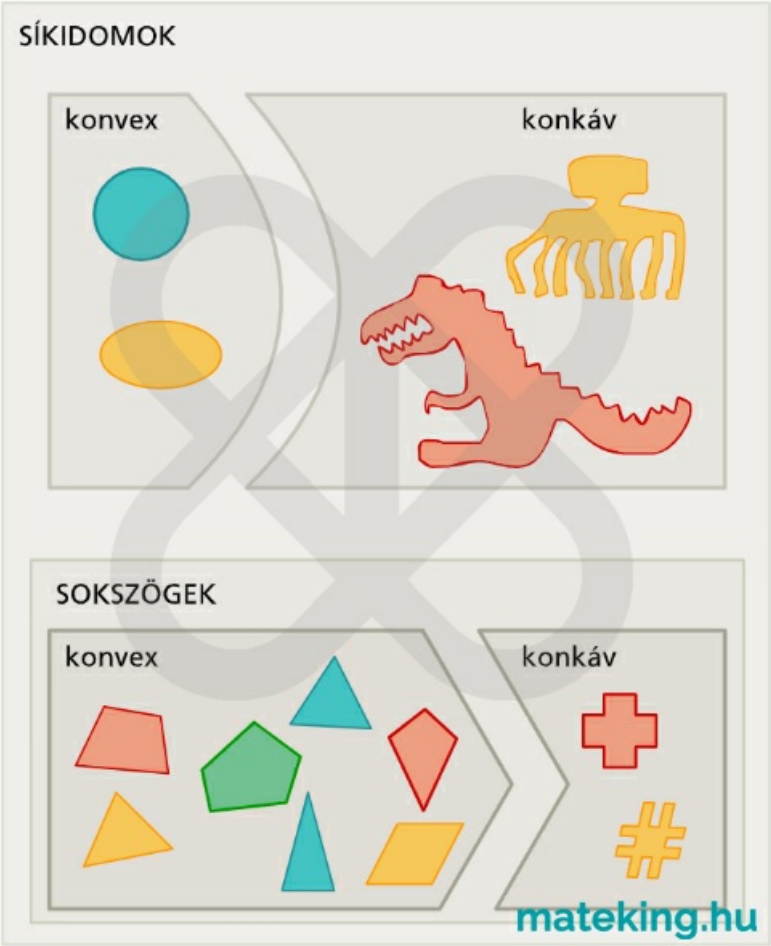
A konkáv síkidom az, amelyikben ki tudunk választani két olyan pontot, hogy az ezeket összekötő szakasznak egy része a síkidomon kívül halad. Egy kör vagy egy téglalap például nem konkáv, mert bárhogyan választunk benne két pontot, a pontokat összekötő szakasz is a síkidomban halad. De például egy szívecske már konkáv, mert ha a két kidudorodó részét összekötjük, akkor az összekötő vonal kívül halad. Mindez sokkal egyszerűbb, ha megnézed az ehhez a témához kapcsolódó epizódot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konvex síkidom az, amelyikben akárhogy veszünk két belső pontot, az őket összekötő szakasz minden pontja a síkidom belsejében lesz.

Egy kör vagy egy téglalap például konvex, mert bárhogyan választunk benne két pontot, a pontokat összekötő szakasz is a síkidomban halad. De például egy szívecske már nem konvex, mert ha a két kidudorodó részét összekötjük, akkor az összekötő vonal kívül halad. Mindez sokkal egyszerűbb, ha megnézed az ehhez a témához kapcsolódó epizódot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sokszöget szabályosnak nevezünk, ha minden oldala és minden belső szöge egyforma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból álló zárt görbe (töröttvonal) határol. Ezeket az egyenes szakaszokat nevezzük a sokszög oldalainak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakasz alkotta zárt görbe határol. Ezeket a szakaszokat oldalaknak, vagy másként oldaléleknek nevezzük, és azokat a pontokat, ahol az oldalélek találkoznak, a sokszög csúcsainak hívjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokszögek nem szomszédos csúcsait összekötő szakaszokat a sokszög átlójának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenlő szárú háromszögben van két egyforma hosszú oldal, amiket szárnak nevezünk. És hát van ugye a harmadik oldal, ez az alap.

Annyit érdemes megjegyezni róla, hogy az alaphoz tartozó súlyvonal, magasságvonal, oldalfelező merőleges és szögfelező mind egybeesik. És ez egyúttal a háromszög szimmetriatengelye is.

És azt is jó tudni róla, hogy az alapon fekvő szögek egyformák.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szabályos háromszögnek minden oldala és minden szöge egyenlő (tehát a szögek 60°-osak).

Szabályos háromszögben a körülírt kör középpontja, a magasságpont és a súlypont is egybeesnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszögnek van 90°-os szöge.

A derékszöggel szemközti oldalt átfogónak nevezzük, a másik kettőt pedig befogónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hegyesszögű háromszögek minden szöge hegyesszög, azaz 0°-nál nagyobbak, de 90°-nál kisebbek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A tompaszögű háromszögek azok, amelyeknek van egy tompaszöge, azaz egy olyan szöge, ami 90°-nál nagyobb, de 180°-nál kisebb.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög egyenlőtlenség szerint minden háromszög bármelyik oldalának rövidebbnek kell lennie, mint a másik két oldal összege.

$$a+b>c \qquad a+c>b \qquad b+c>a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög magasságvonala a csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges.

Ezek mindig egy pontban metszik egymást, és ezt a pontot magasságpontnak nevezzük.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor a magasságpont a háromszögön kívülre esik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.

Ezek mindig egy pontban metszik egymást, ezt a pontot hívjuk a háromszög súlypontjának.

További izgalom, hogy a súlypont mindegyik súlyvonalat 2:1 arányban osztja.

Továbbá a súlyvonal felezi a háromszög területét.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög oldalfelezőmerőlegesei mindig egy pontban metszik egymást. Ez a pont minden csúcstól egyenlő távolságra van és emiatt a háromszög köré írható kör középpontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög belső szögfelezői mindig egy pontban metszik egymást. Ez a háromszögbe írható kör középpontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy háromszög oldalfelezőpontjait összekötjük, akkor a háromszög középvonalait kapjuk.

A középvonalak párhuzamosak a háromszög oldalaival és éppen fele olyan hosszúak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A jól ismert képlet háromszögek területére:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

És it jön egy kevésbé ismert háromszög-területképlet:

$$T = \frac{abc}{4R}$$

Itt R a háromszög köré írható körének sugara.

Ez pedig egy még kevésbé ismert képlet háromszögek területére:

$$T = r \cdot s$$

Itt r a beírható kör sugara, s pedig a kerület fele.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Hérón-képlet a háromszögek területképletei közül egy kevésbé ismert, de elég jól használható képlet. Akkor érdemes használni, ha ismert a háromszög mindhárom oldala.

$$s = \frac{a+b+c}{2} \qquad T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A legszabályosabb négyszög a négyzet. A négyzet oldalai egyenlő hosszúak és minden szöge derékszög. Egy sokszöget akkor nevezünk szabályos sokszögnek, ha minden oldala és minden szöge egyforma. Így tehát az egyetlen szabályos négyszög a négyzet. Ezen kívül a négyzetek mége egy fontos dolgot tudnak: az átlóik is merőlegesek egymásra.

A négyzet területe:

$$T = a^2$$

A négyzet kerülete:

$$K = 4a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

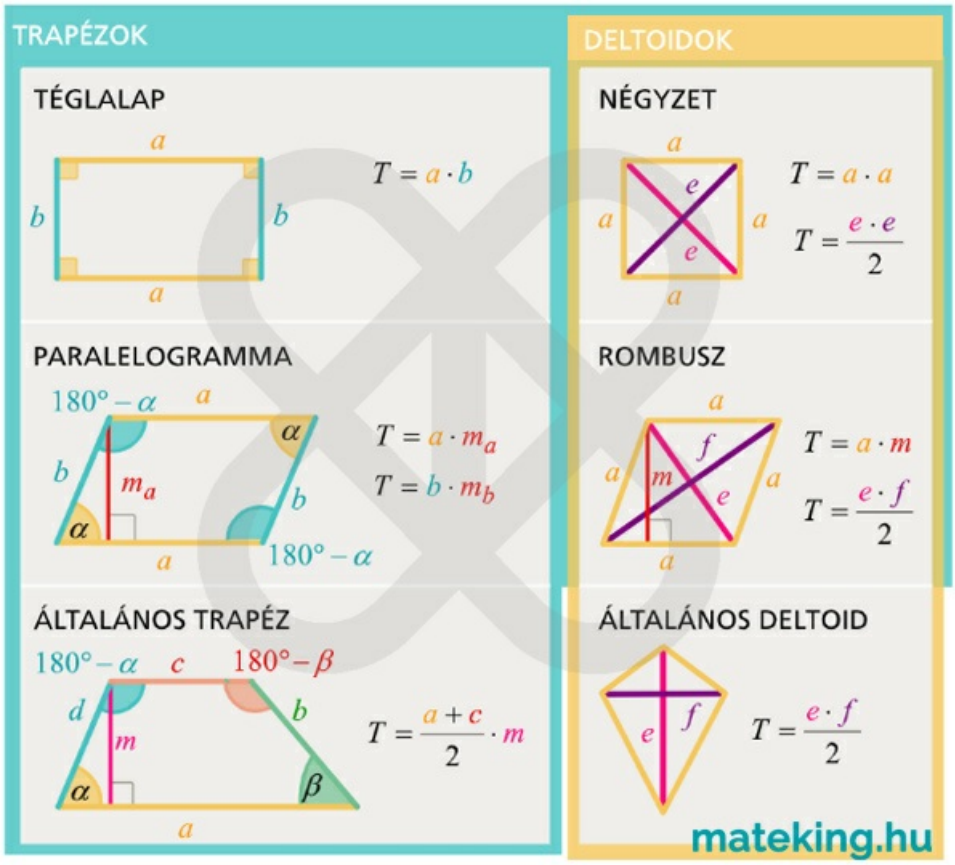
Téglalap olyan négyszög, aminek minden szöge derékszög. Vagyis az oldalak nem feltétlen egyenlő hosszúak. Olyankor, amikor az oldalai is egyenlő hosszúak, egy négyzetet kapunk. A téglalapok egyik fontos tulajdosága, hogy a szemközti oldalai egyforma hosszúak, vagyis két darab a hosszúságú és két darab b hosszúságú oldala van. A téglalapoknak egy másik fontos tulajdonsága pedig, hogy a szemközti oldalai párhuzamosak egymással. Ez pedig azt jelenti, hogy a téglalapok mindig paralelogrammák is egyben (ugyanis a paralelogrammák azok a négyszögek, amelyeknek van két párhuamos oldalpárjuk).

Területe:

$$T = a \cdot b$$

Kerülete:

$$K = 2a + 2b$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Rombusz egy olyan négyszög, amelynek minden oldala egyforma hosszú. Vagyis egy rombusznál az oldalak egyenlő hosszúságúak, de a szögeknek nem kell derékszögnek lenniük. Amikor a rombusz szögei derékszögek, egy négyzetet kapunk. Vagyis a négyzet is rombusz. A rombuszok másik fontos tulajdonsága, hogy a szemközti oldalaik mindig párhuzamosak egymással, vagyis a rombuszok paralelogrammák. is. Ez elvezet minket a rombusz egy másik definíciójához: a rombusz egyenlő oldalú paralelogramma.

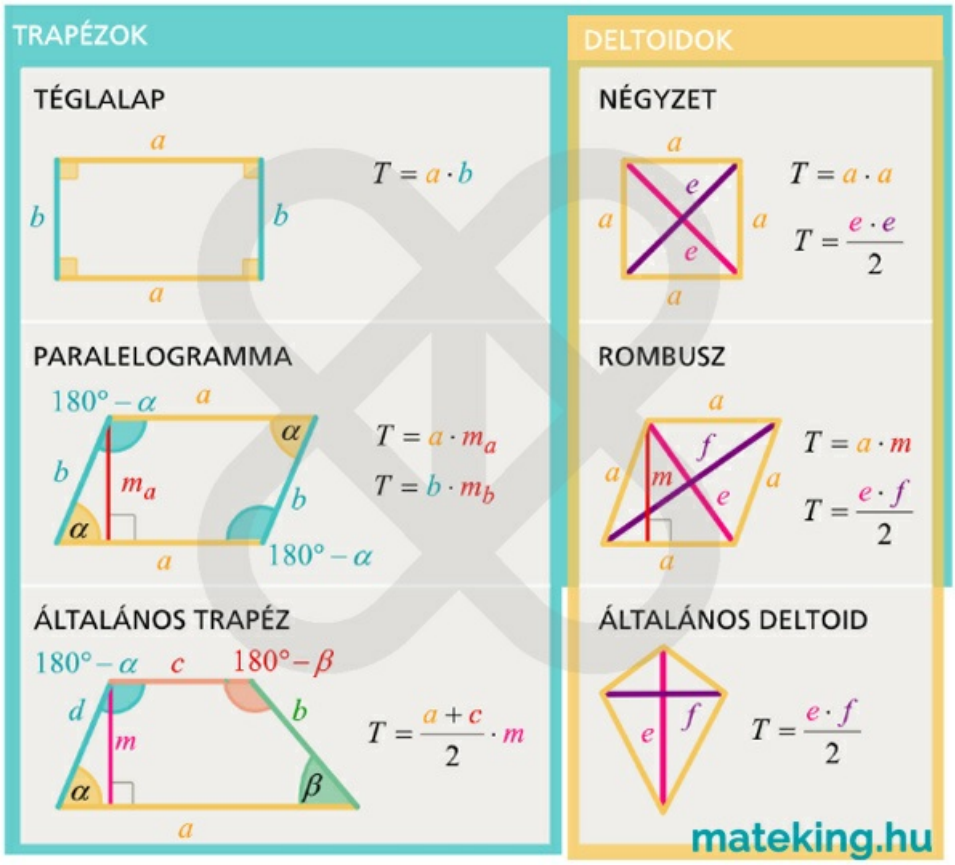
A rombusz magasságát m-mel jelöljük, az átlóit pedig e-nek és f-nek szokás nevezni. Ezeknek a segítségével tudjuk kiszámolni egy rombusz területét.

