MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEK 1 YBL tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 10. 20.

Tartalomjegyzék

Hatványozás, logaritmus, exponenciális és logaritmusos egyenletek..... **2**

Trigonometria, trigonometrikus egyenletek..... **4**

Sorozatok határértéke..... **6**

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése..... **8**

Monotonitás és korlátosság..... **9**

Függvények..... **10**

Összetett függvény és inverz függvény..... **13**

Sorok összege és sorok konvergenciája..... **14**

Függvények határértéke és folytonossága..... **16**

A határérték precíz definíciója..... **17**

Deriválás..... **18**

Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete..... **21**

Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok..... **22**

Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok..... **23**

Taylor polinom és Taylor sor..... **24**

L’Hôpital szabály..... **25**

Határozatlan integrálás, primitív függvény..... **26**

Határozott integrálás..... **30**

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík..... **31**

Pontok, egyenesek, síkok, szögek, a geometria alapjai..... **33**

Síkidomok, háromszögek, négyszögek, sokszögek..... **37**

Trigonometria a síkgeometriában..... **48**

Szinusztétel és koszinusztétel..... **49**

Mátrixok és vektorok..... **50**

Vektorok, egyenesek és síkok egyenletei..... **55**

Vektorterek, független és összefüggő vektorok..... **59**

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok rangja és inverze..... **61**

Determináns, adjungált, kvadratikus alakok..... **64**

Hatványozás, logaritmus, exponenciális és logaritmusos egyenletek

Hatványozás azonosságai:

$a^n a^k = a^{n+k}$

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(a^n)^k = a^{nk} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális függvénynek nevezzük az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket, ahol $a > 0$ valós szám.

Az exponenciális függvények meglehetősen fontosak a matematikában, sőt nem csak a matematikában.

Ilyen függvények írják le a baktériumok szaporodását, a radioaktív elemek bomlását, a számítógépek teljesítményének növekedését és még rengeteg más dolgot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$log_a x$ azt mondja meg, hogy a-t hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy x-et kapjunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a \sqrt[n]{x^k} = \frac{k}{n} \log_a x$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális egyenletek megoldásának kulcsa, hogy a két oldalt azonos hatványalapra hozzuk, mert ekkor

$$a^x = a^b \Rightarrow x = b$$

Így hát az egyenlet két oldalát addig alakítgatjuk a hatványozás azonosságainak segítségével, amíg erre az alakra nem jutunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenlőtlenséget ugyanúgy kell mint az egyenletet, amire figyelni kell csupán az az, hogy amikor elhagyjuk a hatványalapot, nem mindegy, hogy az 1-nél nagyobb, vagy kisebb szám-e.

Ha az alap 1-nél nagyobb szám, akkor nem történik semmi, az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megmarad.

Ha viszont az alap 1-nél kisebb szám, akkor az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logaritmikus egyenletek megoldásának lényege, hogy ilyen alakra jussunk:

$$log_a x = b$$

Mert innen a logaritmus definíciója miatt az következik, hogy

$$x = a^b$$

Ahhoz, hogy a bonyolúltabb egyenleteket is ilyen alakra hozzuk, a logaritmus azonosságait használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometria, trigonometrikus egyenletek

Azt a kört a koordinátarendszerben, aminek középpontja az origo és a sugara 1, egységkörnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin\alpha = \sin\left(\pi - \alpha\right)$

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad -\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\cos\alpha = \cos\left(\pi - \alpha\right)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának x koordinátáját nevezzük az α szög koszinuszának, és így jelöljük: $\cos\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának y koordinátáját nevezzük az α szög szinuszának, és így jelöljük: $\sin\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy α szög tangense az α szög szinuszának és koszinuszának hányadosával egyenlő:

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad k \in Z$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények periodikusak, ez azt jelenti, hogy bizonyos időközönként megismétlik önmagukat. Ezt az időközt periódusnak nevezzük és az ő esetükben a periódus 2π.

Ha van egy ilyen egyenlet, hogy

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

akkor ennek a periodikussága miatt végtelen sok megoldása van, ezért írjuk oda a megoldások mögé, hogy $+2k\pi$.

További nehézség, hogy két megoldás is van, az egyiket a számológépünk adja, a másikat pedig...

Szinusz esetén úgy, hogy a két megoldás összegének π-nek kell lennie.

Koszinusz esetén pedig úgy, hogy a két megoldás mindig egymás minuszegyszerese.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus függvényeknek vagy szögfüggvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek tartalmaznak trigonometrikus kifejezéseket, mint például szinusz, koszinusz vagy tangens. Ezek eredetileg egy derékszögű háromszög egy szöge és két oldala hányadosa közti összefüggéseket írja le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorozatok határértéke

$\frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \frac{1}{n^3} \to 0 \quad \frac{1}{n^k} \to 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$n \to \infty \quad n^2 \to \infty \quad n^3 \to \infty \quad n^k \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{n} \to \infty \quad \sqrt[3]{n} \to \infty \quad \sqrt[4]{n} \to \infty \quad \sqrt[k]{n} \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$q^n \to \begin{cases} \infty \text{ ha } q > 1 \\ 0 \text{ ha } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ ha } q = 1 \\ \text{div ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha$

$\left(1 + \frac{\alpha}{\text{IZÉ}}\right)^{\text{IZÉ}} \to e^\alpha$

Ha IZÉ $\to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van egy olyan valós szám, ami a sorozat határértéke.

Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens.

Egy sorozat lehet azért is divergens, mert végtelenbe tart, és lehet azért is, mert az égvilágon nem tart sehova. A sehova nem tartó sorozatok mindig oszcilláló sorozatok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to A$ és $c_n \to A$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$ akkor $b_n \to A$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \sqrt[n]{n} \to 1 \quad \sqrt[n]{n^k} \to 1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A végtelenbe tartó sorozatok nagyságrendi sorrendje azt mondja meg, hogy melyik sorozat milyen ütemben tart a végtelenbe. Minél nagyobb nagyságrendű egy sorozat, annál gyorsabban tart a végtelenbe. A nagysagrendi rangsor:

$$\log_n << \sqrt[k]{n} << n^k << q^n << n! << n^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyoldali rendőr-elv arról szól, hogyha egy sorozat végtelenbe tart, akkor elég alulról becsülni egy másik végtelenhez tartó sorozattal, és az egyoldali rendőr-elv szerint az eredeti sorozat is végtelenbe fog tartani. Amikor pedig az eredeti sorozat mínusz végtelenbe tart, akkor az egyoldali rendőr-elvet használva felülről becslünk egy másik mínusz végtelenbe tartó sorozattal:

Ha $a_n \to \infty$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n$ akkor $b_n \to \infty$.

Ha $a_n \to -\infty$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \geq b_n$ akkor $b_n \to -\infty$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha bármilyen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

Ennél precizebben az a_n sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén végtelen sok tagja van, hogy $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza legyen $\{A_i\}$

Ekkor a sorozat limesz inferiorja:

$$\liminf a_n = \inf \{A_i\}$$

És a limesz szuperior:

$$\limsup a_n = \sup \{A_i\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy

$|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat divergens, és határértéke plusz végtelen, ha bármely $M > 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M < a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat divergens, és határértéke minusz végtelen, ha bármely $M < 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M > a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat oszcillálva divergens, ha nincs semmilyen határértéke, vagysi sem egy valós számhoz, sem plusz vagy minusz végtelenbe nem tart.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Monotonitás és korlátosság

Az a_n sorozat szigorúan monoton nő, ha $0 < a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat szigorúan monoton csökken, ha $0 > a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton nő, ha $0 \leq a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton csökken, ha $0 \geq a_{n+1} - a_n$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Adott az $f: A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\text{páros}\sqrt{\text{ez itt} \geq 0} \quad \text{páratlan}\sqrt{\text{ez itt bármi}} \quad \log(\text{ez itt} > 0) \quad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összetett függvény és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönesen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorok összege és sorok konvergenciája

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$

Ha $|q| < 1$ akkor a mértani sor konvergens és összege

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $|q| \geq 1$ akkor a sor divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszegsorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$ monoton csökkenő sorozat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to 0$ pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$$\sum (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól$a_n \leq b_n$ akkor

$\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ is konvergens

$\sum a_n$ divergens $\Rightarrow$ $\sum b_n$ is divergens

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol r a konvergenciasugár.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények határértéke és folytonossága

Az $f(x)$ függvény folytonos az a-ban, ha értelmezve van az a-ban, létezik és véges a határértéke az a-ban, és ami a lényeg:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a-ban, ha létezik véges határértéke az a-ban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Megszüntethető szakadás:

Ha létezik véges határérték az a-ban, de ez nem egyezik meg a függvényértékkel, akkor megszüntethető szakadása van.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

Nem megszüntethető szakadás, ugrás:

Ha a bal és jobb oldalihatárérték két különböző szám az a-ban, akkor a szakadás nem megszüntethető és ugrásnak hívjuk.

$$\lim_{x \to a\text{-}} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \text{másik szám} \quad \lim_{x \to a\text{-}} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Nem megszüntethető, nem véges szakadás:

Ha a bal és jobb oldalihatárérték nem is véges az a-ban, akkor pláne nem tehető folytonossá a függvény.

$$\lim_{x \to a\text{-}} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nem megszüntethető oszcilláló szakadás:

Végül meglehetősen patologikus esetek is vannak, amikor még csak jobb vagy bal oldalihatárérték sem létezik.

$$\nexists \lim_{x \to a\text{-}} f(x) \quad \nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{\text{IZÉ} \to 0} \frac{\sin \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{\text{IZÉ} \to 0} \frac{1-\cos \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}^2} = \frac{1}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A határérték precíz definíciója

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

f és g deriválható függvények, és c valós szám esetén a deriválási szabályok:

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

A deriválási szabályok megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a trötek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorlni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvények közt fennálló azonosságok:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\cosh x$ függvény inverze:

$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

A $\sinh x$ függvény inverze:

$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

A $\tanh x$ függvény inverze:

$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok

Az elaszticitás képlete:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Egy függvény elaszticitása azt mondja meg, hogyha 1%-kal növeljük az x-et, akkor hány százalékkal változik a függvény értéke.

$E = 0$ Teljesen rugalmatlan

$|E| < 1$ Rugalmatlan

$|E| = 1$ Egységnyi rugalmasságú

$|E| > 1$ Rugalmas

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok

Ha a függvény deriváltja pozitív, akkor a függvény nő,

Ha a függvény deriváltja negatív, akkor a függvény csökken.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

A függvény hangulatáról a második derivált szolgáltat információt.

Ha a második derivált negatív, akkor a függvény konkáv, ha pozitív, akkor konvex

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény stacionárius pontja x_0, ha f differenciálható az x_0 környezetében és $f'(x_0)=0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\text{páros}\sqrt{\text{ez itt} \geq 0}$ $\quad$ $\text{páratlan}\sqrt{\text{ez itt bármi}}$ $\quad$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ $\quad$ $\text{tört nevező} \neq 0$

pl.: $f(x)=\frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Taylor polinom és Taylor sor

Legyen $f(x)$ k-szor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt k-adfokú Taylor polinomja:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $f(x)$ akárhányszor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt Taylor sora:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az e^x, $\ln x$, $\sin x$ és $\cos x$ függvények Taylor sorai:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \qquad \ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $f(x)$ egymás után k-szor folytonosan differenciálható az $[a,b]$ zárt intervallumon, és $k+1$-edszer differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon, akkor létezik olyan $c\in(a,b)$ amire

$$f(b)=T(b)+R(b)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

L’Hôpital szabály

Legyen f és g deriválható az a szám környezetében (kivéve esetleg a-ban) és tegyük fel, hogy itt $g'(x) \neq 0$.

Ekkor, ha $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, ekkor a L’Hôpital-szabály (vagy L'Hospital-szabály) szerint:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$e^{-\infty} = 0 \quad e^{\infty} = \infty$

$\ln 0 = -\infty \quad \ln \infty = \infty$

$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{+0} = +\infty \quad \frac{1}{-0} = -\infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$-et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \ln|ax+b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} \, dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} \, dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) \, dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax+b) \, dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \, dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \, dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} \, dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnos az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \qquad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \qquad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}\,dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d}\,dx =$$

$$= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d}\,dx = \frac{a}{c}x + E\ln|cx+d|\frac{1}{c}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}\,dx \qquad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x))\,dx \qquad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \qquad f = sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \qquad f = \sinh^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \qquad f = \cosh^2 u$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = A\int \frac{1}{ax+b}\,dx = A\ln|ax+b|\cdot\frac{1}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c}\,dx\right) =$$

$$= \frac{A}{2a}\left(\ln|ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x+\frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)\cdot\sqrt{D}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az $u = \tan\frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozott integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor aNewton Leibniz formula szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f $[a,b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad m_i = \inf\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \sup\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha integráljuk a pozitív számegyenesen az

$$f(x) = \tfrac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \tfrac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} \text{ ha } \alpha < 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \tfrac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ ha } \alpha > 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík

Az $f(x,y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort gradiensnek nevezzük.

A gradienst szokás deriváltvektornak is nevezni, és az $f(x,y)$ kétváltozós függvény gradiensvektorát úgy jelöljük, hogy $\text{grad}\,(f(x,y))$.

A gradiensvektor elnevezés onnan ered, hogy éppen a gradiens vektor irányában emelkedik mindig a legjobban a kétváltozós függvény grafikonja, ami egy felület.

Az $f(x,y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az (x_0,y_0) pontban:

$$\text{grad}\,(f(x_0,y_0)) = \nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

A gradiens segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort deriváltvektornak nevezzük.

A deriváltvektort szokás gradiensnek is nevezni, és az $f(x,y)$ kétváltozós függvény deriváltvektorát úgy jelöljük, hogy $\nabla f(x,y)$.

Az $f(x,y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az (x_0,y_0) pontban:

$$\text{grad}\,(f(x_0,y_0)) = \nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

A deriváltvektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0,y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta \underline{e}} = \text{grad}\,(f(x_0,y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogyha a kétváltozós függvény grafikonjának egy pontjában áll egy hagymászó, és elindul egy $\underline{v}$ irányban, akkor ebben az irányban milyen meredeken emelkedik a felület.

Ahogy a $\underline{v}$ irányt változtatjuk, az iránymenti derivált értéke is változik.

És van egy olyan $\underline{v}$ irány, ahol az iránymenti derivált maximális. Ezt az irányt nevezzük gradiens iránynak és ez mindig megegyezik a deriváltvektor irányával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A függvényeket két nagy típusba sorolhatjuk, az explicit és az implicit függvények csoportjába. Az explicit függvények azok, amelyek egy konkrét képlettel vannak megadva, míg az implicit függvények valamilyen egyenlet formájában adhatók meg.

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $F(x, y) = 0$ egy implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i, mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pontok, egyenesek, síkok, szögek, a geometria alapjai

A geometria legapróbb építőkockái a pontok. A pontokat az ABC nagy betűivel jelöljük.

Az egyenesek mindkét irányban végtelen kiterjedésű és végtelenül keskeny egyenes vonalak. De ez csak az egyenes vizuális leírása, matematikai definíciója nincsen, ugyanis az egyenes a ponthoz hasonlóan alapfogalom.

A sík is geometria alpafogalom. A síkok már két dimenziósak, ellentétben az egy dimenziós egyenessel. Az egyenesen csak jobbra és balra tudunk mozogni, egy síkban viszont már két lényegesen különböző irány létezik, jobbra-balra és előre-hátra. Ennél is nagyobb a dimenziója a térnek, amiben a pontok, az egyenesek és a síkok helyezkednek el. A térben három lényegesen különböző irány van, ezért a tér három dimenziós. Létezik benne jobbra-balra, előre-hára és fel-le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy egyenesnek a két pont közötti részét szakasznak nevezzük.

A szakasz az egyenessel ellentétben mindig véges hosszúságú, és a hossza mindig a két pont távolsága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy síkot egy egyenessel kettévágunk, akkor két félsík keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a teret egy síkkal két részre vágjuk, akkor két féltér keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík egy pontjából kiinduló két félegyenes a síkot két tartományra osztja. Ezek a tartományok és a két félegyenes szöget alkotnak. Azt, hogy a két szögtartomány közül melyikről van szó, a szárak közé rajzolt körívvel jelezzük. A szög csúcsa a két félegyenes közös végpontja, a szög szárai pedig maguk a félegyenesek. A félegyenesek közötti részt szögtartománynak nevezzük. A két félegyenes mindig két ilyen tartományt határoz meg, és egy körívvel jelöljük, hogy épp melyik szögtartományról van szó.

A szögeket a görög abc betűivel jelöljük: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

A szögeket nagyságuk szerint szokás csoportosítani. A szögek mérésére a fokot szokás használni, egy teljes kör éppen 360 fok, a derékszög pedig a 90 fok. Amikor a két szögszár éppen egybeesik, akkor az általuk meghatározott szög a nullszög és a teljes szög, az egyik 0 fokos, a másik 360 fokos. Amikor a két félegyenes 0 és 90 fok közötti szöget zár be, azt úgy hívjuk, hogy hegyes-szög. Amikor épp 90 fokos szögben állnak, azt derékszögnek nevezzük. A 90 foknál nagyobb és 180 foknál kisebb szögek a tompaszögek. A 180 fokos szöget egyenes-szögnek nevezzük, míg a 180 fok és 360 fok közötti szögeket homorúszögnek hívjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 0° és 90° közé esik, akkor hegyesszögnek nevezzük.

Az α szög hegyesszög, ha $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög pontsoan 90°-os, akkor derékszögnek is nevezzük.

Az α szög derékszög, ha $\alpha = 90^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 90° és 180° közé esik, akkor tompaszögnek nevezzük.

Az α szög tompaszög, ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög pontosan 180°-os, akkor egyenesszögnek is nevezzük.

Az α szög egyenesszög, ha $\alpha = 180^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 180° és 360° közé esik, akkor homorúszögnek nevezzük.

Az α szög homorúszög, ha $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két pont távolsága a pontokat összekötő szakasz hossza.

Ha tehát le kell mérni két pont távolságát, csak rá kell helyezni a vonalzónkat a két pontra, és már látjuk is a két pont távolságát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pont és egyenes távolságának leméréséhez először a pontból merőlegest kell állítanunk az egyenesre.

A távolság pedig ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pont és sík távolságának leméréséhez először a pontból merőlegest kell állítanunk a síkra.

A pont és sík távolsága pedig ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a két egyenes metszi egymást, akkor a távolságuknak nincs sok értelme vagy 0.

Ha a két egyenes egymással párhuzamos, akkor a távolságukat úgy kapjuk meg, hogy az egyik egyenes tetszőleges pontjából merőlegest bocsátunk a másik egyenesre.

És a két egyenes távolsága ennek a merőleges szakasznak a hossza.

Ha az egyenesek különböző síkokban futnak, úgy hívjuk őket, hogy kitérő egyenesek.

A kitérő egynesek nem párhuzamosak, de nem is metszik egymást.

A kitérő egyenesek mindig két párhuzamos síkban futnak, így a távolságuk a két sík távolsága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az egyenesek különböző síkokban futnak, úgy hívjuk őket, hogy kitérő egyenesek.

A kitérő egynesek nem párhuzamosak, de nem is metszik egymást.

Kitérő egyenesek láthatunk például autópályáknál, ahol az egyik út keresztezi a másikat egy hídon át.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a két sík metszi egymást, olyankor egy egyenesben metszik egymást és a távolságuknak nincs sok értelme vagy 0.

Ha a két sík párhuzamos, akkor a két sík távolságát úgy kapjuk meg, hogy veszünk az egyik síkon egy tetszőleges pontot, a pontbl merőlegest állítunk a síkra, és a távolságuk ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két ponttól azonos távolságra lévő pontok halmaza a két pontot összekötő szakasznak a szakaszfelező merőleges egyenese.

Három ponttól azonos távolságra lévő pont a három pon köré írható kör középpontja.

Két metsző egyenestől azonos távolságra lévő pontok halmaza a két egyenes szögének szögfelezője.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szögben a szögszárak egymással párhuzamosak és egyforma irányúak is, akkor ezeket a szögeket egyállású szögeknek nevezzük.

Az egyállású szögek egyenlők.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szögben a szögszárak egymással párhuzamosak, de irányuk ellentétes, akkor ezeket a szögeket váltószögeknek nevezzük.

A váltószögek egyenlők.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két váltószöget a csúcsuknál összeillesztünk, akkor ezeket a szögeket csúcsszögeknek nevezzük.

A csúcsszögek egyenlők.

Ha két egyenes metszi egymást, akkor mindig két-két csúcsszög pár keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szög szárai párhuzamosak és az egyik száruk közös, akkor ezeket a szögeket kiegészítő szögnek nevezzük.

A kiegészítő szögek nem egyenlők (kivéve ha 90°-90°-osak), de ha összeadjuk őket, mindig 180 fokot kapunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

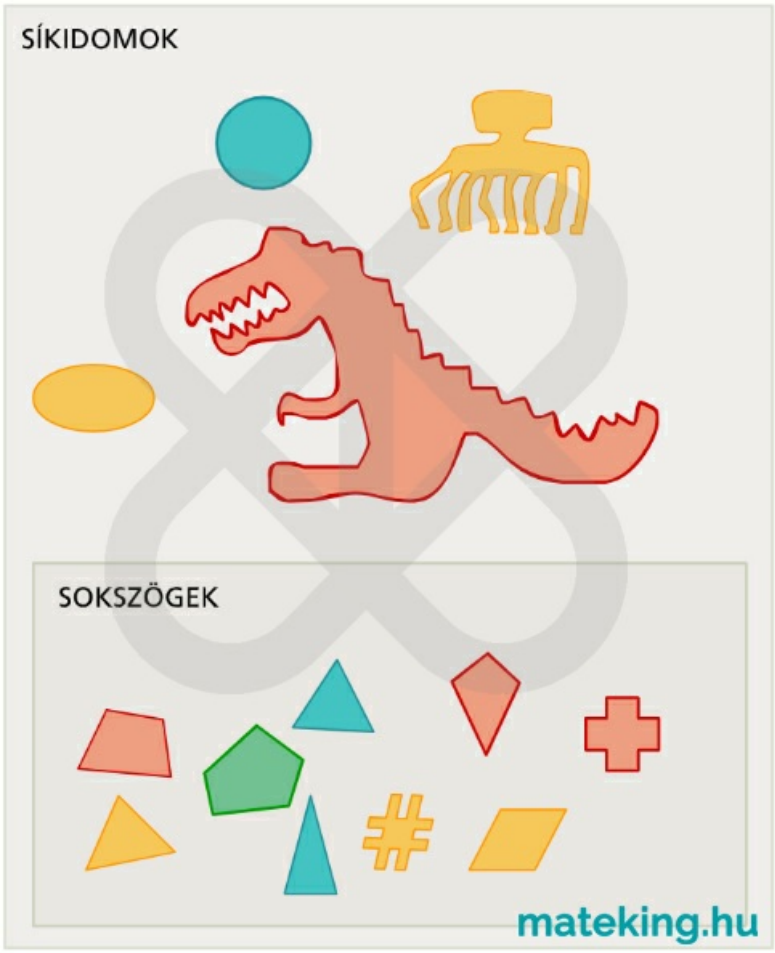
Ha két szög 90 fokra egészíti ki egymást, akkor pótszögeknek hívjuk őket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Síkidomok, háromszögek, négyszögek, sokszögek

Síkidomnak nevezzük a sík zárt vonalakkal körülhatárolt részét.

A zárt vonal azt jelenti, hogy fogjuk a ceruzát, elindulunk valahonnan... és hopp, visszaérünk ugyanoda, ahonnan indultunk. Síkodom például egy háromszög, vagy egy négyzet, de síkidom egy kör is, vagy éppen a különböző emojik. Egy síkidomot több különböző zárt vonal is atárolhat. Olyankor, amikor csak egy zárt vonal határolja, egyszerű síkidomnak nevezzük. Mindez sokkal könnyebben elképzelhető, ha megnézed az ehhez kapcsolódó epizódot.

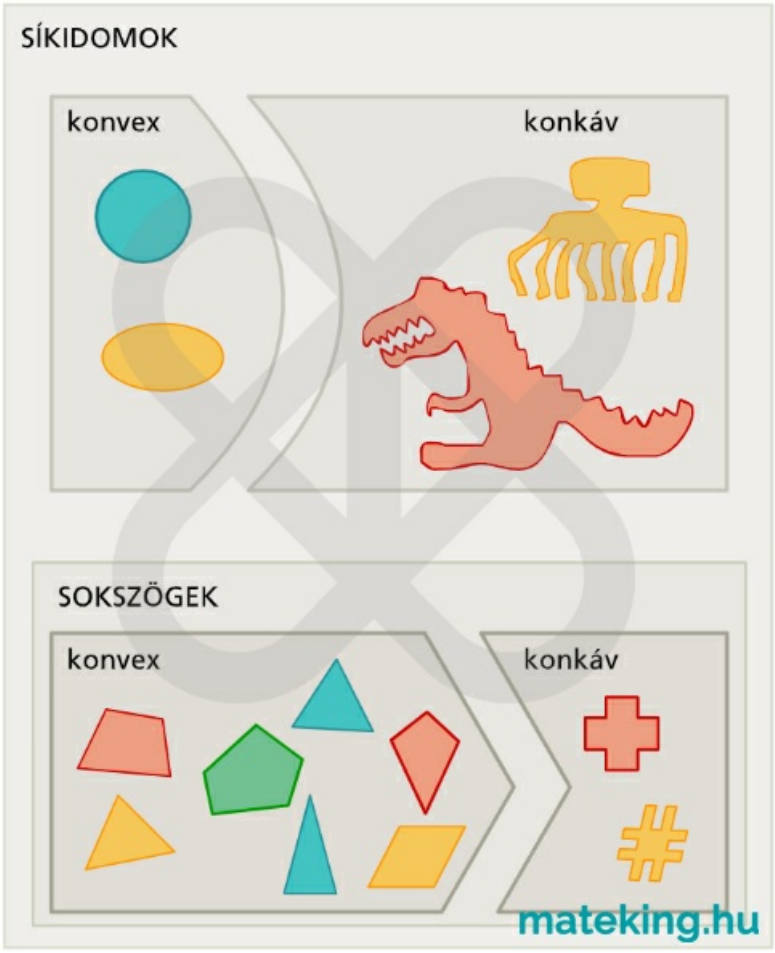


Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból álló zárt görbe (töröttvonal) határol. Vagyis azok a síkidomok sokszögek, amelyek határoló vonalai csak egyenes szakaszokból állnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

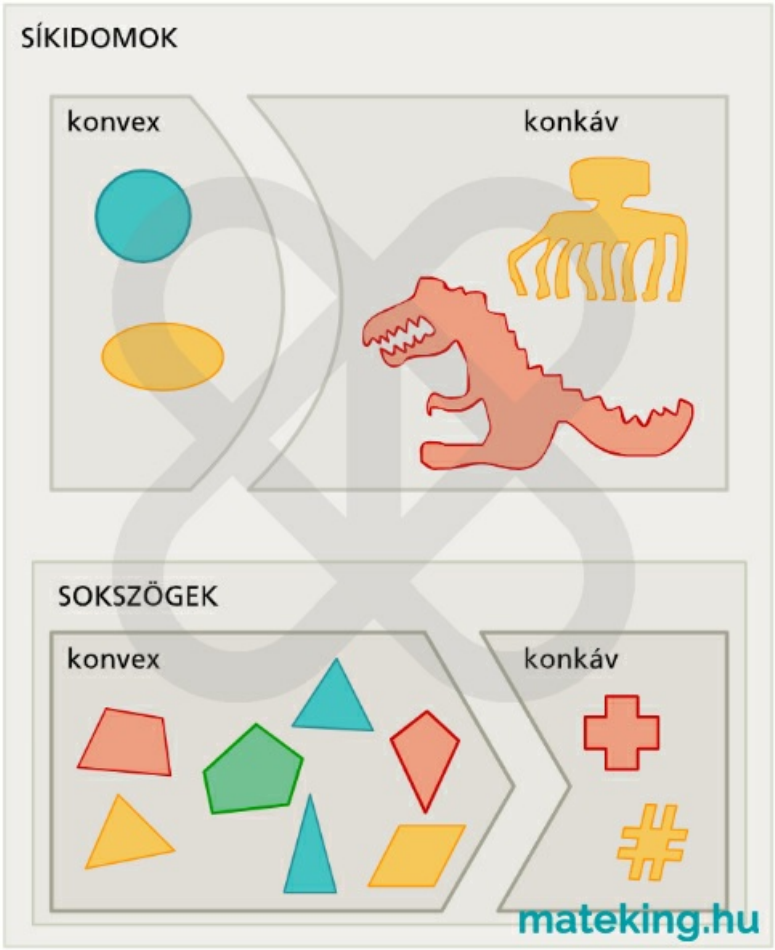
A konkáv síkidom az, amelyikben ki tudunk választani két olyan pontot, hogy az ezeket összekötő szakasznak egy része a síkidomon kívül halad. Egy kör vagy egy téglalap például nem konkáv, mert bárhogyan választunk benne két pontot, a pontokat összekötő szakasz is a síkidomban halad. De például egy szívecske már konkáv, mert ha a két kidudorodó részét összekötjük, akkor az összekötő vonal kívül halad. Mindez sokkal egyszerűbb, ha megnézed az ehhez a témához kapcsolódó epizódot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konvex síkidom az, amelyikben akárhogy veszünk két belső pontot, az őket összekötő szakasz minden pontja a síkidom belsejében lesz.

Egy kör vagy egy téglalap például konvex, mert bárhogyan választunk benne két pontot, a pontokat összekötő szakasz is a síkidomban halad. De például egy szívecske már nem konvex, mert ha a két kidudorodó részét összekötjük, akkor az összekötő vonal kívül halad. Mindez sokkal egyszerűbb, ha megnézed az ehhez a témához kapcsolódó epizódot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sokszöget szabályosnak nevezünk, ha minden oldala és minden belső szöge egyforma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból álló zárt görbe (töröttvonal) határol. Ezeket az egyenes szakaszokat nevezzük a sokszög oldalainak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakasz alkotta zárt görbe határol. Ezeket a szakaszokat oldalaknak, vagy másként oldaléleknek nevezzük, és azokat a pontokat, ahol az oldalélek találkoznak, a sokszög csúcsainak hívjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokszögek nem szomszédos csúcsait összekötő szakaszokat a sokszög átlójának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenlő szárú háromszögben van két egyforma hosszú oldal, amiket szárnak nevezünk. És hát van ugye a harmadik oldal, ez az alap.

Annyit érdemes megjegyezni róla, hogy az alaphoz tartozó súlyvonal, magasságvonal, oldalfelező merőleges és szögfelező mind egybeesik. És ez egyúttal a háromszög szimmetriatengelye is.

És azt is jó tudni róla, hogy az alapon fekvő szögek egyformák.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szabályos háromszögnek minden oldala és minden szöge egyenlő (tehát a szögek 60°-osak).

Szabályos háromszögben a körülírt kör középpontja, a magasságpont és a súlypont is egybeesnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszögnek van 90°-os szöge.

A derékszöggel szemközti oldalt átfogónak nevezzük, a másik kettőt pedig befogónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hegyesszögű háromszögek minden szöge hegyesszög, azaz 0°-nál nagyobbak, de 90°-nál kisebbek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A tompaszögű háromszögek azok, amelyeknek van egy tompaszöge, azaz egy olyan szöge, ami 90°-nál nagyobb, de 180°-nál kisebb.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög egyenlőtlenség szerint minden háromszög bármelyik oldalának rövidebbnek kell lennie, mint a másik két oldal összege.

$a+b>c \qquad a+c>b \qquad b+c>a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög magasságvonala a csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges.

Ezek mindig egy pontban metszik egymást, és ezt a pontot magasságpontnak nevezzük.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor a magasságpont a háromszögön kívülre esik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.

Ezek mindig egy pontban metszik egymást, ezt a pontot hívjuk a háromszög súlypontjának.

További izgalom, hogy a súlypont mindegyik súlyvonalat 2:1 arányban osztja.

Továbbá a súlyvonal felezi a háromszög területét.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög oldalfelezőmerőlegesei mindig egy pontban metszik egymást. Ez a pont minden csúcstól egyenlő távolságra van és emiatt a háromszög köré írható kör középpontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög belső szögfelezői mindig egy pontban metszik egymást. Ez a háromszögbe írható kör középpontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy háromszög oldalfelezőpontjait összekötjük, akkor a háromszög középvonalait kapjuk.

A középvonalak párhuzamosak a háromszög oldalaival és éppen fele olyan hosszúak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A jól ismert képlet háromszögek területére:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

És it jön egy kevésbé ismert háromszög-területképlet:

$$T = \frac{abc}{4R}$$

Itt R a háromszög köré írható körének sugara.

Ez pedig egy még kevésbé ismert képlet háromszögek területére:

$$T = r \cdot s$$

Itt r a beírható kör sugara, s pedig a kerület fele.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Hérón-képlet a háromszögek területképletei közül egy kevésbé ismert, de elég jól használható képlet. Akkor érdemes használni, ha ismert a háromszög mindhárom oldala.

$$s = \frac{a+b+c}{2} \qquad T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A legszabályosabb négyszög a négyzet. A négyzet oldalai egyenlő hosszúak és minden szöge derékszög. Egy sokszöget akkor nevezünk szabályos sokszögnek, ha minden oldala és minden szöge egyforma. Így tehát az egyetlen szabályos négyszög a négyzet. Ezen kívül a négyzetek mége egy fontos dolgot tudnak: az átlóik is merőlegesek egymásra.

A négyzet területe:

$$T = a^2$$

A négyzet kerülete:

$$K = 4a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

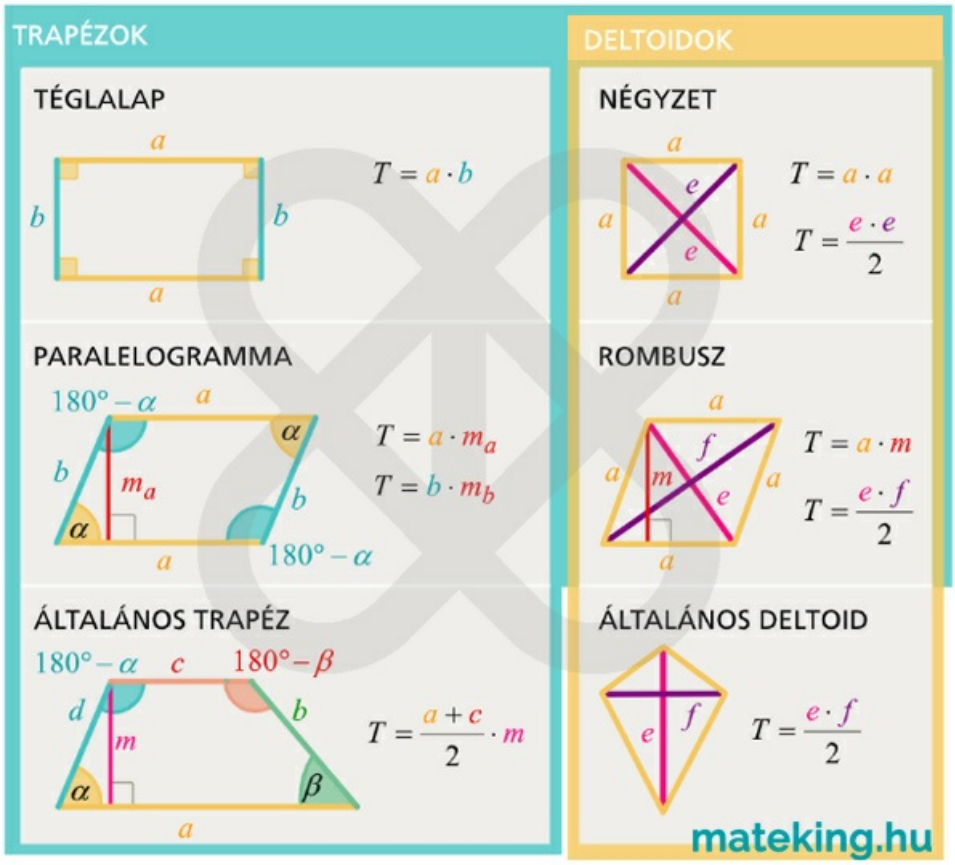
Téglalap olyan négyszög, aminek minden szöge derékszög. Vagyis az oldalak nem feltétlen egyenlő hosszúak. Olyankor, amikor az oldalai is egyenlő hosszúak, egy négyzetet kapunk. A téglalapok egyik fontos tulajdosága, hogy a szemközti oldalai egyforma hosszúak, vagyis két darab a hosszúságú és két darab b hosszúságú oldala van. A téglalapoknak egy másik fontos tulajdonsága pedig, hogy a szemközti oldalai párhuzamosak egymással. Ez pedig azt jelenti, hogy a téglalapok mindig paralelogrammák is egyben (ugyanis a paralelogrammák azok a négyszögek, amelyeknek van két párhuamos oldalpárjuk).

Területe:

$$T = a \cdot b$$

Kerülete:

$$K = 2a + 2b$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Rombusz egy olyan négyszög, amelynek minden oldala egyforma hosszú. Vagyis egy rombusznál az oldalak egyenlő hosszúságúak, de a szögeknek nem kell derékszögnek lenniük. Amikor a rombusz szögei derékszögek, egy négyzetet kapunk. Vagyis a négyzet is rombusz. A rombuszok másik fontos tulajdonsága, hogy a szemközti oldalaik mindig párhuzamosak egymással, vagyis a rombuszok paralelogrammák. is. Ez elvezet minket a rombusz egy másik definíciójához: a rombusz egyenlő oldalú paralelogramma.

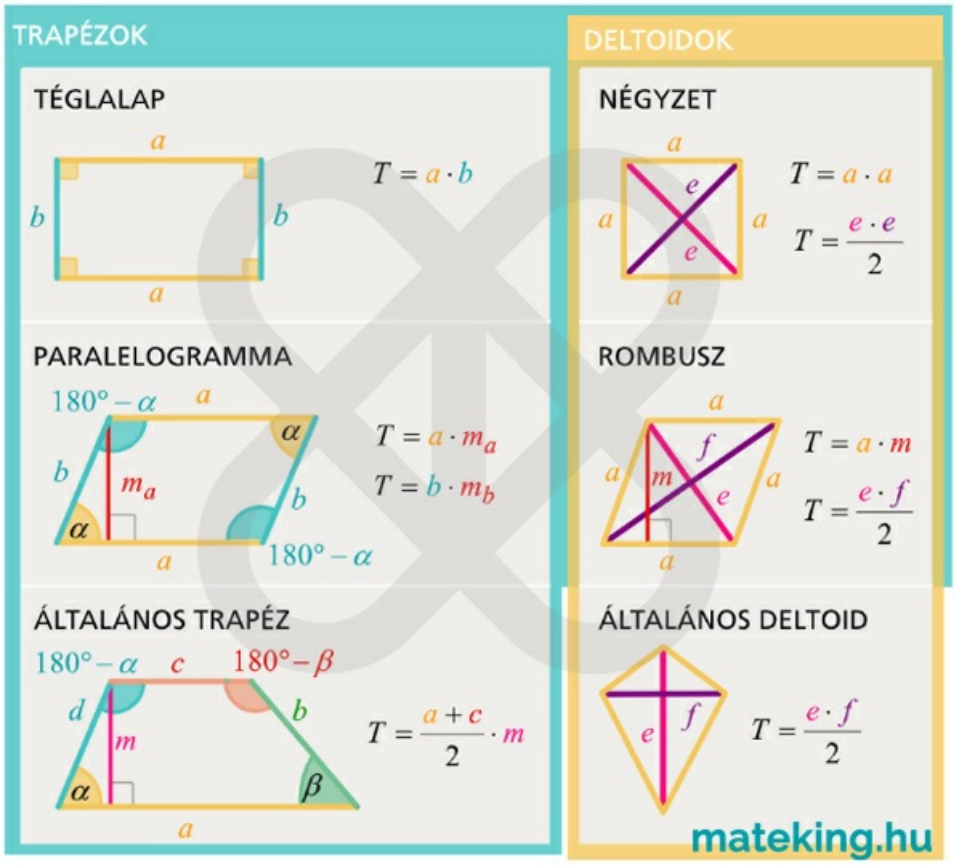
A rombusz magasságát m-mel jelöljük, az átlóit pedig e-nek és f-nek szokás nevezni. Ezeknek a segítségével tudjuk kiszámolni egy rombusz területét.

Területe:

$$T = a \cdot m = \frac{e \cdot f}{2}$$

Kerülete:

$$K = 4a$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

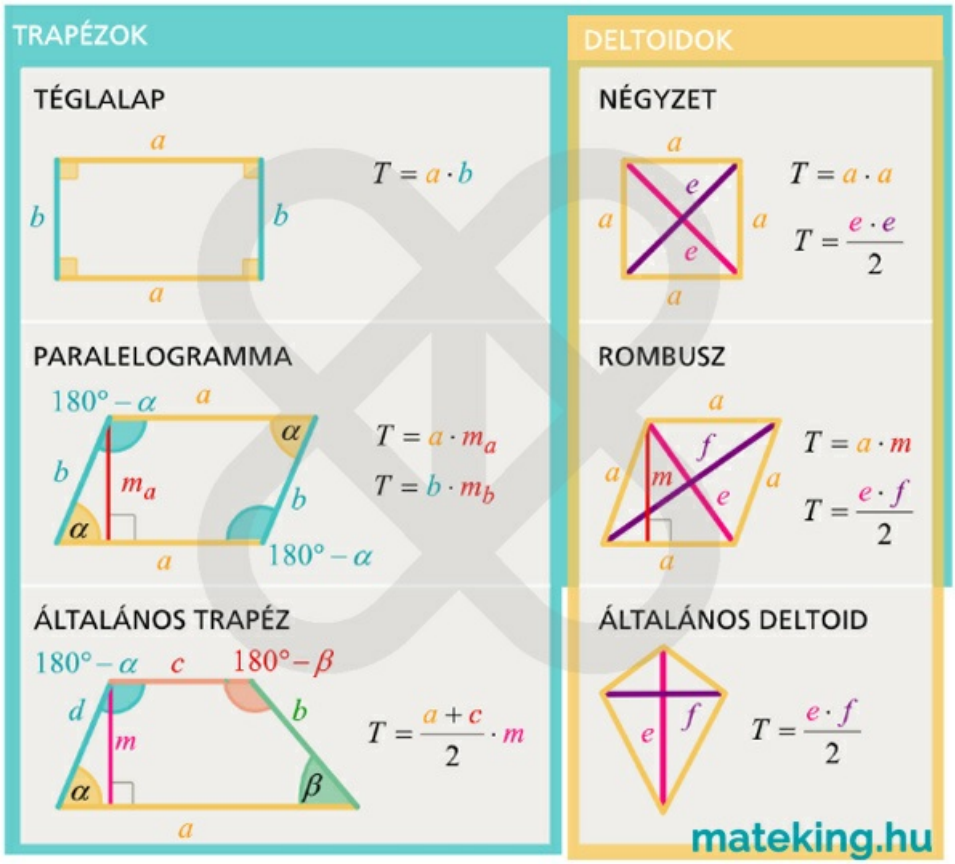
A paralelogramma olyan négyszög, aminek van két párhuzamos oldalpárja. Nagyon sok ilyen tulajdonságú négyszög van. Ilyenek a négyzetek, a téglalapok és a rombuszok. Vagyis minden négyzet, minden téglalap és minden qrombusz egyben paralelogramma is. A paralelogramma magasságát m-mel szokás jelölni.

Területe:

$$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

Kerülete:

$$K = 2a + 2b$$



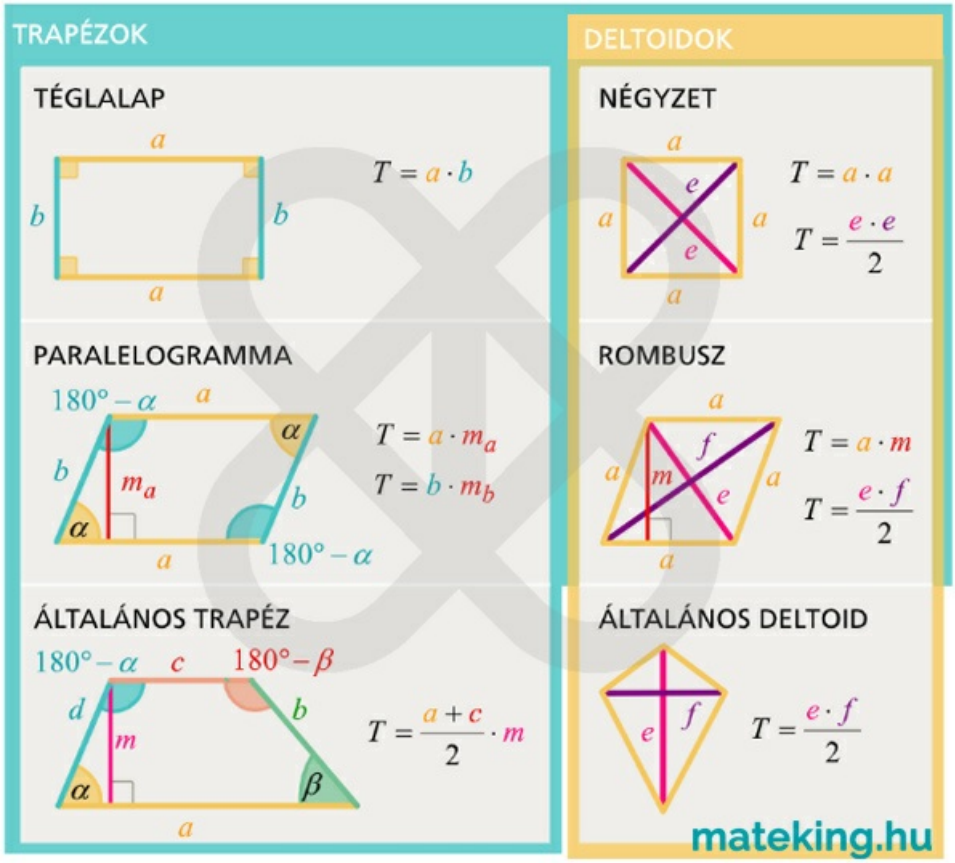
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A trapéz olyan négyszög, aminek van legalább egy párhuzamos oldalpárja. Ezeket az oldalakat a trapéz alapjainak nevezzük és a-val meg c-vel jelöljük. Általában a nagyobbik alapot szokás a-val jelölni és a kisebbik alapot pedig c-vel. Olyankor, amikor a trapéz alapjai egyforma hosszúak, paralelogrammát kapunk. Vagyis minden paralelogramma egyben trapéz is. Sőt, ha meggondoljuk, akkor a trapéz definíciója nagyon sok négyszögre ráillik. Egy darab párhuzamos oldalpárja ugyanis van a négyzetnek, a téglalapnak, a rombusznak és a paralelogrammáknak is. Vagyis minden négyzet, minden téglalap, minden rombusz és minden paralelogramma egyben trapéz is.

Mivel azonban ezeknek van külön neve, amikor egy feladatban trapézról van szó, általában olyan trapézra gondoljunk, aminek két különböző hosszúságú párhuzamos oldala van, az egyik "alul" a másik "felül" és ezek a trapéz a-val és c-vel jelölt alapjai.

Területe:

$$T = \frac{a+c}{2} \cdot m$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a trapéz alapján fekvő két szög ugyanakkora, olyankor a trapéz szimmetrikus.

A szimmetrikus trapézt még szokás egyenlő szárú trapéznak is hívni, ugyanis a két szára mindig egyforma hosszú.

Ezen kívül van egy fantasztikus tulajdonsága is, hogy van köré írható köre.

Innen ered a harmadik elnevezés: húrtrapéz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

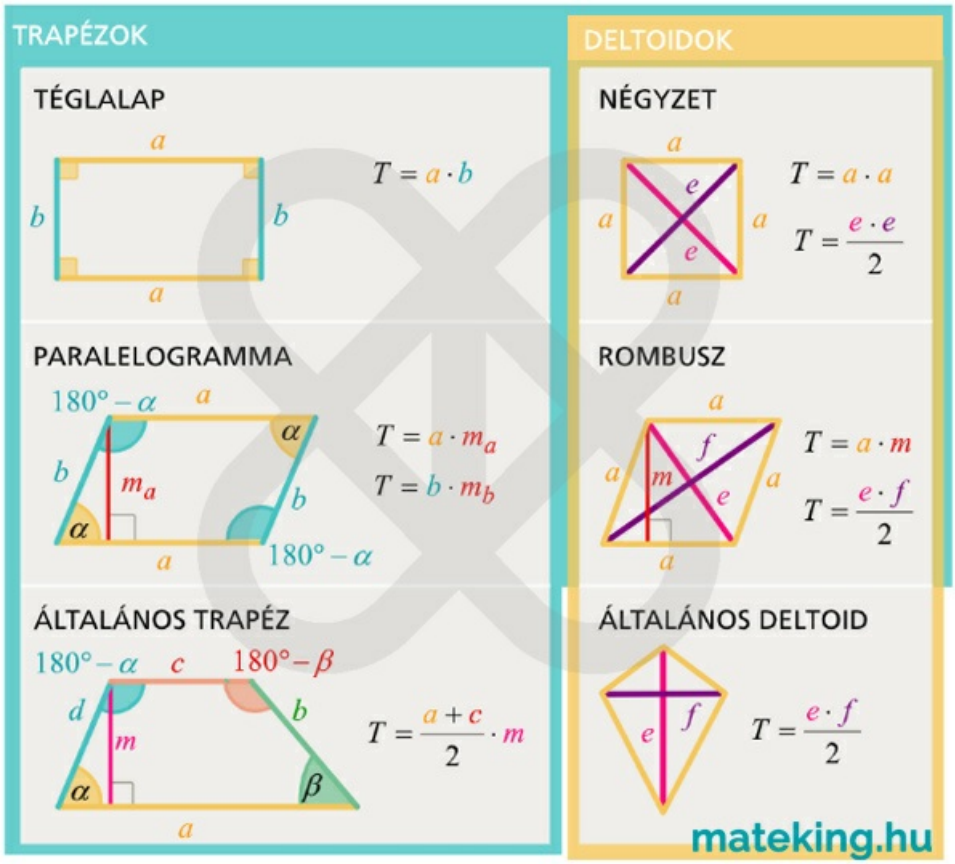
Azokat a négyszögeket nevezzük deltoidnak, amik papírsárkány alakúak és az átlóik merőlegesek egymásra.

Egy kicsit precízebben: deltoid az a négyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra és legalább az egyik átló szimmetriatengely.

A deltoidok közül kétféle speciális deltoidot érdemes megjegyezni, az egyik a rombusz, a másik a négyzet. Vagyis minden négyzet és minden rombusz deltoid. A deltoidok átlóit e-vel és f-fel jelöljük, és ezek csak akkor egyforma hosszúak, ha négyzetről van szó. A deltoidok területét általában az átlóik segítségével érdemes kiszámolni.

Területe:

$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometria a síkgeometriában

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{szöggel melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szöggel melletti befogó}} = \frac{a}{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének koszinuszát a következőképp értelmezzük:

$$\cos\alpha = \frac{\text{szöggel melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének szinuszát a következőképp értelmezzük:

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének tangensét a következőképp értelmezzük:

$$\tan\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szöggel melletti befogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körszelet területét úgy kapjuk, hogy először kiszámoljuk, hogy mekkora területű a körcikk, aztán pedig kivonjuk belőle az ebbe beleeső egyenlőszárú háromszög területét:

$$T_{\text{sz}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sin alpha}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szinusztétel és koszinusztétel

Bármely háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával. De ne ezt jegyezzük meg. A szinusztétel ennél sokkal többet is tud. Mégpedig ezt, ahol R a háromszög köré írható körének a sugara:

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Koszinusz tétel minden háromszögben felírható:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mátrixok és vektorok

Egy nXk-as mátrix tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor amátrix összes elemét meg kell szorozni a számmal.

pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor amátrix minden elemét osztani kell a számmal.

pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

A mátrixok összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix szorzata akkor létezik, ha a bal oldalimátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldalimátrix sorainak számával.

Ha az A mátrix m x n-es a B mátrix pedig n x k-s, akkor az eredménymátrix m x k-s lesz.

Az eredménymátrix i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldalimátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali mátrix j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

pl.: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A mátrix összeadás kommutatív:

$$A+B=B+A$$

És asszociatív:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kvadratikus mátrix négyzetes mátrix vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diagonális mátrix olyan kvadratikus mátrix, aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységmátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egységmátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

pl.: $I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz mátrix jele A^{-1} és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$A \cdot A^{-1} = I$ (jobb inverz)

$A^{-1} \cdot A = I$ (bal inverz)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

Pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

Pl.: $\frac{\begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

Pl.: $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$

asszociatív: $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

Pl.: $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-8\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A skaláris szorzat két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

Pl.: $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\quad\underline{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

$\underline{a}^T\cdot\underline{b}=3\cdot4+2\cdot1+5\cdot2=24$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}^T\cdot\underline{b}=\underline{b}^T\cdot\underline{a}$

nem asszociatív: $\left(\underline{a}^T\cdot\underline{b}\right)^T\cdot\underline{c}\neq\underline{a}^T\cdot\left(\underline{b}^T\cdot\underline{c}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektor diadikus szorzata egy mátrix. Lássuk milyen.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk jobbról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik oszlopát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk balról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik sorát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektorok, egyenesek és síkok egyenletei

A vektor egy irányított szakasz.

Jelölése: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$

A két vektor összege:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

A két vektor különbsége:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ vektor hossza:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza:

$$\overrightarrow{AB} = |\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

És pont ugyanígy kapjuk meg az A és B pontok távolságát is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két pont közti vektor a végpontba mutató helyvektor minusz a kezdőpontba mutató helyvektor.

Tehát $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$.

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzata:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

ahol γ a két vektor által bezárt szög

$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, vagyis az $\underline{a}$ vektor hossza

$|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, vagyis a $\underline{b}$ vektor hossza

Két vektor merőleges egymásra, ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ +90°-os elforgatottja:

$$a^{+90^\circ} = (-a_2, a_1)$$

Az $\underline{a}$ -90°-os elforgatottja:

$$a^{-90^\circ} = (a_2, -a_1)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektor skaláris szorzatát kiszámolhatjuk így:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$$

ahol γ a két vektor által bezárt szög,

$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, vagyis az $\underline{a}$ vektor hossza

$|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, vagyis az $\underline{b}$ vektor hossza

Illetve kiszámolhatjuk így is:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, azaz ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektorterek, független és összefüggő vektorok

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha aV halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden V-beli $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorhoz hozzárendelünk egy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektort, ami szintén eleme V-nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ V-beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan $\underline{0}$ V-beli vektor, hogy bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely $\underline{v}_1$ V beli vektorra létezik olyan $-\underline{v}_1$ V-beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden$V$-beli $\underline{v}_1$ vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \underline{v}_1$ vektort, ami szintén V-beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V-beli vektorra és λ skalárra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárokra: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységszeres: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan $\lambda_i \neq 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy V vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok generátor-rendszert alkotnak, ha minden $\underline{w}$ vektor a V vektortérben előáll $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$ alakban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg R^*-ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek n-nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő független vektorok maximális száma. R^3-ban a rang például maximum három lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A V vektortérnek W altere, ha $W \subset V$ és W maga is vektortér a V-beli műveletekre.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A legfeljebb n-ed fokú polinomok vektorteret alkotnak az összeadás és a skalárral való szorzás műveletekre.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $v_1, v_2, \ldots v_k$ vektorok által generált altér ezen vektorok lineáris kombinációja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azon vektorok lineáris kombinációjaként.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok rangja és inverze

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x-ek együtthatóiból álló mátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlósmátrix alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak $\underline{e}$-s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázistranszformáció során fent maradt x-ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány x_i fönt marad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss-Jordan elimináció a Gauss-elimináció pro változata. A dolog lényege az, hogy nemcsak a vezéregyesek alatt nullázzuk ki, hanem felettük is. Előnye, hogy így a megoldások az elimináció végeztével egyből leolvashatók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix oszloprangja az oszlopvektorai közül kiválasztható független vektorok maximális száma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix sorrangja a sorvektorai közül kiválasztható független vektorok maximális száma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mátrix rangja a mátrix Gauss elimináció során keletkezett vezéregyeseinek száma, amely megegyezik a mátrix sorrangjával vagy oszlopvektorával

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrixot teljes oszloprangúnak nevezünk, hogyha az oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrixot teljes sorrangúnak nevezünk, hogyha a sorvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármely mátrixot fel lehet bontani két olyan mátrix szorzatára, amelyek közül az egyik teljes oszloprangú, a másik pedig teljes sorrangú. Ezt bázisfelbontásnak hívják, és egy kiss Gauss-Jordan eliminációval tudjuk elkészíteni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett mátrix pedig az A mátrix inverze lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Determináns, adjungált, kvadratikus alakok

Ha az A egy n x n-es mátrix, akkor determinánsa

$det(A) = \sum_{\forall p}(-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 2x2-es mátrix determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A 3x3-as mátrixok determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A egy nxn-es mátrix, akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsa.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük szinguláris nak, amelyek determinánsa nulla.

Az A mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG<n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG=n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A mátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt egy 3x3-as mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt egy 2x2-es mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a22 \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a11 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az adjungált egyik legnagyobb haszna, hogy segítségével meg tudunk alkotni egy képletet a négyzetesmátrixok inverzére.

Itt is van:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenletrendszerek megoldására is megalkothatunk egy új képletet az adjungált segítségével.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Legalábbis abban az esetben, hogyha az A nxn-es invertálható mátrix.

Az egyenletrendszer megoldását úgy kapjuk meg, hogy beszorzunk az A mátrix inverzével...

$$\underline{x} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) \cdot \underline{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemek által generált Vandermonde-determináns első sorában x_1 hatványai szerepelnek, aztán a második sorában x_2 hatványai jönnek, és így tovább.

A Vandermonde-determinánst ezzel az egyszerű képlettel ki tudjuk számolni:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j<i}(x_i - x_j)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix sarok főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarok mátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarok mátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + - +$ de mínusszal indul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A nxn-es szimmetrikus mátrix és $\underline{x}$ egy vektor R^n-ben, akkor a

$$Q(x) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot