



MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MÉRNÖKI MATEMATIKA MATE tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 09. 09.

Tartalomjegyzék

Kettős és hármas integrál, térfogati integrál.....	2
Paraméteres görbék.....	4
Vektormezők, görbementi és felületi integrálok.....	7
Divergencia és rotáció.....	8
Differenciálegyenletek.....	11
Izoklinák.....	15
Laplace transzformáció.....	16
Fourier sorok.....	18
Fourier-transzformáció.....	19
Határozatlan integrálás, primitív függvény.....	22
Határozott integrálás.....	26
Síkbeli és térbeli leképezések és mátrixaik.....	27

Kettős és hármas integrál, térfogati integrál

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az x szerinti határokat adjuk meg és utána az y szerintit vagy fordítva.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A polárkoordinátás helyettesítés egy olyan helyettesítés, ami remekül alkalmazkodik a kör tulajdonságaihoz. A dolog lényege, hogy a körben a hagyományos x és y koordináták helyett új koordinátákat vezetünk be.

Az egyik azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk a kör középpontjától és ezt r -nek nevezzük.

A másik pedig egy forgásszög, és jele θ .

Az új koordinátákat polárkoordinátáknak nevezzük, a módszert pedig polárkoordinátás helyettesítésnek. A kapcsolat a régi és az új koordináták között a következő:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

A polárkoordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek. A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int \int_D f(x, y) \, dy dx = \int \int_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A henger-koordináták:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

A henger-koordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek.

A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr d\theta dz$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A polárkoordináták háromdimenziós változatát gömbi koordinátáknak nevezzük.

Az r azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk az origótól, a φ és θ pedig két forgás-szög.

A régi x, y, z és az új [gömbi koordináták](#) közti kapcsolat:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \varphi$$

A gömb koordinátás helyettesítés:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_D f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Paraméteres görbék

A ciklois egyenlete:

$$x = R(-\sin u + u) \quad y = R(-\cos u + 1)$$

$$u = \frac{4}{R}t$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A paraméteres görbe egyenlete a görbén mozgó pont pillanatnyi koordinátáit írja le.

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

A paraméteres görbe deriválásával kapjuk a $v(t)$ sebességvektort, ami minden időpillanatban megadja a görbén mozgó P pont sebességének irányát és nagyságát:

$$v(t) = (x'(t), y'(t)) \quad |v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A görbe ívhossza a t_0 és t_1 időpillanatokhoz tartozó pontok között:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $r(t)$ paraméteres görbe első deriváltja a görbe érintővektora vagy más néven sebességvektora.

Hogyha ezt elosztjuk a saját hosszával, akkor egy egységnyi hosszú vektort kapunk, amit $\underline{T}$ -vel jelölünk.

$$\underline{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $r(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a görbe gyorsulásvektora. Ha ezt elosztjuk a saját hosszával:

$$\underline{N}(t) = \frac{r''(t)}{|r''(t)|}$$

Az így keletkező egységnyi hosszú vektor a görbe főnormálisvektora.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Binormálisvektornak nevezzük a görbe sebességvektorával és gyorsulásvektorával alkotott szorzatot:

$$\underline{B}(t) = \underline{T}(t) \times \underline{N}(t)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{T}(t)$, $\underline{N}(t)$ és $\underline{B}(t)$ [vektorok](#) együttes elnevezése kísérő triéder.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{r}(t)$ paraméteres görbe második deriváltja a gyorsulást írja le. Ezek a [vektorok](#) egy síkot feszítenek ki, ezt a síkot a görbe simulósíkjának nevezzük. A simulósík normálvektora éppen $\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)$.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A görbület azt írja le, hogy a simulósíkon belül milyen erősen kanyarodik a görbe. A térgörbék azonban nem csak a simulósíkon belül kanyarodnak, hanem közben ki is csavarodnak abból. Azt, hogy egy térgörbe éppen milyen ütemben csavarodik ki a simulósíkjából, a torzió írja le.

Hogyha egy görbe minden pontjában nulla a torzió, az annak a jele, hogy ez a görbe egy síkgörbe. Egy görbe akkor tud kilépni a simulósíkjából, ha a torzió legalább egy pontban nem nulla. Vagyis olyankor, ha a görbe elmozdul a binormális vektor irányában is. A torzió kiszámításához szükségünk van a görbe harmadik deriváltjára:

$$\tau = \frac{(\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)) \cdot \underline{r}'''(t)}{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|^2} = \frac{\det \begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{bmatrix}}{\left| \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix} \right|^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$ paraméteres görbe görbülete:

$$\kappa = \frac{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|}{|\underline{r}'(t)|^3} = \frac{|x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}^3}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hogyha a görbének egy P pontjában létezik nem nulla görbülete, akkor azt a kört, amel a P -ben érinti a görbét és a görbülete megegyezik a görbe P -beli görbületével és a középpontja a görbe konkáv részében található, a görbe P pontbeli simulókörének nevezzük.

A simulókör sugarát a görög ró betűvel jelöljük, és

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A simulókörok középpontjai által kirajzolt alakzatot evolutának hívjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az ellipszis fél-nagy tengelyének hossza a , fél-kis tengelyének hossza b , akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a hiperbola fél-nagy tengelyének hossza a , fél-kis tengelyének hossza b , akkor egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Vektormezők, görbementi és felületi integrálok

A vektormező egy olyan függvény, ami egy tér pontjaihoz vektort rendel.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $v(x, y)$ vektormezőnek az $r(t) = (x(t), y(t))$ görbe mentén vett integrálja t_1 és t_2 között:

$$\int_r v(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} v(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A fluxus azt mondja meg, hogy egy adott felületen mekkora az átáramló anyag vagy energia.

A fluxust a vektormező vektorainak és a felület normálvektorainak skaláris szorzata adja.

$$\int_S v(x, y, z) ds = \int_A v(x, y, z) \cdot \underline{n} dA$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $v(x, y, z)$ vektormezőnek az $S(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$ felületi integrálja:

$$\int_S v(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{u_1}^{u_2} v(x(t, u), y(t, u), z(t, u)) \cdot S'_t \times S'_u du dt$$

ahol

$$S'_t \times S'_u = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{dx(t, u)}{dt} & \frac{dy(t, u)}{dt} & \frac{dz(t, u)}{dt} \\ \frac{dx(t, u)}{du} & \frac{dy(t, u)}{du} & \frac{dz(t, u)}{du} \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $v(x, y, z)$ vektormezőnek az $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ görbe mentén vett integrálja:

$$\int_r v(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} v(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Divergencia és rotáció

A vektormező divergenciája egy olyan függvény, amely a vektormező minden pontjában megméri, hogy ott mennyi anyag áramlik a rendszerbe vagy épp mennyi tűnik el.

A képlete:

$$\operatorname{div}(v(x, y)) = \frac{\delta v_1(x, y)}{\delta x} + \frac{\delta v_2(x, y)}{\delta y}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A rotáció a vektormező örvénylését írja le.

$$\operatorname{rot}(v(x, y)) = \frac{\delta v_2(x, y)}{\delta x} - \frac{\delta v_1(x, y)}{\delta y}$$

Azokban a pontokban, ahol $x = y$ a rotáció épp nulla.

Ha $x > y$ akkor a rotáció pozitív, és ha $x < y$ akkor negatív.

$R^3 \rightarrow R^3$ vektormező esetén:

$$\operatorname{rot}(v) = \left(\frac{\delta v_3}{\delta y} - \frac{\delta v_2}{\delta z} \right) \cdot \underline{i} + \left(\frac{\delta v_1}{\delta z} - \frac{\delta v_3}{\delta x} \right) \cdot \underline{j} + \left(\frac{\delta v_2}{\delta x} - \frac{\delta v_1}{\delta y} \right) \cdot \underline{k} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektormező akkor forrásmentes, ha nincs benne forrás, vagyis nincs benne olyan pont, amelynek pozitív a divergenciája.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektormező akkor örvénymentes, ha a vektormező rotációja mindenütt nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konzervatív vektormezőre több különböző definíció van forgalomban attól függően, hogy fizikusok vagy matematikusok alkották-e meg magát a definíciót.

#0 A $v(x, y, z)$ egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett vektormező pontosan akkor konzervatív, ha bármely pontjában a rotáció nulla.

#1 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha létezik primitív függvénye. Ezt a függvényt potenciál-függvénynek nevezzük, és íme, itt is van:

$$F(x, y, z) \quad v(x, y, z) = \left(\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}, \frac{\delta F}{\delta z} \right)$$

#2 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha tetszőleges A és B pontjára igaz, hogy bármely A és B közti görbén ugyanakkora a vektormező integrálja:

$$\int_{\substack{r_1(t) \\ A \rightarrow B}} v(x, y) ds = \int_{\substack{r_2(t) \\ A \rightarrow B}} v(x, y) ds$$

#3 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha bármely zárt görbén a vektormező integrálja nulla.

$$\oint_{r(t)} v(x, y) ds = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A vektormező akkor konzervatív, ha létezik F primitív függvénye. Ez az F függvény a vektormező potenciál-függvénye.

A potenciál-függvény egy vektor-skalár függvény, és azt tudja, hogy a vektormező minden pontjához hozzárendel egy számot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Green-tétel #1 (zárt görbén vett örvénylezés):

$$\oint_{r(t)} v(x, y) ds = \int_D \text{rot}(v) dydx$$

Az első Green-tétel azt írja le a rotáció segítségével, hogy mekkora egy vektormező örvénylese a zárt görbén.

Green-tétel #2 (zárt görbén vett fluxus)

A második Green-tétel pedig azt írja le a divergencia segítségével, hogy mekkora egy vektormező fluxusa a zárt görbén.

$$\oint_{r(t)} v(r(t)) \cdot n(t) dt = \int_D \text{div}(v) dydx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A második Green-tétel térbeli változata azt mondja, hogy egy vektormező integrálja az S kifelé irányított zárt felületen egyenlő a divergencia integráljával a felület által határolt D tartományon.

$$\oint_{S(t,u)} v(S(t,u)) \cdot S'_t \times S'_u \, dudt = \int_D \operatorname{div}(v) \, dxdydz$$

Ezt a tételt divergencia-tételnek vagy másként Gauss-Ostrogradszkij-tételnek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az első Green-tétel térbeli megfelelője azt mondja, hogy a vektormező örvénylése egy zárt görbén kiszámolható úgy is, ha a görbe által határolt S felületen integráljuk a vektormező rotációját.

$$\oint_{r(t)} v(x,y,z) \, ds = \int_S \operatorname{rot}(v) \cdot \underline{n} \, ds$$

Ráadásul teljesen mindegy, hogy melyik felületen.

Az első Green-tétel térbeli változatát Stokes-tételnek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Differenciálegyenletek

A [differenciálegyenletek](#) olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A [szeparábilis differenciálegyenlet](#) így néz ki:

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az y' -t lecseréljük arra, hogy $\frac{dy}{dx}$.

Aztán jön a szétválasztás: minden y -os dolgot a dy -os oldalra viszünk és minden x -eset a dx -es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [differenciálegyenlet](#) homogén fokszerű, ha $y = ux$ helyettesítés után minden x -es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszerű [differenciálegyenletek](#) megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az $y(x) = xu(x)$ (röviden $y = xu$) helyettesítést, ekkor $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol y helyett most u -ra hajtunk. És amikor u már megvan, visszacsináljuk y -ra.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ [differenciálegyenlet](#) akkor egzakt, ha $p'_y(x, y) = q'_x(x, y)$, röviden $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$.

Az egzakt egyenletek megoldása $F(x, y) = C$, ahol $F'_x(x, y) = p(x, y)$ és $F'_y(x, y) = q(x, y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a [differenciálegyenlet](#) nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p} \text{ és } \frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$$

Ha ezek közül az első csak y -t tartalmaz, vagy a második csak x -et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$$u = e^{-\int f(y) dy} \text{ vagy } u = e^{\int g(x) dx}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű lineáris [differenciálegyenlet](#) általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy y' , és van benne egy elsőfokú y .

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy $v(x)$ függvényt:

$$v = e^{\int P(x) dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet $v(x)$ -el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)' dx = \int vQ(x) dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x) dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy $C(x)$ függvény. És ezt a $C(x)$ függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x) dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban $C(x)$ helyére beírjuk, ami kijött.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósnak, mert a $P(x)$ függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk a .

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

A homogén egyenlet: $y' + ay = 0$

A homogén megoldás: $y_0 = Ce^{-ax}$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvényről függ:

$Q(x)$ = másodfokú polinom: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$Q(x)$ = harmadfokú polinom: $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$Q(x)$ = exponenciális kifejezés: $y_p = Ae^{\alpha x}$

$Q(x)$ = szinusz vagy koszinusz: $y_p = A\cos \alpha x + B\sin \alpha x$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű [lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet](#) partikuláris megoldásában szerepel $e^{\alpha x}$ és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén [differenciálegyenlet](#) általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet: $ar^2 + br + c = 0$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax} (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$$Q(x) = \text{polinom: } y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

$$Q(x) = \text{exponenciális kifejezés: } y_p = A e^{\alpha x}$$

$$Q(x) = \text{szinusz vagy koszinusz: } y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Izoklinák

Azon pontok halmazát, melyekben a megoldásfüggvények meredeksége egy adott számmal egyenlő, a [differenciálegyenlet](#) izoklinájának nevezzük.

Az $y' = f(x, y(x))$ izoklináinak egyenlete:

$$f(x, y(x)) = K$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Laplace transzformáció

Az $f(x)$ függvény Laplace transzformáltja a következő integrálás:

$$f(x) \rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Néhány függvény Laplace transzformáltja:

$$f(x) = C \rightarrow F(s) = \frac{C}{s}$$

$$f(x) = x^n \rightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f(x) = e^{ax} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(x) = \sin(ax) \rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$f(x) = \cos(ax) \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$f(x) = x^n e^{ax} \rightarrow F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$f(x) = e^{ax} \sin(bx) \rightarrow F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$f(x) = e^{ax} \cos(bx) \rightarrow F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$f(x) = x \sin(ax) \rightarrow F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$f(x) = x \cos(ax) \rightarrow F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Néhány függvény inverz Laplace transzformáltja:

$$F(s) = \frac{C}{s} \rightarrow f(x) = C$$

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \rightarrow f(x) = x^n$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \rightarrow f(x) = e^{ax}$$

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \rightarrow f(x) = \sin(ax)$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \rightarrow f(x) = \cos(ax)$$

$$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \rightarrow f(x) = x^n e^{ax}$$

$$F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \rightarrow f(x) = e^{ax} \sin(bx)$$

$$F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \rightarrow f(x) = e^{ax} \cos(bx)$$

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \rightarrow f(x) = x \sin(ax)$$

$$F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \rightarrow f(x) = x \cos(ax)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Fourier sorok

A [Fourier sor](#) a 2π szerint periodikus függvények egy speciális függvénysora:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ahol az úgynevezett Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_C^{C+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Fourier-transzformáció

A Fourier-transzformáció képlete:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot f(t) dt$$

Röviden arról van szó, hogy a Fourier-transzformáció egy olyan matematikai gépezet, amely csúnyán összekevert hullámokból képes visszafejteni az eredeti hullámok frekvenciáit. Olyan, mintha lenne egy pohár kólánk és képesek lennénk visszacsinálni az alkotóelemeire, hogy megnézhessük miből áll össze. Az egész Fourier-transzformáció alapötlete, hogy a különböző frekvenciájú hullámokat feltekerjük egy körre és így kezdjük el őket vizsgálni. A feltekerést a [komplex számok](#) segítségével végezzük el, ez tűnik talán a leginkább rémisztő résznek. A feltekerett hullámok általában valamilyen virágmintákat adnak ki a körben, ám amikor éppen egy olyan körbe tekerjük fel, aminek a körfrekvenciája megegyezik az eredeti hullám frekvenciájával, pontosabban annak kétszer pi-szeresével, akkor egy drasztikusan eltérő alakzatot kapunk. Ezt a drasztikus eltérést remekül lehet detektálni úgy, hogy az összes létező alakzatot integráljuk, és ezeket hasonlítjuk egymással össze. Ha két, vagy akár sok-sok hullámot összeadunk és ennek vizsgáljuk a feltekerés utáni integrálját, vagyis a Fourier-transzformáltját, akkor az így kapott integrálás pontosan detektálja számunkra az összes eredeti hullám frekvenciáját. Ezt a módszert használja az MP3 tömörítési technika, amely egy zenéből rengeteg „felesleges” frekvenciát ki tud dobálni és így kisebb lesz a hangfájl. Vagy ezzel a módszerrel működnek a rezgéseken alapuló diagnosztikai módszerek, az MRI vagy épp a Föld belső összetételét vizsgáló rezgéshullámok elemzése. De a képek tömörítéséhez vagy épp az 5G adatforgalomban is előkerül a Fourier-transzformáció.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Dirac-delta jelölése $\delta(x)$ és ez egy olyan függvény, amely mindenhol nulla, kivéve egyetlen pontban, ahol végtelen nagy értéket vesz fel, és a teljes számegyenesen vett integrálja 1.

A Fourier-transzformáció egy olyan matematikai gépezet, ami föltekéri a hanghullámokat egy komplex számsíkban fekvő körre. És aztán az így kapott virágmintákat integrálja. Az integrálás eredménye egy komplex függvény, aminek az abszolútértékét ábrázolva egy olyan grafikont kapunk, amelynek kiugró csúcsai éppen detektálják az eredeti hanghullám frekvenciáját. Hogyha a hullámot hosszabb intervallumon vizsgáljuk, a csúcsok magasabbak lesznek, és amint a teljes számegyenesen vizsgáljuk a hullámot, a csúcsok végtelenül keskeny és végtelenül magas tűskékké változnak. Ezeket a végtelen tűskéket Dirac-deltának nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvényt hívjuk $\text{sinc}(x)$ függvénynek.

Használják rá a kardinális szinusz elnevezést vagy a szinusz kardinálist is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az f és g függvények Fourier-transzformáltját jelöljük F -fel és G -vel. Ekkor:

$$\mathcal{F}[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot F(\omega) + \beta \cdot G(\omega)$$

Ha két jelet összeadsz (egy-egy konstans szorzóval), a frekvenciaképüket ugyanígy összeadhatod és szorozhatod.

Képzeld el, hogy egy turmixgépbe bedobsz egy almát és egy banánt, majd összeturmixolod őket. A kapott püré íze pontosan az alma és a banán ízének az összege lesz. Nem keletkeznek misztikus új gyümölcsök; a lineáris kombináció az időtartományban lineáris kombináció marad a frekvenciatartományban is.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az f és g függvények Fourier-transzformáltját jelöljük F -fel és G -vel. Ekkor:

$$\mathcal{F}[f(a \cdot x)] = \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Vannak, akik ezt a szabályt így szokták megfogalmazni:

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right] = |a| \cdot F(a \cdot \omega)$$

Éppen úgy működik, mint a lineáris helyettesítés az integrálásban.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az f és g függvények Fourier-transzformáltját jelöljük F -fel és G -vel. Ekkor:

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} \cdot F(\omega)$$

Vannak, akik ezt a szabályt így szokták megfogalmazni:

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right] = |a| \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ha egy hanghullámot, például egy dalt eltolunk az időben akkor a benne lévő hangok, vagyis a frekvenciák nem változnak meg. Ami változik az a fázis.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az f és g függvények Fourier-transzformáltját jelöljük F -fel és G -vel. Ekkor:

$$\mathcal{F}[e^{-i\omega_0 x} \cdot f(x)] = F(\omega - \omega_0)$$

Itt a hanghullámok frekvenciáját toljuk el, amire például a jelek továbbításánál lehet szükség.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az f és g függvények Fourier-transzformáltját jelöljük F -fel és G -vel. Ekkor:

$$\mathcal{F}[x^n f(x)] = i^n \cdot F^{(n)}(\omega)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az f és g függvények Fourier-transzformáltját jelöljük F -fel és G -vel. Ekkor:

$$\mathcal{F} \left[f^{(n)}(x) \right] = (i\omega)^n \cdot F(\omega)$$

Az időbeli deriválás a frekvenciatartományban egy szorzássá válik. A deriválás a változást méri. Minél magasabb frekvenciájú (gyorsabban rezgő) egy hang, annál meredekebben és gyorsabban változik a hullámformája.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$ -et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \ln |ax+b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnós az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \quad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \quad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{cx+d} dx &= \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d} dx = \\ &= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + E \ln |cx+d| \frac{1}{c} \end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

$$\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}} dx \quad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x)) dx \quad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \quad f = \sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \quad f = \sinh^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \quad f = \cosh^2 u$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{ax+b} dx &= A \int \frac{1}{ax+b} dx = A \ln |ax+b| \cdot \frac{1}{a} \\ \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= A \int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c} dx \right) = \\ &= \frac{A}{2a} \left(\ln |ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{D}}x + \frac{b}{2a\sqrt{D}} \right) \cdot \sqrt{D} \right)\end{aligned}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A helyettesítéssel integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u -val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéssel integrálás egyik legfurcsább esete az $u = \tan \frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Határozott integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor a [Newton Leibniz formula](#) szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az $f[a, b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ $m_i = \inf \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ $M_i = \sup \{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha integráljuk a pozitív számegegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} & \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Síkbeli és térbeli leképezések és mátrixaik

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezésnél V_2 -nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1 -beli [vektorok](#) képe is nullvektor lesz. Ezen [vektorok](#) halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$ -vel jelöljük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a [mátrixok](#) pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1 -ben és a bázis [vektorok](#) képeit egymás mellé írjuk.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

$$\varphi^{-1} \text{ mátrixa } (\varphi)_b^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az x tengelyre tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Az y tengelyre tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az y=x tengelyre tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az origón átmenő $\underline{a}$ normálvektorú egyenesre tükrözés mátrixa:

$$R = I - 2 \cdot \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}^T}{\underline{a}^T \cdot \underline{a}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az α szögű forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az origóra való középpontos tükrözés egy 180° -os forgatásnak felel meg, így mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az i és j koordinátatengelyek síkjában történő Givens forgatás mátrixát úgy kapjuk, hogy arra a négy helyre ahol az egység mátrix i -edik és j -edik sora és oszlopa metszi egymást beírjuk szépen az α szögű forgatás mátrixának elemeit.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az origón átmenő síkokra való tükrözést Householder-tükrözésnek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Hogyha egy origón átmenő sík normálvektora az $\underline{a}$ vektor, akkor az erre a síkra tükrözés mátrixa:

$$H = I - 2 \cdot \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}^T}{\underline{a}^T \cdot \underline{a}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az x tengelyre merőleges vetítés mátrixa:

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az y tengelyre merőleges vetítés mátrixa:

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az x tengelyre merőleges vetítés mátrixa:

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az y tengelyre merőleges vetítés mátrixa:

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $\underline{v}$ irányvektorú origón átmenő egyenesre történő merőleges vetítés mátrixa:

$$P = \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}^T}{\underline{v}^T \cdot \underline{v}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A projekció mátrixa:

$$P = I - \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}^T}{\underline{a}^T \cdot \underline{a}}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)