Területe:

$$T = a \cdot m = \frac{e \cdot f}{2}$$

Kerülete:

$$K = 4a$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

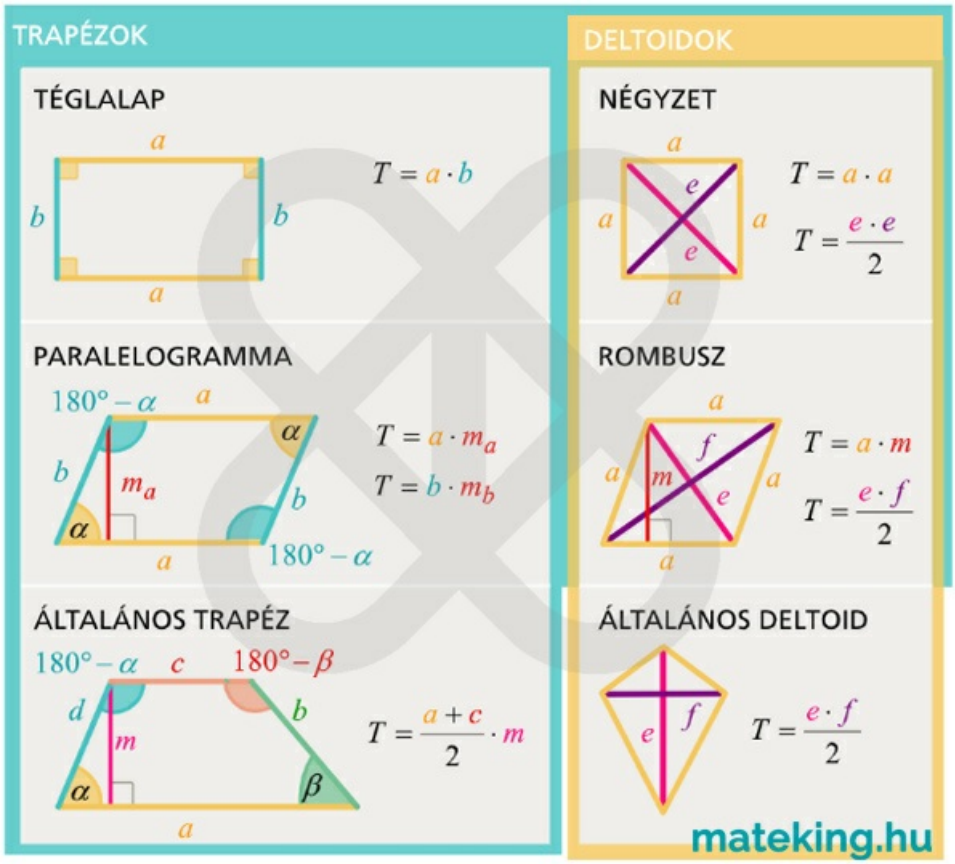
A paralelogramma olyan négyszög, aminek van két párhuzamos oldalpárja. Nagyon sok ilyen tulajdonságú négyszög van. Ilyenek a négyzetek, a téglalapok és a rombuszok. Vagyis minden négyzet, minden téglalap és minden qrombusz egyben paralelogramma is. A paralelogramma magasságát m-mel szokás jelölni.

Területe:

$$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

Kerülete:

$$K = 2a + 2b$$



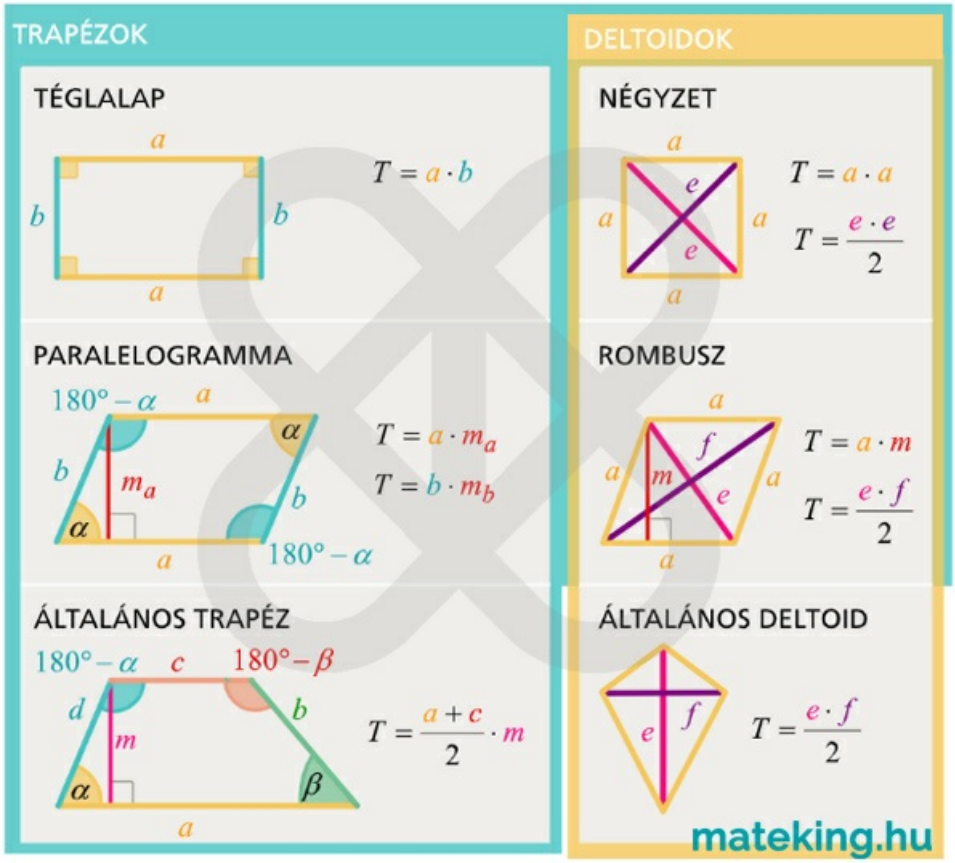
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A trapéz olyan négyszög, aminek van legalább egy párhuzamos oldalpárja. Ezeket az oldalakat a trapéz alapjainak nevezzük és a-val meg c-vel jelöljük. Általában a nagyobbik alapot szokás a-val jelölni és a kisebbik alapot pedig c-vel. Olyankor, amikor a trapéz alapjai egyforma hosszúak, paralelogrammát kapunk. Vagyis minden paralelogramma egyben trapéz is. Sőt, ha meggondoljuk, akkor a trapéz definíciója nagyon sok négyszögre ráillik. Egy darab párhuzamos oldalpárja ugyanis van a négyzetnek, a téglalapnak, a rombusznak és a paralelogrammáknak is. Vagyis minden négyzet, minden téglalap, minden rombusz és minden paralelogramma egyben trapéz is.

Mivel azonban ezeknek van külön neve, amikor egy feladatban trapézról van szó, általában olyan trapézra gondoljunk, aminek két különböző hosszúságú párhuzamos oldala van, az egyik "alul" a másik "felül" és ezek a trapéz a-val és c-vel jelölt alapjai.

Területe:

$$T = \frac{a+c}{2} \cdot m$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a trapéz alapján fekvő két szög ugyanakkora, olyankor a trapéz szimmetrikus.

A szimmetrikus trapézt még szokás egyenlő szárú trapéznak is hívni, ugyanis a két szára mindig egyforma hosszú.

Ezen kívül van egy fantasztikus tulajdonsága is, hogy van köré írható köre.

Innen ered a harmadik elnevezés: húrtrapéz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

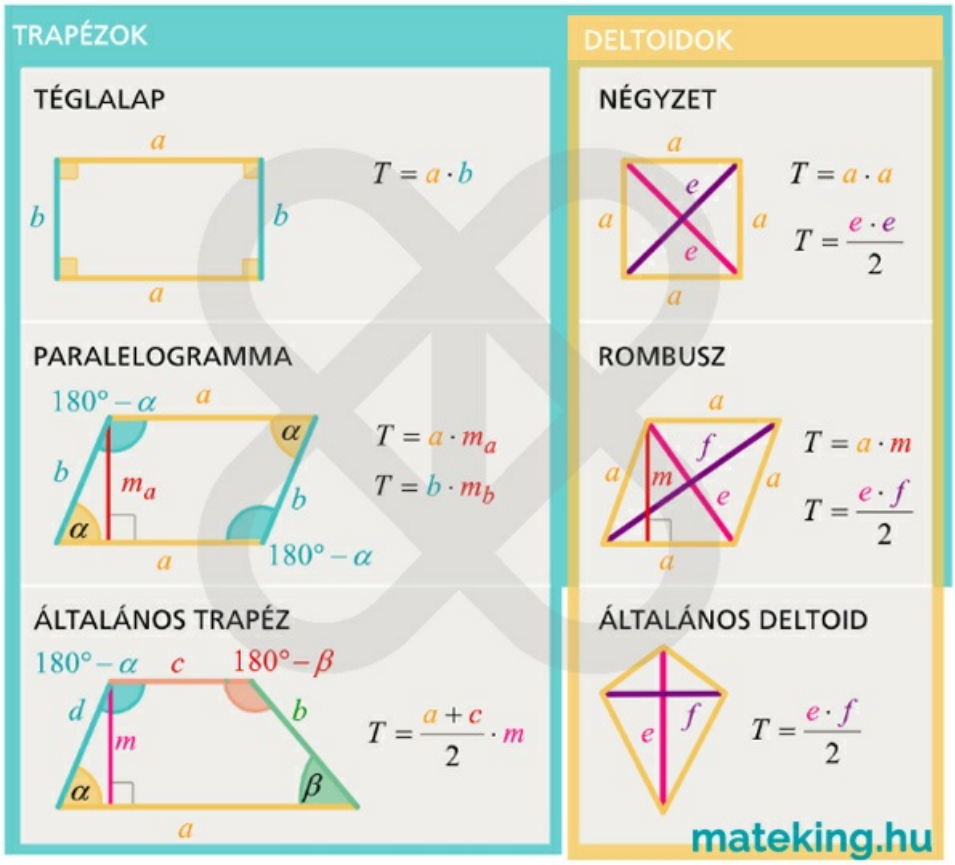
Azokat a négyszögeket nevezzük deltoidnak, amik papírsárkány alakúak és az átlóik merőlegesek egymásra.

Egy kicsit precízebben: deltoid az a négyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra és legalább az egyik átló szimmetriatengely.

A deltoidok közül kétféle speciális deltoidot érdemes megjegyezni, az egyik a rombusz, a másik a négyzet. Vagyis minden négyzet és minden rombusz deltoid. A deltoidok átlóit e-vel és f-fel jelöljük, és ezek csak akkor egyforma hosszúak, ha négyzetről van szó. A deltoidok területét általában az átlóik segítségével érdemes kiszámolni.

Területe:

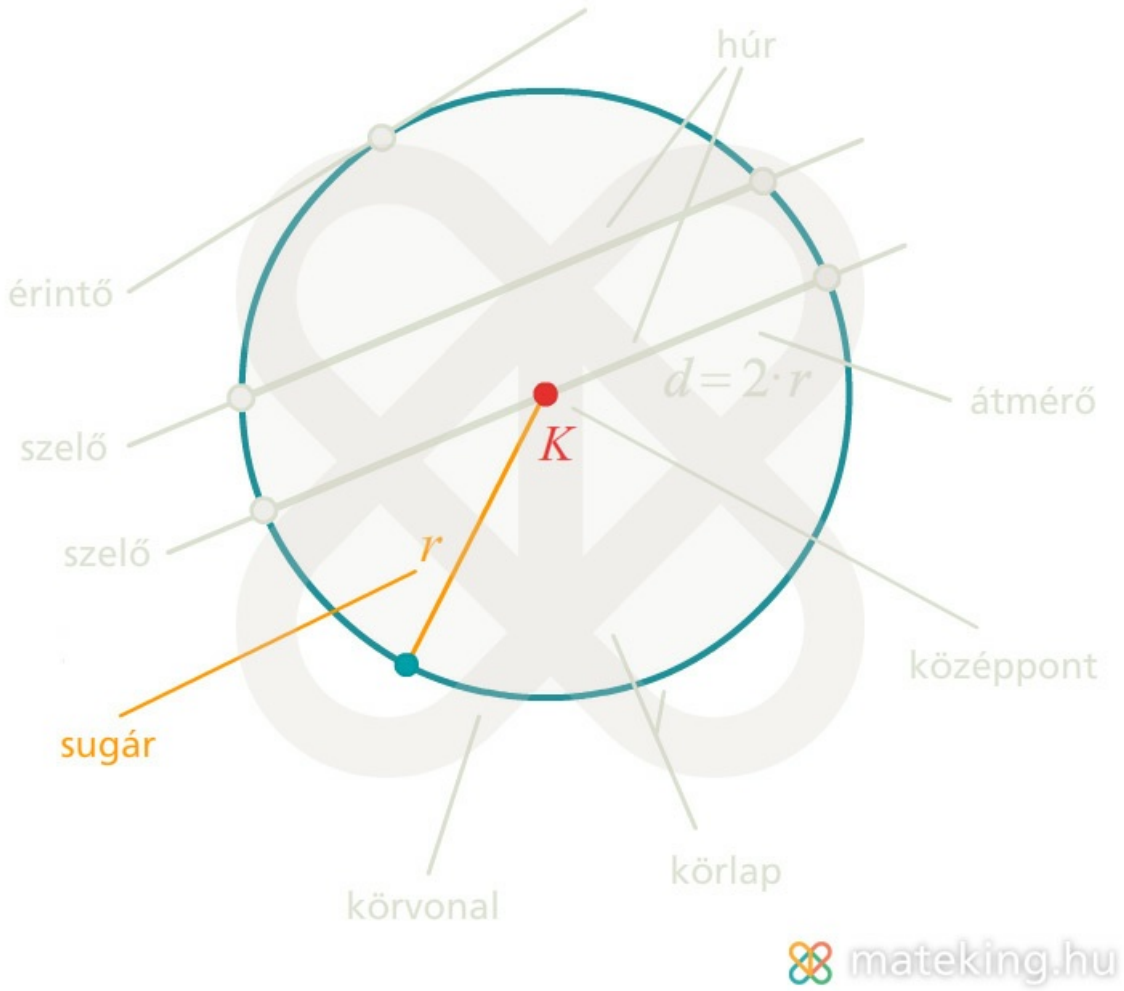
$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

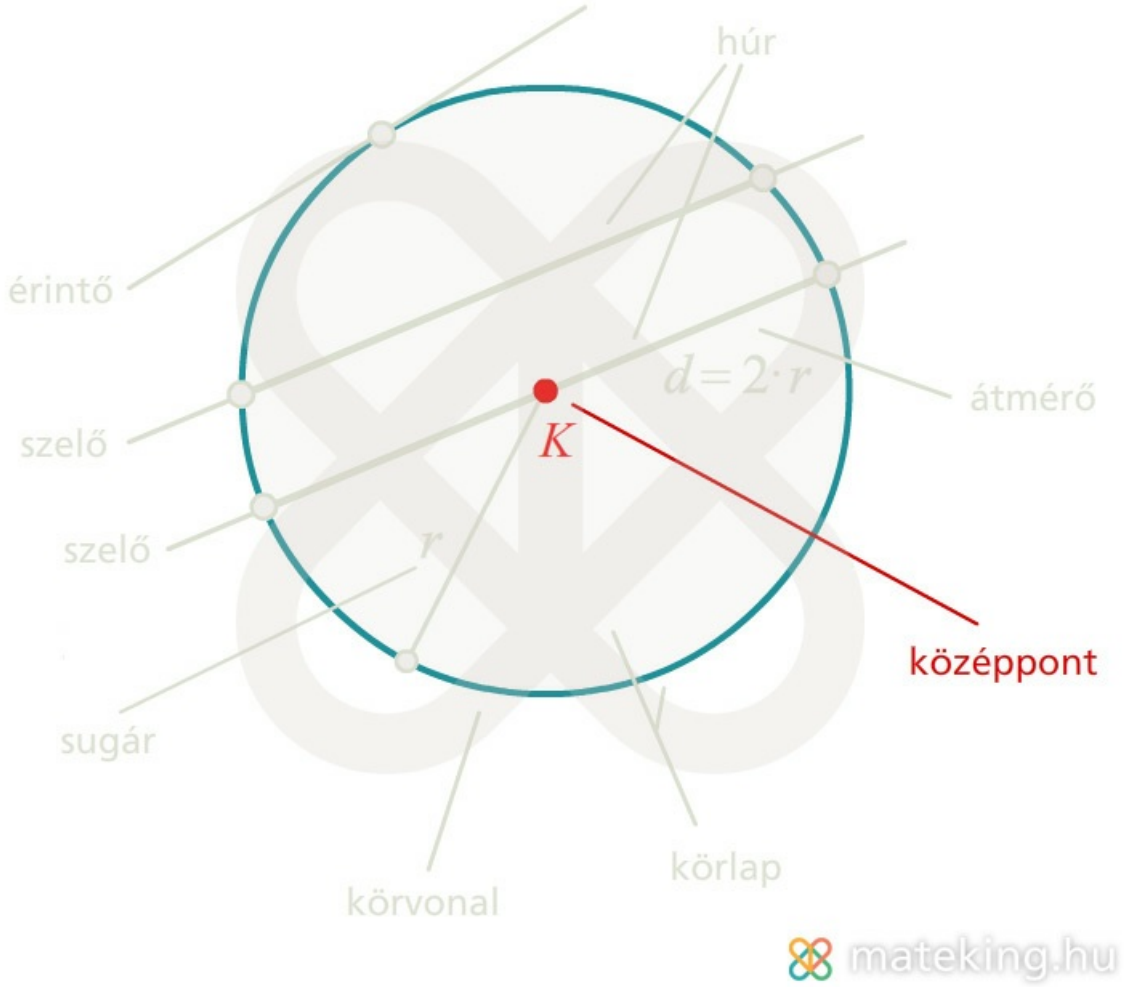
A kör

Egy kör sugara a kör középpontját a körvonal bármely pontjával összekötő szakasz hossza. A kör sugarát r betűvel jelöljük ami a radius szó kezdőbetűje.



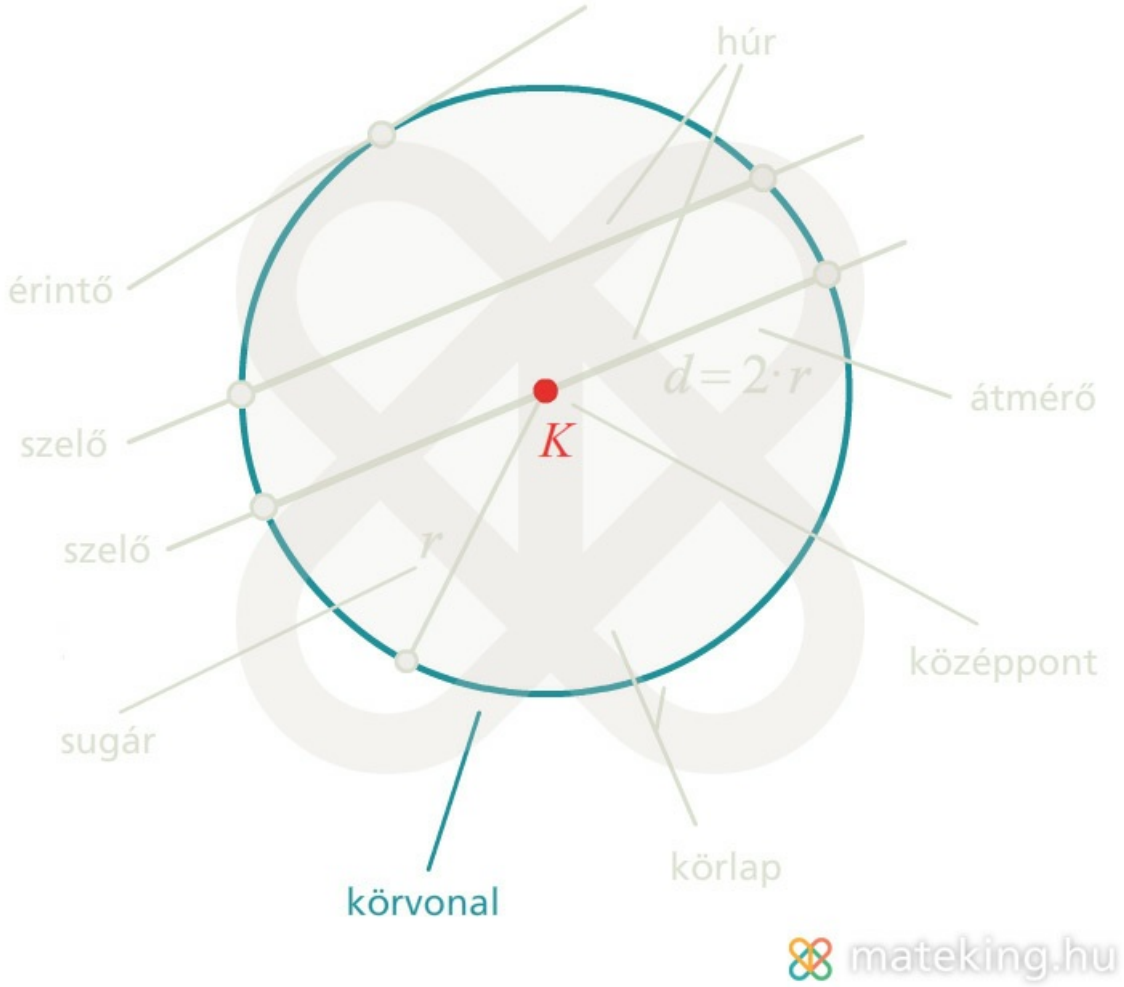
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kör azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Ezt az adott pontot hívjuk a kör középpontjának. A kör középpontját általában O-val vagy K-val szokás jelölni.



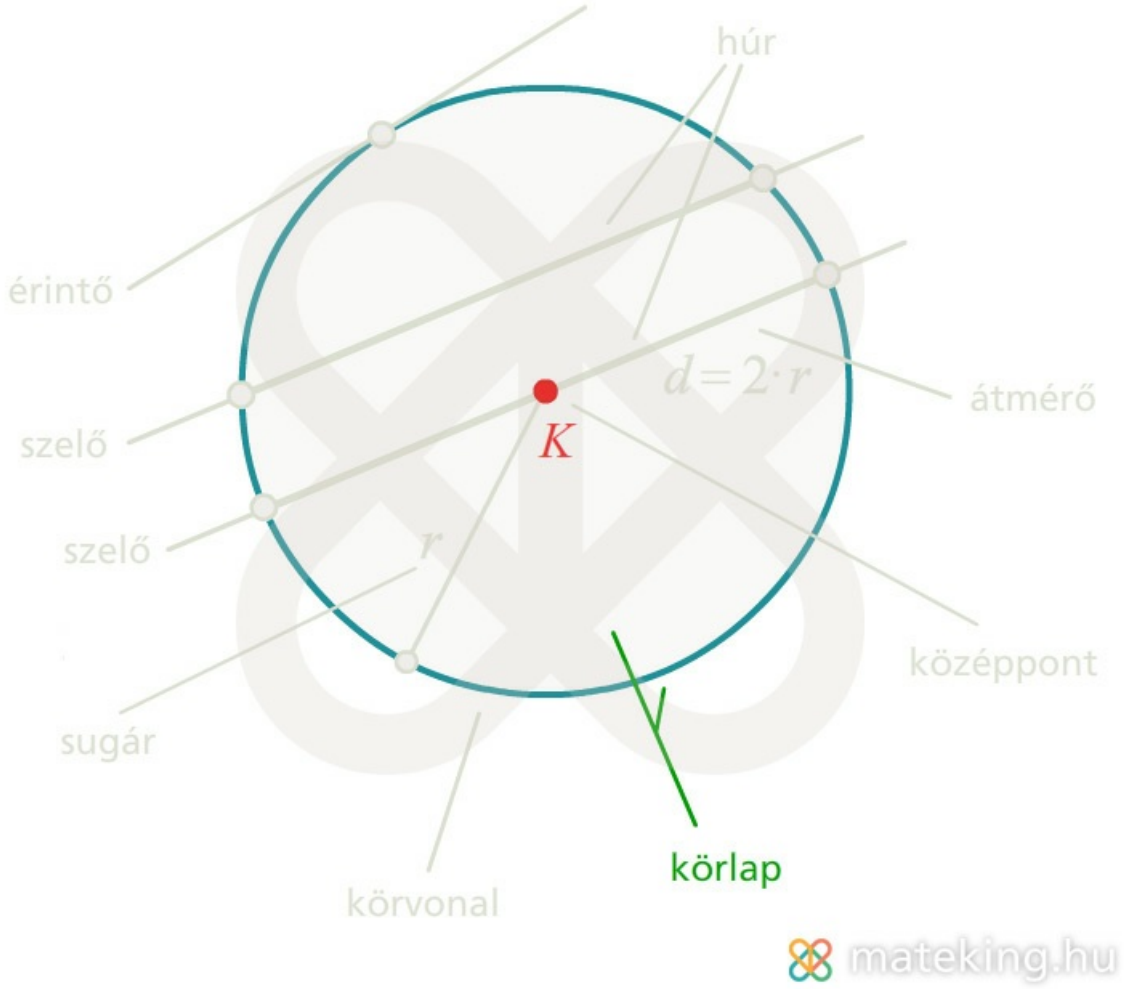
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körvonal azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra vannak. A körvonalat szokás egyszerűen körként is emlegetni.



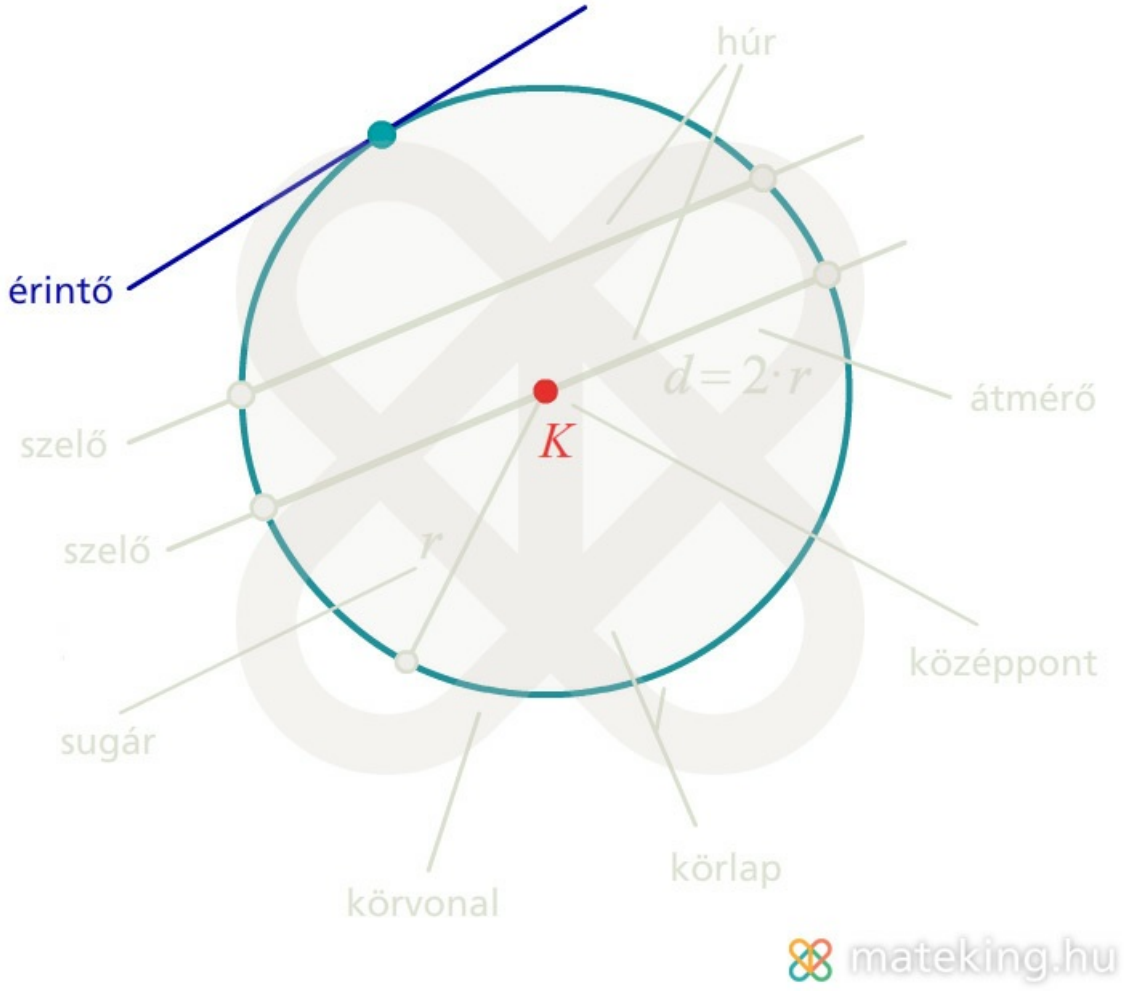
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körlap vagy körlemez a körvonal és a körvonalon belüli rész együttes elnevezése. Ezt így egyben szokás egyszerűen csak simán körnek is nevezni. Matematikailag precíz definíciója: azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) legfeljebb egy adott ***r*** távolságra (***r*** a kör sugara) vannak.



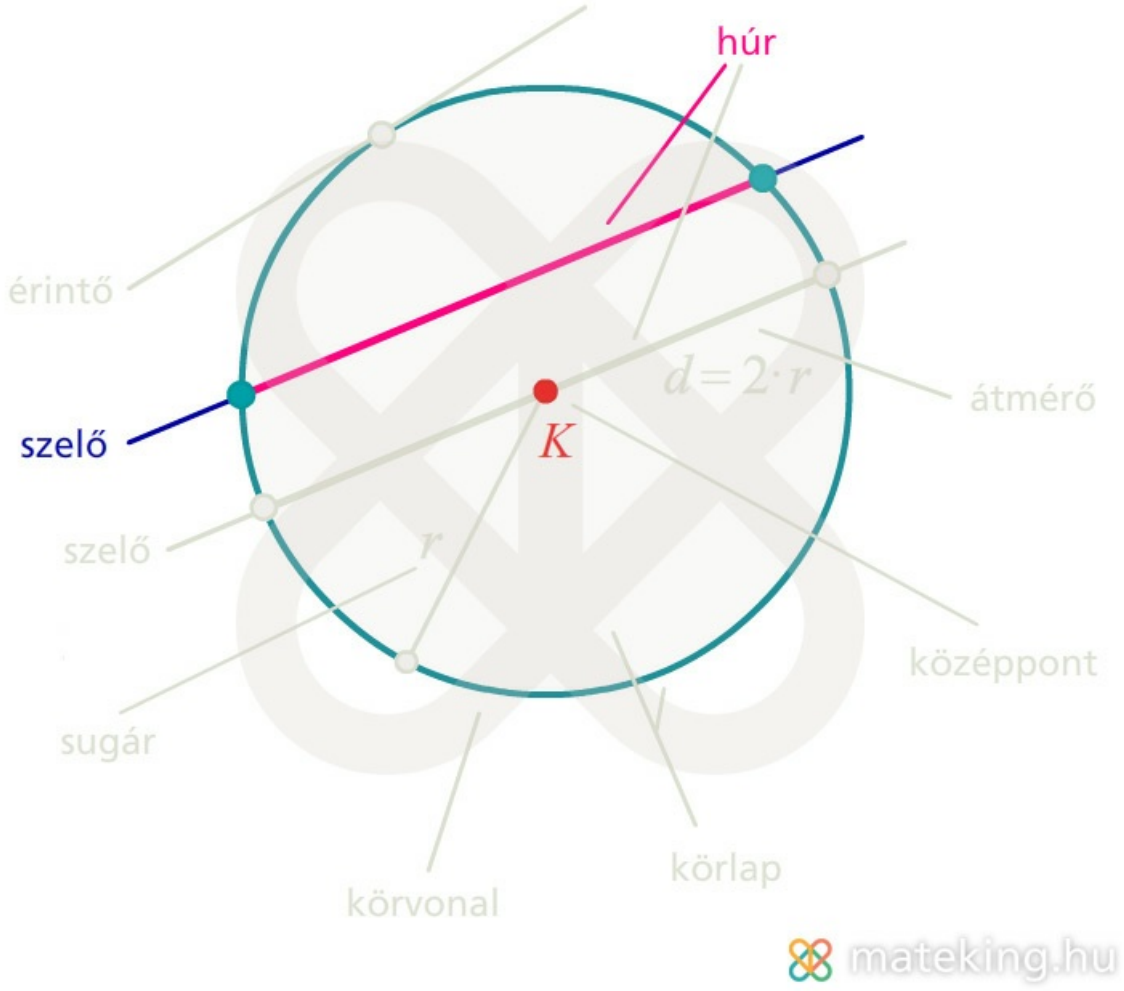
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenes éppen olyan távol halad egy kör középpontjától, mint a kör sugara, akkor ez az egyenes érinti a kört. Az érintőnek csak egy közös pontja van a körrel, amit érintési pontnak nevezünk. Az érintési pontba vezető sugár mindig merőleges az érintőre.



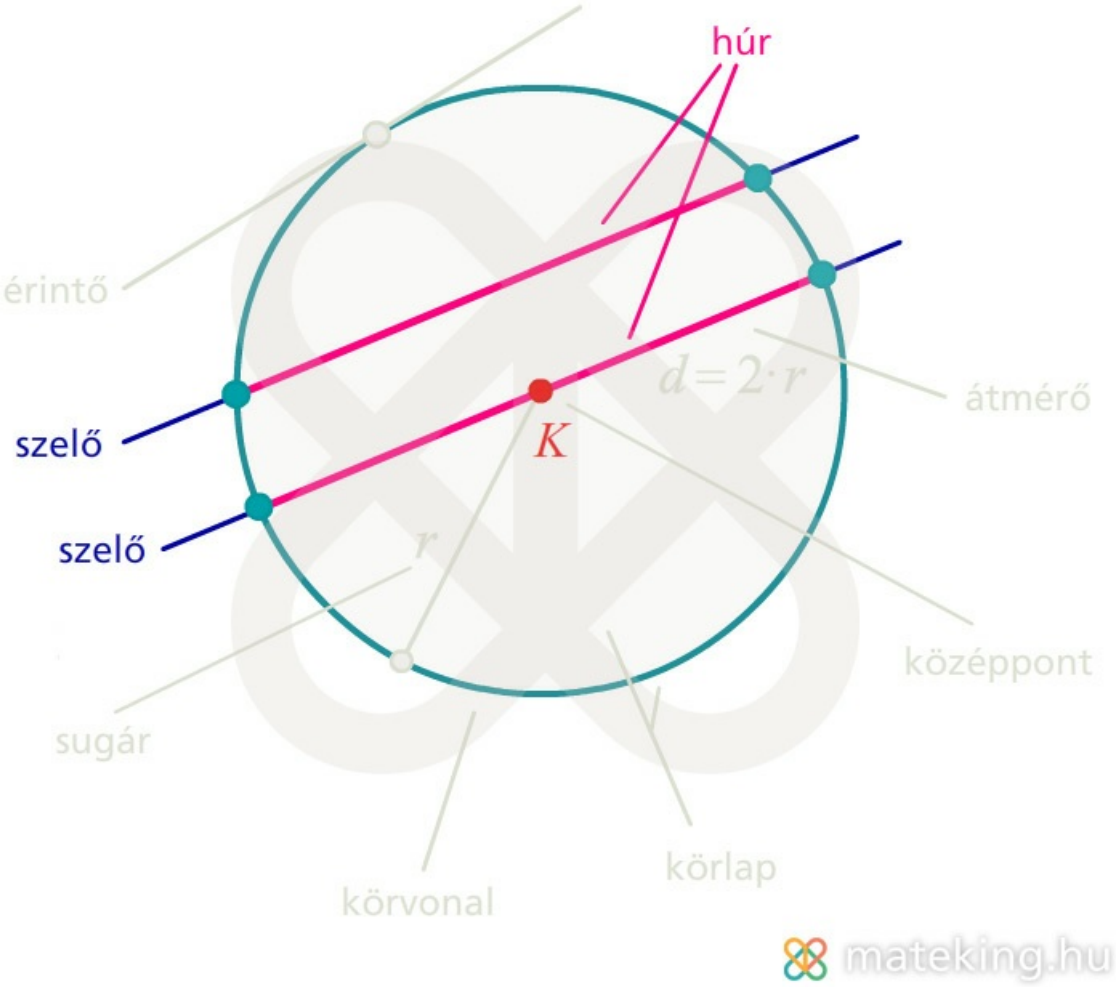
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat az egyeneseket, amik metszik a kört úgy hívjuk, hogy szelő. A szelők két pontban metszik a kört és a két pont közötti szakasz a húr. Olyankor, amikor a szelő éppen átmegy a kör középpontján, a szelő a kör területét felezi, és ilyenkor a metszéspontok közötti húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.



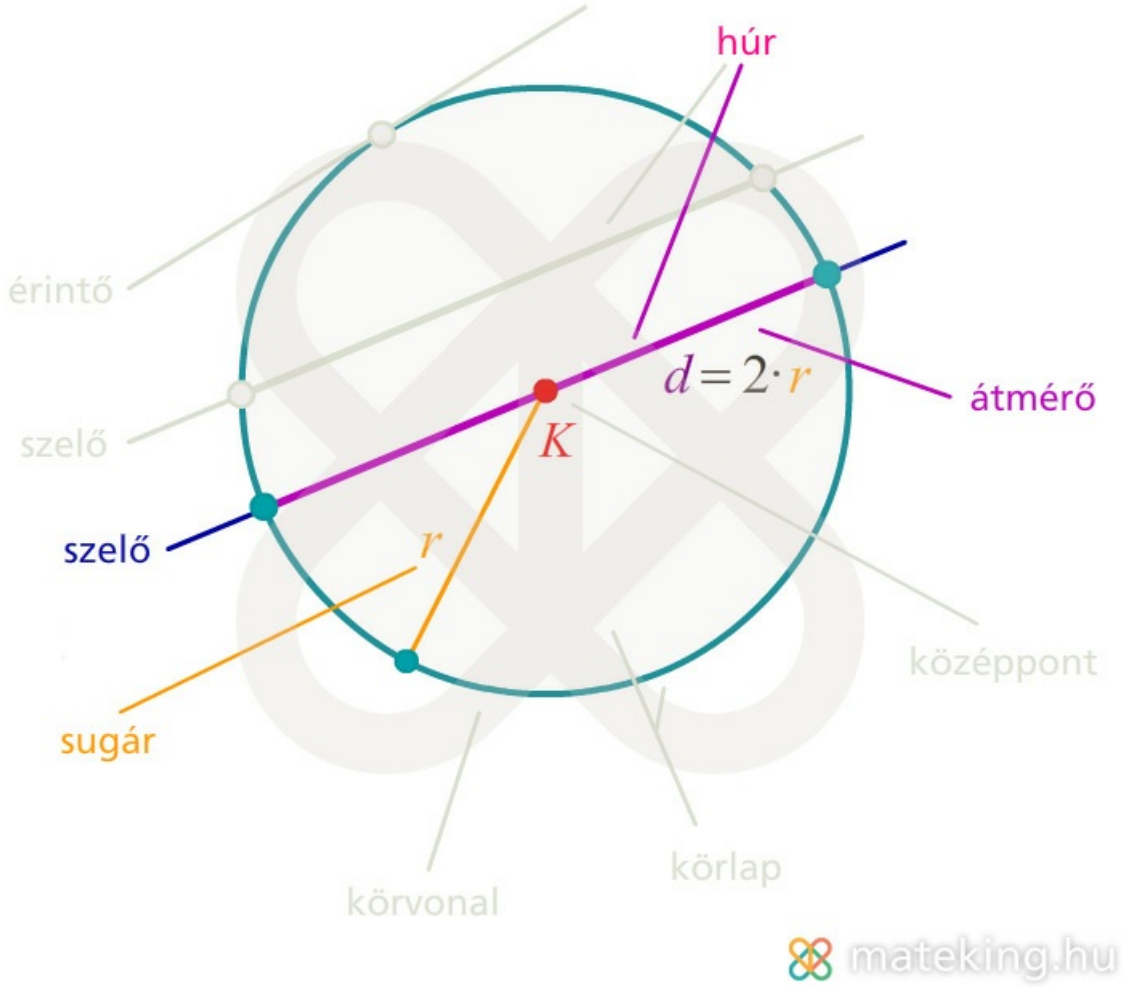
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy körben a körvonal két különböző pontját összekötő szakaszt húrnak nevezzük. Olyankor, amikor a húr éppen átmegy a kör középpontján, a húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

