

Divergencia és rotáció

A vektormező divergenciája egy olyan függvény, amely a vektormező minden pontjában megméri, hogy ott mennyi anyag áramlik a rendszerbe vagy épp mennyi tűnik el.

A képlete:

$$\operatorname{div}(v(x, y)) = \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A rotáció a vektormező örvénylését írja le.

$$\operatorname{rot}(v(x, y)) = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y}$$

Azokban a pontokban, ahol $x = y$ a rotáció épp nulla.

Ha $x > y$ akkor a rotáció pozitív, és ha $x < y$ akkor negatív.

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező esetén:

$$\operatorname{rot}(v) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \cdot \underline{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \cdot \underline{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \cdot \underline{k} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektormező akkor forrásmentes, ha nincs benne forrás, vagyis nincs benne olyan pont, amelynek pozitív a divergenciája.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy vektormező akkor örvénymentes, ha a vektormező rotációja mindenütt nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A konzervatív vektormezőre több különböző definíció van forgalomban attól függően, hogy fizikusok vagy matematikusok alkották-e meg magát a definíciót.

#0 A $v(x, y, z)$ egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett vektormező pontosan akkor konzervatív, ha bármely pontjában a rotáció nulla.

#1 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha létezik primitív függvénye. Ezt a függvényt potenciál-függvénynek nevezzük, és íme, itt is van:

$$F(x, y, z) \quad v(x, y, z) = \left(\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}, \frac{\delta F}{\delta z} \right)$$

#2 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha tetszőleges A és B pontjára igaz, hogy bármely A és B közti görbén ugyanakkora a vektormező integrálja:

$$\int_{r_1(t)}^{r_2(t)} v(x, y) ds = \int_{A \rightarrow B} v(x, y) ds$$

#3 A $v(x, y, z)$ vektormező konzervatív, ha bármely zárt görbén a vektormező integrálja nulla.

$$\oint_{r(t)} v(x, y) ds = 0$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A vektormező akkor konzervatív, ha létezik F primitív függvénye. Ez az F függvény a vektormező potenciál-függvénye.

A potenciál-függvény egy vektor-skalár függvény, és azt tudja, hogy a vektormező minden pontjához hozzárendel egy számot.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Green-tétel #1 (zárt görbén vett örvénylés):

$$\oint_{r(t)} v(x, y) ds = \int_D \text{rot}(v) dydx$$

Az első Green-tétel azt írja le a rotáció segítségével, hogy mekkora egy vektormező örvénylése a zárt görbén.

Green-tétel #2 (zárt görbén vett fluxus)

A második Green-tétel pedig azt írja le a divergencia segítségével, hogy mekkora egy vektormező fluxusa a zárt görbén.

$$\oint_{r(t)} v(r(t)) \cdot n(t) dt = \int_D \text{div}(v) dydx$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A második Green-tétel térbeli változata azt mondja, hogy egy vektormező integrálja az S kifelé irányított zárt felületen egyenlő a divergencia integráljával a felület által határolt D tartományon.

$$\oint_{S(t,u)} v(S(t,u)) \cdot S'_t \times S'_u \, dudt = \int_D \operatorname{div}(v) \, dxdydz$$

Ezt a tételt divergencia-tételnek vagy másként Gauss-Ostrogradszkij-tételnek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az első Green-tétel térbeli megfelelője azt mondja, hogy a vektormező örvénylése egy zárt görbén kiszámolható úgy is, ha a görbe által határolt S felületen integráljuk a vektormező rotációját.

$$\oint_{r(t)} v(x,y,z) \, ds = \int_S \operatorname{rot}(v) \cdot \underline{n} \, ds$$

Ráadásul teljesen mindegy, hogy melyik felületen.

Az első Green-tétel térbeli változatát Stokes-tételnek nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)