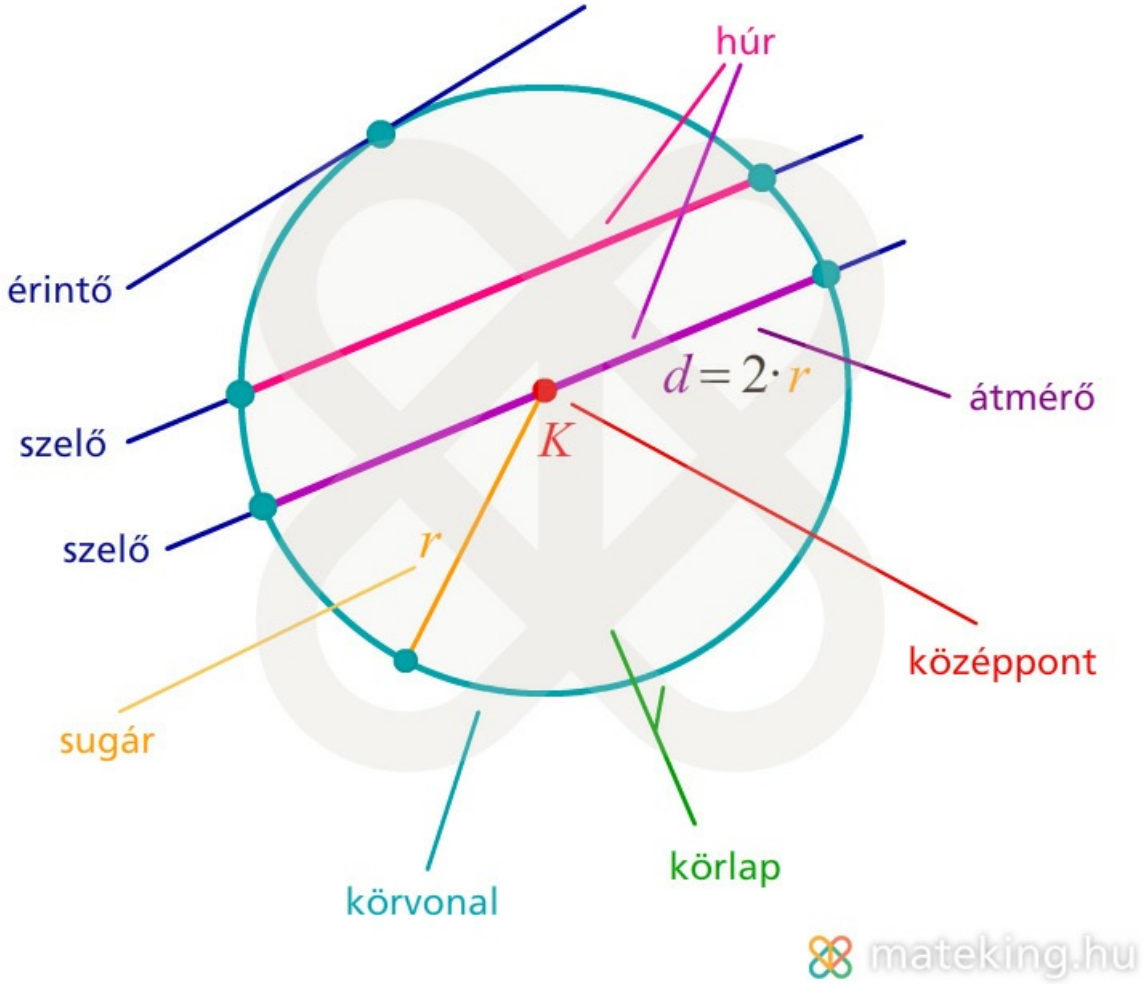
A kör középpontját áthaladó húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő a kör maximális szélessége, és az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese. Jele d a diameter szó kezdőbetűje alapján.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy adott ponttól állandó távolságra lévő pontok halmazát körvonalnak nevezzük. És ezt az állandó távolságot hívjuk a kör sugarának. A sugár jele ***r***. A kör középpontját általában ***K***-val jelöljük.

És most nézzük a kör részeit:
Középpont: A kör azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Ezt az adott pontot hívjuk a kör középpontjának. A kör középpontját általában O-val vagy K-val szokás jelölni.
Körvonal: A körvonal azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra vannak. A körvonalat szokás egyszerűen körként is emlegetni.
Sugár: Egy kör sugara a kör középpontját a körvonal bármely pontjával összekötő szakasz hossza. A kör sugarát r betűvel jelöljük ami a radius szó kezdőbetűje.
Körlap vagy körlemez: A körlap vagy körlemez a körvonal és a körvonalon belüli rész együttes elnevezése. Ezt így egyben szokás egyszerűen csak simán körnek is nevezni. Matematikailag precíz definíciója: azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) legfeljebb egy adott r távolságra (r a kör sugara) vannak.
Húr: Egy körben a körvonal két különböző pontját összekötő szakaszt húrnak nevezzük. Olyankor, amikor a húr éppen átmegy a kör középpontján, a húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.
Átmérő: A kör középpontját áthaladó húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő a kör maximális szélessége, és az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese. Jele d a diameter szó kezdőbetűje alapján.



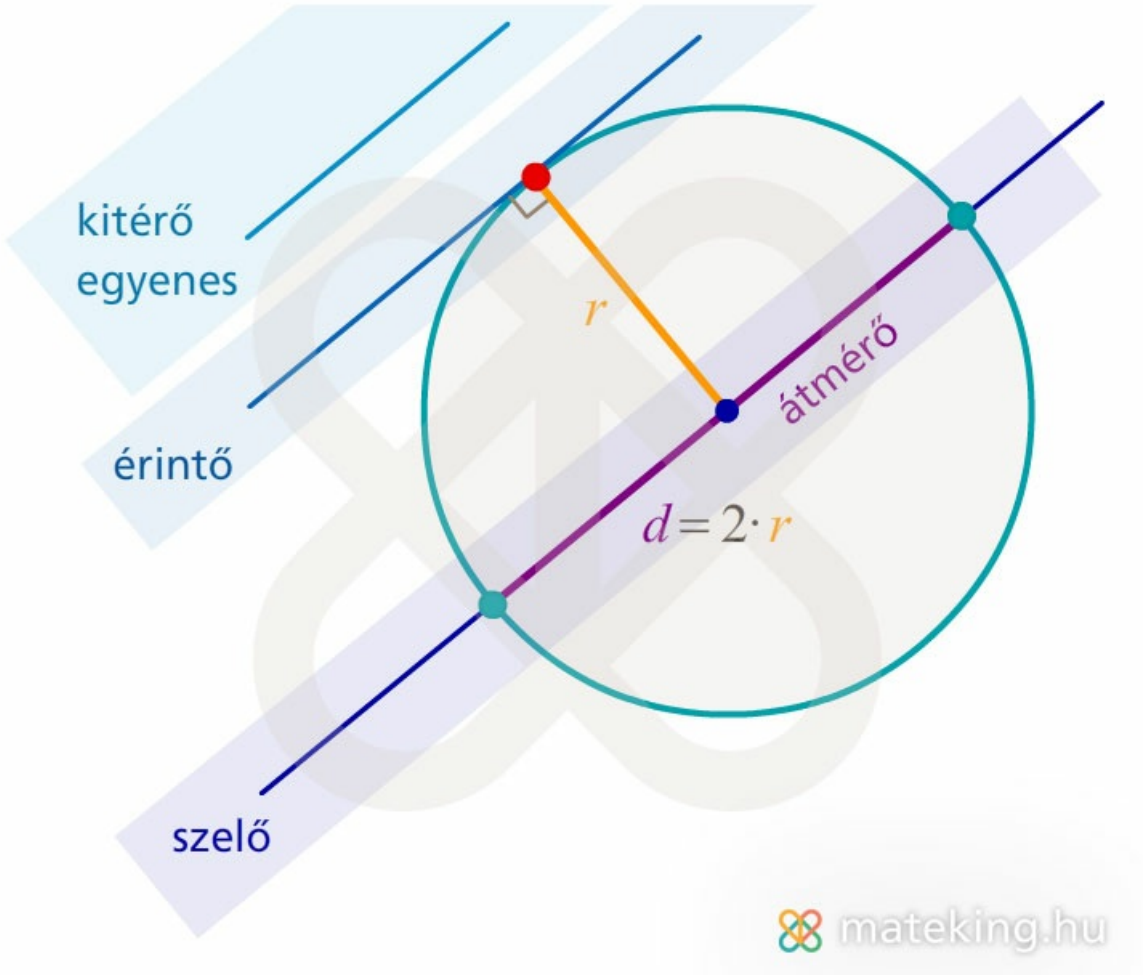
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkban háromféle lehet. Az egyenes vagy metszi a kört vagy érinti, vagy kitérő.

Szelő: Azokat az egyeneseket, amik metszik a kört úgy hívjuk, hogy szelő. A szelők két pontban metszik a kört és a két pont közötti szakasz a húr. Olyankor, amikor a szelő éppen átmegy a kör középpontján, a szelő a kör területét felezi, és ilyenkor a metszéspontok közötti húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.

Érintő: Ha az egyenes éppen olyan távol halad a kör középpontjától, mint a kör sugara, akkor érintőt kapunk. Az érintőnek csak egy közös pontja van a körrel, amit érintési pontnak nevezünk. Az érintési pontba vezető sugár mindig merőleges az érintőre.

Kitérő egyenes: Végül az is lehet, hogy a körnek egyetlen közös pontja sincs a körrel, ilyenkor kitérő egyenesnek nevezzük.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két kör kölcsönös helyzete a síkban már eléggé sokféle lehet. Két fő esetet lehet megkülönböztetni egymástól. Az egyik eset, amikor a két kör sugara nem ugyanakkora, a másik eset pedig az, amikor a két kör sugara ugyanakkora.

Két kör kölcsönös helyzete, ha a körök sugara nem ugyanakkora:
Elkerülő körök: Ha a két kör középpontjának távolsága nagyobb, mint a körök sugarainak összege, akkor a köröknek nincs közös pontjuk.
Kívülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága éppen a sugarak összege, akkor egy közös pontjuk van és ilyenkor a két kör kívülről érinti egymást.

Metsző körök: Ha a körök középpontjainak távolsága kisebb, mint a sugarak összege, de nagyobb, mint a sugarak különbsége, akkor a körök metszik egymást. Ilyenkor a körvonalaiknak két közös pontja van.
Belülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága a két kör sugarának a különbsége, akkor az egyik kör belülről érinti a másikat.
Tartalmazó körök: Ha a két középpont távolsága még ennél is kisebb, de pozitív, akkor az egyik kör tartalmazza a másik kört.
Koncentrikus körök: Végül, ha a két kör középpontjának a távolsága nulla, vagyis a középpontok egybeesnek, akkor azt mondjuk, hogy a körök koncentrikus körök.

Két kör kölcsönös helyzete, ha a körök sugara ugyanakkora:
Elkerülő körök: Ha a két kör középpontjának távolsága nagyobb, mint a körök sugarainak összege, akkor a köröknek nincs közös pontjuk.
Kívülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága éppen a sugarak összege, akkor egy közös pontjuk van és ilyenkor a két kör kívülről érinti egymást.
Metsző körök: Ha a körök középpontjainak távolsága kisebb, mint a sugarak összege, de nagyobb, mint nulla, akkor a körök metszik egymást. Ilyenkor a körvonalaiknak két közös pontja van.

Egybeeső körök: Ha a középpontok távolsága nulla, vagyis a középpontok egybeesnek, akkor azt mondjuk, hogy a körök koncentrikus körök.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az r sugarú kör kerülete:

$$K = 2r \cdot \pi$$

Területe:

$$T = r^2 \cdot \pi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körcikk ívhossza és területe úgy aránylik a kör kerületéhez és területéhez, mint a körcikkhez tartozó középponti szög a 360°-hoz:

$$I_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r \cdot \pi$$

$$T_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Thalész-tétel azt mondja, hogy ha az AB szakasz egy kör átmérője, és C a kör tetszőleges harmadik pontja, akkor az ACB-szög mindig derékszög.

Ezt úgy is szokás mondani, hogy az AB szakasz a körív bármely harmadik C pontjából derékszögben látszik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Pitagorasz-tétel

A derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével, vagyis ha az átfogót c-vel jelöltük:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy háromszög oldalaira teljesül, hogy

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Akkor a háromszög derékszögű.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Pitagoraszi számhármasok olyan számok, amelyekre teljesül a Pitagorasz-tétel.

Pl.: 3, 4 és 5 együtt Pitagoraszi számhármasok, ugyanis $3^2 + 4^2 = 5^2$ igaz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Tükrözések, forgatások, egybevágósági transzformációk

A tengelyes tükrözéshez először is kell egy tengely, amire tükrözünk, ezt t-vel szoktuk jelölni.

Egy pontot úgy kell tükrözni a t tengelyre, hogy a pontból merőlegest állítunk a tengelyre, és a pont tükörképe ezen a merőlegesen lesz, ugyanolyan távol, mint az eredeti pont, csak éppen a tengely másik oldalán.

A tengelyen lévő pontok tükrözésekor nem történik semmi. Ezeket a pontokat fix pontoknak nevezzük.

A tengelyes tükrözés egy egybevágósági transzformáció.

Tulajdonságai:

- távolságtartó
- szögtartó
- körüljárásváltó

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy alakzatot vagy sokszöget tengelyesen szimmetrikusnak nevezünk, ha van olyan tengelyes tükrözés, aminek a hatására a tükörképe önmaga.

Tengelyesen szimmetrikus alakzatok pl.:

Egyenlőszárú háromszög, téglalap, deltoid, rombusz, négyzet, szabályos sokszögek

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A középpontos tükrözéshez először is kell egy középpont, amire tükrözünk, ezt O-val szoktuk jelölni.

Bármelyik pontnak a tükörképe úgy keletkezik, hogy a pontot összekötjük a tükrözés középpontjával, és a tükörkép ezen az összekötő egyenesen lesz. Ugyanolyan távol a középponttól, mint az eredeti pont, csak éppen a középpont másik oldalán.

Ezért aztán a középpontos tükrözés egyetlen fix pontja maga a középpont.

A középpontos tükrözés egy egybevágósági transzformáció.

Tulajdonságai:

- távolságtartó
- szögtartó
- körüljárástartó

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy alakzat vagy sokszög akkor középpontosan szimmetrikus, ha van olyan középpontos tükrözés, aminek hatására a tükörképe önmaga lesz.

Középpontosan szimmetrikus alakzatok pl.:

Paralelogramma, páros oldalú szabályos sokszögek

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A pont körüli forgatáshoz kell egy pont, ami körül forgatunk (O), na és persze egy szög (α).

Mivel két irányba is forgathatnánk, így a szög előjeles. Az óramutató járásával megegyező irányú forgatás negatív, az azzal ellentétes irányú pedig pozitív.

A pont körüli forgatás egy egybevágósági transzformáció.

Tulajdonságai:

- távolságtartó
- szögtartó
- körüljárástartó

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy alakzatot vagy sokszöget forgás-szimmetrikusnak nevezünk, hogyha van olyan O pont, ami körül egy 0 és 360 fok közé eső szöggel elforgatva a sokszöget önmagába tudjuk forgatni.

Példák forgás-szimmetrikus alakzatokra:

Szabályos háromszög, négyzet, szabályos sokszögek

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két alakzat akkor egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, ami az egyiket a másikba viszi.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két háromszög egybevágó, ha

1.) egy oldal és a rajta fekvő két szögük egyenlő.

2.) két oldal és a nem kisebbel szemközti szögük egyenlő.

3.) két oldal és az általuk bezárt szögeik egyenlők.

4.) három oldal páronként egyenlő.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden eltolást egy vektor segítségével adhatunk meg. Ennek a vektornak van egy iránya és egy nagysága.

Az eltolás során az alakzat lényegében ugyanaz marad, csak kicsit arrébb kerül.

Az eltolás egy egybevágósági transzformáció.

Tulajdonságai:

- távolságtartó
- szögtartó
- körüljárástartó

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mértékegységek és mértékegység-átváltás

kilo	1000	kilométer (km)		kilogramm (kg)
hekto	100		hektoliter (hl)	
deka	10			dekagramm (dkg)
nincs prefixum	1	méter (m)	liter (l)	gramm (g)
deci	0,1	deciméter (dm)	deciliter (dl)	
centi	0,01	centiméter (cm)	centiliter (cl)	
milli	0,001	milliméter (mm)	milliliter (ml)	milligramm (mg)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$1\,m = 10\,dm = 100\,cm = 1000\,mm$$

Úgy kapjuk meg ebből a négyzetméter, négyzetdeciméter, négyzetcentiméter és négyzetmilliméter váltószámait, hogy négyzetre emeljük a mértékegységeket és a váltószámokat is:

$$1\,m^2 = 10^2\,dm^2$$

$$1\,m^2 = 100^2\,cm^2$$

$$1\,m^2 = 1000^2\,mm^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$1\,m = 10\,dm = 100\,cm = 1000\,mm$$

Úgy kapjuk meg ebből a köbméter, köbdeciméter, köbcentiméter és köbmilliméter váltószámait, hogy harmadik hatványra emeljük a mértékegységeket és a váltószámokat is:

$$1\,m^3 = 10^3\,dm^3$$

$$1\,m^3 = 100^3\,cm^3$$

$$1\,m^3 = 1000^3\,mm^3$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$1\,l = 1\,dm^3$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1 hét = 7 nap

1 nap = 24 óra

1 óra = 60 perc

1 perc = 60 másodperc

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

Egy szám abszolútértékén a nullától való távolságát értjük.

Precizebben egy x szám abszolútértékén ezt értjük:

$$|x|=\begin{cases} x \text{ ha } 0 \leq x \\ -x \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gyökös azonosságok és gyökös egyenletek

Egy a nem negatív szám négyzetgyöke az a nem negatív szám, aminek a négyzete a.

$$a \geq 0 \qquad \sqrt{a} \geq 0 \qquad \sqrt{a}^2 = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0,\ b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy a szám köbgyöke az a szám, aminek a köbe a.

$$a \in R \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \in R,\ b \in R$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad a \in R,\ b \in R$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökvonás másképpp viselkedik páros, illetve páratlan gyökkitevő esetén, így kétféle definíciónk lesz.

Egy a nem negatív szám $n = 2k$-adik gyöke az a nem negatív szám, amire:

$$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$$

Egy tetszőleges a szám $n = 2k + 1$-edik gyöke az a szám, amire:

$$(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökös egyenletek megoldását mindig ezzel kell kezdeni:

$$\sqrt{\text{IZÉ}} \Rightarrow \text{IZÉ} \geq 0$$

$$\sqrt{\text{IZÉ}} = \text{VALAMI} \Rightarrow \text{VALAMI} \geq 0$$

Ezt követően az elsőszámú célunk, hogy megszabaduljunk a gyökjeltől, amit négyzetreemeléssel végezhetünk. Ilyenkor az a lehető legjobb, ha a gyökös izé magányosan álldogál.

Ha megszabadultunk a gyökjeltől, minden úgy megy tovább, ahogy azt már megszokhattuk az egyenleteknél.

A végén viszont fontos, hogy ellenőriznünk kell, a megoldásunk megfelel-e a feladat elején felírt kritériumnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Középpontos hasonlóság

Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik szögszáron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik szögszáron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A középpontos hasonlósági transzformációhoz adott egy O pont, ez a középpont, és egy λ nem nulla valós szám, ez a hasonlóság aránya.

A tér minden P pontjához egy P' pontot rendel a következőképp:

1. ha $P = O$, akkor $P' = P$.

2. ha $P \neq O$, akkor P' az OP egyenes azon pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$ és ha $\lambda > 0$, akkor P' az OP félegyenesen van, ha $\lambda < 0$, akkor pedig O elválasztja egymástól P-t és P'-t.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két háromszög egymáshoz hasonló, ha...

1.) két szögük egyenlő.

2.) két oldal aránya és a nem kisebbel szemközti szögük egyenlő.

3.) két oldal aránya és az általuk bezárt szögeik egyenlők.

4.) három oldal aránya páronként egyenlő.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszögben az átfogó magasságának talppontja az átfogót két olyan részre bontja, melyeknek a mértani közepe a magasság:

$$m = \sqrt{p \cdot q}$$

vagy

$$m^2 = p \cdot q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög egy befogója mértani közepe az átfogónak és a befogóra eső vetületének.

$$a = \sqrt{c \cdot q} \qquad b = \sqrt{c \cdot p}$$

vagy

$$a^2 = c \cdot q \qquad b^2 = c \cdot p$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy alakzat területe négyzetesen aránylik a méreteihez. Ha a méreteit λ-szeresére változtatjuk, akkor a területe λ^2-szeresére változik.

Egy alakzat térfogata köbösen aránylik a méreteihez. Ha a méreteit λ-szeresére változtatjuk, akkor a térfogata λ^3-szeresére változik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármely háromszögben egy csúcshoz tartozó belső szögfelező a szöggel szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában fogja kettéosztani.

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometria a síkgeometriában

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \frac{a}{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének koszinuszát a következőképp értelmezzük:

$$\cos\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének szinuszát a következőképp értelmezzük:

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének tangensét a következőképp értelmezzük:

$$\tan\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körszelet területét úgy kapjuk, hogy először kiszámoljuk, hogy mekkora területű a körcikk, aztán pedig kivonjuk belőle az ebbe beleeső egyenlőszárú háromszög területét:

$$T_{\text{sz}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sin alpha}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kombinatorika

Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli permutációján az n különböző elem egy sorba rendezését értjük.

n darab különböző elem permutációinak száma:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

n faktoriálisán az n-nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész számok szorzatát értjük.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

pl.:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$1! = 1$$

Továbbá definíció szerint $0! = 1$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.

n darab különböző elemből kiválasztott k darab elem variációinak száma:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

n darab különböző elem közül kiválasztott k darab elem kombinációinak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n elem között van $k_1, k_2, \ldots, k_r$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését ismétléses permutációnak nevezzük.

n elem közötti $k_1, k_2, \ldots, k_r$ egymással megegyező ismétléses permutációinak száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha kör alakban helyezünk el n különböző elemet és azok sorrendjét vizsgáljuk, akkor ciklikus permutációról beszélünk.

n darab különböző elem ciklikus permutációinak száma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek

Hatványozás azonosságai:

$a^n a^k = a^{n+k}$

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(a^n)^k = a^{nk} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális függvénynek nevezzük az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket, ahol $a > 0$ valós szám.

Az exponenciális függvények meglehetősen fontosak a matematikában, sőt nem csak a matematikában.

Ilyen függvények írják le a baktériumok szaporodását, a radioaktív elemek bomlását, a számítógépek teljesítményének növekedését és még rengeteg más dolgot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális egyenletek megoldásának kulcsa, hogy a két oldalt azonos hatványalapra hozzuk, mert ekkor

$a^x = a^b \Rightarrow x = b$

Így hát az egyenlet két oldalát addig alakítgatjuk a hatványozás azonosságainak segítségével, amíg erre az alakra nem jutunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenlőtlenséget ugyanúgy kell mint az egyenletet, amire figyelni kell csupán az az, hogy amikor elhagyjuk a hatványalapot, nem mindegy, hogy az 1-nél nagyobb, vagy kisebb szám-e.

Ha az alap 1-nél nagyobb szám, akkor nem történik semmi, az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megmarad.

Ha viszont az alap 1-nél kisebb szám, akkor az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Logaritmus, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

$log_a x$ azt mondja meg, hogy a-t hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy x-et kapjunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x^k} = \frac{k}{n} \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logaritmikus egyenletek megoldásának lényege, hogy ilyen alakra jussunk:

$$log_a x = b$$

Mert innen a logaritmus definíciója miatt az következik, hogy

$$x = a^b$$

Ahhoz, hogy a bonyolúltabb egyenleteket is ilyen alakra hozzuk, a logaritmus azonosságait használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Százalékszámítás

A százalékalap az a szám, amihez a százalékszámítás során viszonyítunk. Ez jelenti mindig a 100%-ot. Ha például egy osztályba 20 gyerek jár és közülük 8 lány, 12 fiú, akkor a 20 gyerek lesz a 100%, aminek valahány százaléka lány és valahány százaléka fiú.

A százalékszámítás lényege, hogy

Százalékalap • Százalékláb = Százalékérték

A példánkban a 20 fős ösztály 40%-a lány, vagyis:

20 • 40% = 8

A százaléklábat, vagyis a 16%-ot pedig a számolás közben úgy kell kezelni, mint századrész, tehát 40%=0,4.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékláb a százalékszámításos feladatban a százalék. Ennyi százalékát kell kiszámítani a százalékalapnak.

A százalékszámítás lényege, hogy

Százalékalap • Százalékláb = Százalékérték

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékérték a százalékalap és a százalékláb szorzata, tehát a végeredmény.

A százalékszámítás lényege, hogy

Százalékalap • Százalékláb = Százalékérték

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékszámítás lényeg nagyon röviden annyi, hogy a százalék valójában azt jelenti, hogy századrész. Például valaminek a 16%-a:

$\frac{16}{100} = 16\%$

Hogyha mondjuk egy osztályba 25-en járnak és közülük 16% lány, akkor az mindössze ezt jelenti, hogy

$25 \cdot \frac{16}{100} =$ Lányok száma

Ezt már nagyon egyszerű kiszámolni, és az jön ki, hogy 4, vagyis a 25-nek a 16%-a 4.

Itt a 25 a százalékalap, a 16% pedig a százalékláb és az eredményül kapott 4 pedig a százalékérték. De igazából nem is az a lényeg, hogy melyiket hogyan hívjuk, hanem az, hogy ilyen egyszerűen tudunk a százalékokkal számolni.

A százalékszmítás feladatok rendszerint úgy működnek, hogy a három szereplőből, vagyis a százalékalapból, a százaléklábból és a százalékértékből kettőt ismerünk és a harmadikat ki kell számolni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékalap a százalérték és a százalékláb hányadosa.

Százalékalap $= \frac{\text{Százalékérték}}{\text{Százalékláb}}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékláb a százalékérték és a százalékalap hányadosa.

Százalékláb $= \frac{\text{Százalékérték}}{\text{Százalékalap}}$

Érdemes megjegyezni, hogy a százalékalap, amivel osztani kell mindig nak/nek birtokos jelzővel van ellátva a feladatokban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha valaminek az értékét 20%-kal csökkentjük, akkor $100\% - 20\% = 80\% = \frac{80}{100} = 0,8$-cal kell szorozni.

Ha valaminek az értékét 20%-kal növeljük, akkor $100\% + 20\% = 120\% = \frac{120}{100} = 1,2$-vel kell szorozni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kamatos kamat és pénzügyi számítások

A kamatos kamat lényege, hogy beteszünk a bankba egy összeget, amit tőkének neveznek és T_0-lal jelölünk. Erre egy bizonyos időszak alatt p%-os kamatot kapunk. Eddig ezt úgy hívjuk, hogy egyszerű kamat. Attól lesz belőle kamatos kamat, hogy a kamattal megnövelt összeget újra kamatoztatjuk, és így elindul a kamatos kamat folyamata. Magának a kamatos kamatnak a képlete nagyon egyszerű, csupán néhány dologra kell figyelni, amiket részletesen be is mutatunk a kamatos kamat feladatok megoldása közben.

A T_0 összegből n darab kamatperiódus után a következő T_n összeg lesz, ha minden periódusban p-os a kamat:

$$T_n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

A képletben p jelenti a kamatot és n pedig a kamatperiódusok számát. Ezek azok a periódusok, amiknek a végén jóváírják a kamatot. Hogyha a kamatot havonta írják jóvá, akkor a periódusok hónapok, és n a hónapok száma. Hogyha féléves jóváírás van, akkor n a félévek száma, hogyha évente írják jóvá a kamatot akkor n az évek száma és így tovább. Vannak mindenféle bonyolult képletek, amik ezt megpróbálják kezelni, de kár foglalkozni velük, sokkal egyszerűbb megérteni a dolog lényegét és a sima kamatos kamat képletet használn. Mindig azt a kérdést tegyük föl magunknak, hogy milyen gyakorisággal írják jóvá a kamatot, hány jóváírás van és egy periódusra mekkora kamat jut.

Ha például az éves kamat 6% és évenkénti a kamatozás, akkor $p = 6$. Ha a jóváírás félévente történik, akkor a 6%-os éves kamatot is felezzük, tehát $p = 3$, vagy éppen havi jóváírás esetén az éves kamatot 12-vel kell osztani és így $p = 0,5$. Ha ezt a gondolatmenetet megértjük, a kamatos kamat képlete őrülten egyszerű.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

T összeget n darab perióduson keresztül azonos méretű pénzösszegekben törlesztünk. Minden periódusban p%-os a kamat. Az egy periódusra eső törlesztőrészlet:

$$a = T \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

n darab perióduson keresztül azonos méretű a pénzösszegeket fizetünk be, periódusonkénti p%-os kamat mellett. Az n periódus végén összegyűlt pénzmennyiség:

$$S_n = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Számtani és mértani sorozatok

Azokat a sorozatokat, ahol minden tag pontosan ugyanannyival nagyobb az előző tagnál,számtani sorozatnak nevezzük.

A sorozat differenciája az a szám, amennyivel mindegyik tag nagyobb az előzőnél.

A sorozat első elemét a_1-gyel, a differenciát d-vel jelöljük.

A számtani sorozat n-edik tagját így tudjuk kiszámolni:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Az első n tagjának összegét pedig így:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

A számtani sorozatok tehát olyan legalább három számból álló számsorozatok ahol az egymással szomszédos tagok (egy tag, és az őt megelőző tag) különbsége állandó. Ezt az állandót, amely minden sorozatnál más és más, a sorozat különbségének, vagy másként differenciájának nevezzük, és d-vel jelöljük. A számtani sorozat elnevezés onnan ered, hogy a sorozatnak bármely három egymást követő tagjára igaz, hogy a három szám közül a középső a két másik számnak a számtani közepe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mértani sorozatnak nevezzük azokat a legalább három tagból álló sorozatokat, ahol bármely két egymást követő tag (egy tag és az őt megelőző tag) hányadosa állandó. Ezt a hányadost kvóciensnek nevezzük és q-val jelöljük. Egy kicsit egyszerűbben megfogalmazva egy sorozat akkor mértani sorozat, ha minden tagja pontosan q-szor annyi, mint az előző tag, ahol q egy tetszőleges nem nulla szám, és ezt hívjuk a sorozat hányadosának, vagy másként kvóciensének.

Vagyis a sorozat kvóciense vagy hányadosa az a szám, ahányszor mindegyik tag nagyobb az előzőnél.

A sorozat első elemét a_1-gyel, a kvóciensét vagy hányadosát q-val jelöljük.

A mértani sorozat n-edik tagját így tudjuk kiszámolni:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Az első n tagjának összegét pedig így:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Olyankor, amikor $q = 1$ ez az összegképlet nem működik. Ilyenkor a sorozat minden tagja az előző tag egyszerese, ami azt jelenti, hogy a sorozatnak minden tagja ugyanannyi. Ekkor az összegképlet így néz ki: $S_n = a_1 \cdot n$

A mértani sorozat elnevezés onnan ered, hogy a nem negatív tagú mértani sorozatokra igaz, hogy bármely három egymást követő tagja közül a középső tag a másik két tag mértani közepe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek

Azt a kört a koordinátarendszerben, aminek középpontja az origo és a sugara 1, egységkörnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad -\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának x koordinátáját nevezzük az α szög koszinuszának, és így jelöljük: $\cos\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának y koordinátáját nevezzük az α szög szinuszának, és így jelöljük: $\sin\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy α szög tangense az α szög szinuszának és koszinuszának hányadosával egyenlő:

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad k \in Z$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények periodikusak, ez azt jelenti, hogy bizonyos időközönként megismétlik önmagukat. Ezt az időközt periódusnak nevezzük és az ő esetükben a periódus 2π.

Ha van egy ilyen egyenlet, hogy

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

akkor ennek a periodikussága miatt végtelen sok megoldása van, ezért írjuk oda a megoldások mögé, hogy$+2k\pi$.

További nehézség, hogy két megoldás is van, az egyiket a számológépünk adja, a másikat pedig...

Szinusz esetén úgy, hogy a két megoldás összegénekπ-nek kell lennie.

Koszinusz esetén pedig úgy, hogy a két megoldás mindig egymás minuszegyszerese.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus függvényeknek vagy szögfüggvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek tartalmaznak trigonometrikus kifejezéseket, mint például szinusz, koszinusz vagy tangens. Ezek eredetileg egy derékszögű háromszög egy szöge és két oldala hányadosa közti összefüggéseket írja le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szinusztétel és koszinusztétel

Bármely háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával. De ne ezt jegyezzük meg. A szinusztétel ennél sokkal többet is tud. Mégpedig ezt, ahol R a háromszög köré írható körének a sugara:

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Koszinusz tétel minden háromszögben felírható:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Feladatok függvényekkel

Ha a másodfokú függvény hozzárendelési szabálya: $f_i = a_i \cdot x^2 + b_i$, akkor itt az a_i-t főegyütthatónak hívjuk és eléggé lényeges dolgok függnek tőle.

Hogyha a negatív, akkor a függvény grafikonja egy lefelé nyíló parabola, ha pozitív, akkor felfelé nyíló. És minél nagyobb az a szám, a parabola annál keskenyebb.

A b az annyit tud, hogy hol metszi a függvény grafikonja az y tengelyt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus függvényeknek vagy szögfüggvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek tartalmaznak trigonometrikus kifejezéseket, mint például szinusz, koszinusz vagy tangens. Ezek eredetileg egy derékszögű háromszög egy szöge és két oldala hányadosa közti összefüggéseket írja le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektorok

A vektor egy irányított szakasz.

Jelölése: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$

A két vektor összege:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

A két vektor különbsége:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ vektor hossza:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza:

$$\overrightarrow{AB} = |\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

És pont ugyanígy kapjuk meg az A és B pontok távolságát is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két pont közti vektor a végpontba mutató helyvektor minusz a kezdőpontba mutató helyvektor.

Tehát $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Koordinátageometria

A normálvektor az egyenesre merőleges nem nullvektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az irányvektor az egyenessel párhuzamos nem nullvektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{n}(A,B)$ normálvektorú és a $P(x_0,y_0)$ ponton átmenő e egyenes egyenlete:

$$e: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$C(u,v)$ középpontú és r sugarú kör egyenlete:

$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy P pontnak az $\underline{n}(A,B)$ normálvektorú e egyenestől mért távolsága:

$$d(P,e)=\left|\frac{e(P)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Itt $e(P)$ azt jelenti, hogy a P pont koordinátáit behelyettesítjük az e egyenes egyenletébe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Térgeometria

Vegyünk egy síkbeli sokszöget és a sík felett egy pontot. Ha a pontot összekötjük a síkbeli alakzat csúcsaival, akkor egy térbeli alakzatot kapunk, amit úgy hívunk, hogy gúla.

A gúla felszíne:

$$A = T + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3}$$

ahol m a gúla magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kúp egy gúlaszerű térbeli test, melynek alapja egy kör.

A kúp felszíne:

$$A = T + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3}$$

ahol m a kúp magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hasáb egy olyan test, amelynek két párhuzamos lapja egymással egybevágó sokszög, a többi lapja pedig paralelogramma.

A hasábok felszíne:

$$A = 2T + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = T \cdot m$$

ahol m a hasáb magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kocka térfogata:

$$V = a^3$$

ahol a az oldalélének hosszát jelenti.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kocka felszíne:

$$A = 6a^2$$

ahol a a kocka élének hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A henger olyan, mint a hasáb, csak nem sokszög a két párhuzamos lap, hanem kör.

A hengerek felszíne:

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot m$$

Térfogata:

$$V = r^2\pi \cdot m$$

ahol m a henger magassága, r az alapkörének sugara.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hasábok térfogatát a következőképp számolhatjuk ki:

$$V = T \cdot m$$

ahol m a hasáb magassága, T pedig az alaplap területe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hasábok felszínéta következőképp számolhatjuk ki:

$$A = 2T + \text{palást területe}$$

ahol T az alaplap (vagy fedőlap) területe, a palást területe pedig az oldallapok területeinek összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$V = r^2\pi \cdot m$$

ahol m a henger magassága, r az alapkörének sugara.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot m$$

ahol r az alapkör sugara, m a henger magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gúlák térfogatát a következőképp számolhatjuk ki:

$$V = \frac{T \cdot m}{3}$$

ahol m a gúla magassága, T pedig az alaplap területe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$A = T + \text{palást területe}$$

ahol T az alaplap területe

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$V = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3}$$

ahol r az alapkör sugara, m a kúp magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$A = r^2 \pi + a \cdot r \cdot \pi$$

ahol r az alapkör sugara, a az alkotó.

Továbbá $a^2 = r^2 + m^2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetalapú gúla térfogata könnyebben kiszámolható így:

$$V = \frac{a^2 \cdot m}{3}$$

ahol a a gúla alapélének hossza, m a gúla magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetalapú gúla felszíne könnyebben kiszámolható így:

$$A = a^2 + 2 \cdot \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot a$$

ahol a a gúla alapélének hossza, m a gúla magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gömb egy adott ponttól (középpont) egyenlő távolságra lévő pontok halmaza.

A gömb felszíne:

$$A = 4r^2\pi$$

Térfogata pedig:

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

ahol r a gömb sugara.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gömb térfogata:

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

ahol r a gömb sugara.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gömb felszíne:

$$A = 4r^2\pi$$

ahol r a gömb sugara.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a gömböt kettévágjuk egy olyan síkkal, ami épp átmegy a középpontján, akkor a vágás során keletkező kör sugara éppen megegyezik a gömb sugarával. Ezt a kört nevezzük főkörnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a gömb középpontját összekötjük a gömbfelület bármelyik pontjával, akkor az így keletkező szakasz hossza állandó, és ez az állandó hosszúság a gömb sugara.

A sugarat r-el jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a gömb középpontját összekötjük a gömbfelület bármelyik pontjával, akkor az így keletkező szakasz hossza állandó, és ez az állandó hosszúság a gömb sugara. Ha meghosszabbítjuk ezt a szakaszt a másik irányba is, akkor egy átmérőt kapunk

Az átmérő jele d, és mindig sugár kétszerese.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy forgáskúpot az alaplap síkjával párhuzamosan metszünk el, akkor egy csonkakúpot kapunk.

A csonkakúp felszíne:

$$A = T + t + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = \frac{\left(R^2\pi + R \cdot r \cdot \pi + r^2\pi\right) \cdot m}{3}$$

ahol R az alapkör, r a fedőkör sugara, m pedig a csonkakúp magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$V = \frac{\left(R^2\pi + R \cdot r \cdot \pi + r^2\pi\right) \cdot m}{3}$$

ahol R az alapkör, r a fedőkör sugara, m pedig a csonkakúp magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$A = T + t + \text{palást területe}$$

ahol T az alaplap, t pedig a fedőlap területe, a palást területe pedig az oldallapok területeinek összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy gúlát az alaplap síkjával párhuzamosan metszünk el, akkor egy csonkagúlát kapunk.

A csonkagúla felszíne:

$$A = T + t + \text{palást területe}$$

Térfogata:

$$V = \frac{\left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) \cdot m}{3}$$

ahol T az alaplap, t a fedőlap területe, m pedig a csonkagúla magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$V = \frac{\left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) \cdot m}{3}$$

ahol T az alaplap, t a fedőlap területe, m pedig a csonkagúla magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$A = T + t + \text{palást területe}$$

ahol T az alaplap, t a fedőlap területe, a palást területe pedig az oldallapok területeinek összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A négyzet alapú csonkagúla térfogata egyszerűbben is kiszámolható így:

$$V = \frac{\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)\cdot m}{3}$$

Ahol a az alaplap oldalélének, b a fedőlap oldalének hossza, m pedig a csonkagúla magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A csonkagúla felszíne könnyebben kiszámolható, ha négyzetalapú:

$$A = a^2 + b^2 + 2 \cdot (a + b) \cdot h$$

ahol a az alaplap oldalélének, b a fedőlap oldalélének hossza, h pedig az oldallap (trapéz) magassága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Statisztika

Az adatsor legyakoribb értéke a módusz. Hogyha például Bob matekjegyei ezek:

2, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 2, 4

Akkor egyszerűen meg kell számolni, hogy melyikből van a legtöbb, és az a matekjegy lesz amódusz. Most 2-esből van a legtöbb, így Bob matekjegyeinek a módusza 2. A módusz jele Mo és így most Mo=2.

Léteznek olyan eloszlások is, amelyeknek több módusza van. Hogyha például Bob jegyei:

1, 2, 2, 3, 5, 3, 3, 4, 2

Itt 2-esből és 3-asból ugyanannyi van, mindkettőből 3 darab. Ez egy kétmóduszúeloszlás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A medián a növekvő sorba rendezett adatsor középső értéke. Ha az adatsorban páros sok elem van, akkor nincs középső elem, ilyenkor a két középső elem átlagát vesszük.

Hogyha például Bob matekjegyei ezek:

2, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 2, 4

Akkor egyszerűen növekvő sorba kell rakni..

1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

És aztán meg kell keresni melyik a középső. Most nincsen középső, mert páros sok elem van, így ilyenkor a két középen lévőt átlagoljuk:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, **2**, **3**, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

Ezeknek az átlaga 2,5 vagyis a medián most 2,5. A medián jele Me, így Me=2,5

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az átlagot úgy kapjuk meg, hogy az összes elemet összeadjuk, és aztán elosztjuk az elemek számával.

Jele: $\overline{x}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az átlagtól való átlagos eltérés egyik legjobb mérőszáma a szórás. Hátránya, hogy egy kicsit ronda a szórás képlete. A szórást egy szigma nevű görög betűvel jelöljük.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az adatsor első felének a felezőpontja az alsó kvartilis.

Az alsó kvartilis jele: Q_1

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az adatsor második felének a felezőpontja a felső kvartilis.

A felső kvartilis jele: Q_3

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kvartilisek és a medián azt szemlélteti, hogyan oszlanak el az adatsorban szereplő adatok. Ezek segítségével készíthető el a doboz-ábra, vagy másnéven dobozdiagram. Szokás még sodrófa diagramnak is nevezni, és az angol elnevezést is gyakran használják, ami a box plot.

Egy sobarendezett adatsorban öt darab speciális negyedelőpontot fogunk használni. Az első az adatsor legkisebb értéke, ez a Q_0 . Aztán a következő negyedelő az alsó kvartilis, ami Q_1 utána jön a felezőpont vagyis a medián, ezt Me-vel és Q_2-vel is jelöljük, végül a felső kvartilis, ami a Q_3. Az adatsor legnagyobb értéke pedig Q_4. A legnagyobb és a legkisebb érték különbsége a terjedelem, míg a két kvartilis különbségét félterjedelemnek vagy más néven interkvartilisnek hívjuk. Ezekből épül föl a doboz-ábra vagy másként dobozdiagram.

Előfordulhat, hogy az adatsorban kiugró értékek is szerepelnek. A kiugró érték az, ami az alsó kvartilisnál legalább a félterjedelem másfélszeresénél kisebb, vagy pedig a felső kvartilisnél legalább a félterjedelem másfélszeresénél nagyobb. Huh, ez elég bonyolultan hangzik. De valójában nagyon egyszerű, csak nézd meg kapcsolódó epizódot és kiderül.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A relatív szórás azt mondja meg, hogy a szórás az átlagnak hány százaléka:

$$V = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Valószínűségszámítás

Eseményeknek nevezzük a valószínűségi kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.

Megkülönböztetünk elemi eseményeket, ilyen például, hogy egy dobókockával 1-est dobunk. Vannak azonban olyan események is amik több elemi eseményből épülnek fel, ilyen például az, hogy párosat dobunk.

Az eseményeket az ABC nagybetűivel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az esemény valószínűségét úgy kaphatjuk meg, hogy megszámoljuk hány elemi eseményből áll és ezt elosztjuk az összes elemi esemény számával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ezt a képletet hívjuk binomiális eloszlásnak:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Visszatevéses mintavételről beszélünk, ha egy p valószínűségű elem többszöri kihúzásának esélyét vizsgáljuk úgy, hogy ha kihúzunk egy ilyen elemet, akkor ezt követően azt visszarakjuk.

Például ha azt vizsgáljuk, hogy egy kosárban van 8 piros és 5 kék golyó, és mennyi a valószínűsége, hogy háromszor húzva két piros és egy kék golyót húznánk úgy, hogy a kihúzott golyókat mindig visszatesszük, akkor az egy visszatevéses mintavétel.

A visszatevées mintavételhez kapcsolódó eloszlás a binomiális eloszlás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A visszatevés nélküli mintavétel tipikus példája, hogy van egy doboz, benne N darab elem. Közülük K darab valamilyen tulajdonságú, az egyszerűség kedvéért hívjuk selejtesnek. Mondjuk sárga vagy szép vagy ronda. Kihúzunk n darab elemet, és ez a képlet meg fogja nekünk mondani, hogy mekkora az esélye, hogy közülük k darab a vizsgált tulajdonságú:

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

De vannak olyan esetek, amikor a visszatevés nélküli mintavételnél másik képletet kell használnunk. Ezt a másik képletet binomiális eloszlásnak nevezzük, és olyankor használjuk, amikor a selejtek száma helyett csak a selejtek arányát ismerjük.

Ez a binomiális eloszlás képlete:

$$P=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

ahol n a kísérletek száma,

k a sikeres kísérletek száma,

p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége.

És, hogy mi alapján döntjük el, hogy a két képlet közül melyiket kell használni? A dolog nagyon logikus, nézd meg a kapcsolódó epizódot és minden világos lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hipergeometriai eloszlás a visszatevés nélküli mintavételhez kapcsolódó eloszlás, képlete pedig:

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény biztosan bekövetkezik:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B eseményt egymástól függetlennek nevezzük, ha teljesül rájuk, hogy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B eseményt kizárónak nevezünk, ha

$$A \cap B = \emptyset$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Geometriai valószínűség

Ha egy esemény előfordulását geometriai alakzat (vonal, síkidom, test) mértékével jellemezzük, akkor geometriai valószínűségről beszélünk.

Ilyenkor a szokásos $P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ lehet mondjuk $P = \frac{T_{kedvező}}{T_{összes}}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A várható érték

A várható érték jele $E(X)$ és ez nem más, mint egy esemény összes kimenetelének valószínűségekkel súlyozott átlaga.

A képlete:

$$E(X) = X_1 \cdot p_1 + X_2 \cdot p_2 + X_3 \cdot p_3 + \cdots + X_n \cdot p_n = \sum X_i P(X_i),$$

ahol X_i az i-edik kimenetel, p_i pedig annak bekövetkezésének valószínűsége.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parabola (emelt szint)

A parabola azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy v egyenestől (vezéregyenes) és az egyenesre nem illeszkedő F ponttól (fókuszpont) egyenlő távolságra vannak.

A fókusz és a vezéregyenes távolságát hívjuk a parabola paraméterének.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parabola azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy v egyenestől (vezéregyenes) és az egyenesre nem illeszkedő F ponttól (fókuszpont) egyenlő távolságra vannak. A fókusz és a vezéregyenes távolságát hívjuk a parabola paraméterének. A fókuszból a vezéregyenesre bocsátott merőleges felezőpontja a parabola "csúcspontja" amit tegelypontnak szokás nevezni.

A $T(u,v)$ tengelypontú és p paraméterű parabola egyenlete:

$$y=\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parabola egyenlete, ha p a paramétere...

és tengelye az y tengely:

$$y=\frac{1}{2p}x^2 \qquad y=-\frac{1}{2p}x^2$$

és tengelye az x tengely:

$$x=\frac{1}{2p}y^2 \qquad x=-\frac{1}{2p}y^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A teljes indukció (emelt szint)

A teljes indukció olyan állítások bizonyítására alkalmas, melyek n pozitív egész számtól függenek.

A teljes indukciós bizonyítás lépései:

1. lépés: Igazoljuk, hogy az állítás $n = 1$ esetén vagy az első néhány n-re igaz.

2. lépés: Igazoljuk, hogy ha az állítás n-re igaz, akkor $n + 1$ esetén is igaz.

Ezzel az állítást minden n pozitív egész számra belátjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése (emelt szint)

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy

$|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat divergens, és határértéke plusz végtelen, ha bármely $M > 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M < a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat divergens, és határértéke minusz végtelen, ha bármely $M < 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M > a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat oszcillálva divergens, ha nincs semmilyen határértéke, vagysi sem egy valós számhoz, sem plusz vagy minusz végtelenbe nem tart.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorozatok határértéke (emelt szint)

$\frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \frac{1}{n^3} \to 0 \quad \frac{1}{n^k} \to 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$n \to \infty \quad n^2 \to \infty \quad n^3 \to \infty \quad n^k \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{n} \to \infty \quad \sqrt[3]{n} \to \infty \quad \sqrt[4]{n} \to \infty \quad \sqrt[k]{n} \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$q^n \to \begin{cases} \infty \text{ ha } q > 1 \\ 0 \text{ ha } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ ha } q = 1 \\ \text{div ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van egy olyan valós szám, ami a sorozat határértéke.

Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens.

Egy sorozat lehet azért is divergens, mert végtelenbe tart, és lehet azért is, mert az égvilágon nem tart sehova. A sehova nem tartó sorozatok mindig oszcilláló sorozatok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorozatok monotonitása és korlátossága (emelt szint)

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy

$|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat divergens, és határértéke plusz végtelen, ha bármely $M > 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M < a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat divergens, és határértéke minusz végtelen, ha bármely $M < 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M > a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat oszcillálva divergens, ha nincs semmilyen határértéke, vagysi sem egy valós számhoz, sem plusz vagy minusz végtelenbe nem tart.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat szigorúan monoton nő, ha $0 < a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat szigorúan monoton csökken, ha $0 > a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton nő, ha $0 \leq a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton csökken, ha $0 \geq a_{n+1} - a_n$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények határértéke és folytonossága (emelt szint)

Az $f(x)$ függvény folytonos az a-ban, ha értelmezve van az a-ban, létezik és véges a határértéke az a-ban, és ami a lényeg:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a-ban, ha létezik véges határértéke az a-ban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{\text{IZÉ} \to 0} \frac{\sin \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{\text{IZÉ} \to 0} \frac{1-\cos \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}^2} = \frac{1}{2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás (emelt szint)

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$(c)'=0 \quad (x^n)'=nx^{n-1} \quad (e^x)'=e^x \quad (a^x)'=a^x\ln a$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \quad (\log_a x)'=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} \quad (\sin x)'=\cos x \quad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

f és g deriválható függvények, és c valós szám esetén a deriválási szabályok:

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

A deriválási szabályok megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a trötek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorlni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvényvizsgálat, szélsőérték feladatok (emelt szint)

Az elaszticitás képlete:

$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

Egy függvény elaszticitása azt mondja meg, hogyha 1%-kal növeljük az x-et, akkor hány százalékkal változik a függvény értéke.

$E = 0$ Teljesen rugalmatlan

$|E| < 1$ Rugalmatlan

$|E| = 1$ Egységnyi rugalmasságú

$|E| > 1$ Rugalmas

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények érintője (emelt szint)

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az integrálás (emelt szint)

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$-et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \ln|ax+b| \frac{1}{a} + c$

$\int e^{ax+b} \, dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$

$\int A^{ax+b} \, dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$

$\int \cos(ax+b) \, dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \sin(ax+b) \, dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \, dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \, dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$

$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} \, dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor aNewton Leibniz formula szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$\int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} \, dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d} \, dx =$

$= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d} \, dx = \frac{a}{c}x + E \ln|cx+d| \frac{1}{c}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot