# MATEKING.HU

## Képletgyűjtemény

**MATEMATIKA 2 RKK tantárgy**

Kiadás dátuma: 2026. 10. 21.

# Tartalomjegyzék

Komplex számok..... **2**

Differenciálegyenletek..... **5**

Izoklinák..... **9**

Mátrixok, vektorok, vektorterek..... **10**

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze..... **19**

Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések..... **22**

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík..... **32**

Kétváltozós függvények..... **34**

Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság..... **37**

Vektormezők, görbementi és felületi integrálok..... **38**

Kettős és hármas integrál, térfogati integrál..... **39**

Divergencia és rotáció..... **41**

Valszám alapok, Kombinatorika..... **44**

Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel..... **45**

Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény..... **46**

Geometriai valószínűség, Binomiális tétel..... **49**

Várható érték és szórás..... **50**

Markov és Csebisev egyenlőtlenségek..... **51**

Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások..... **52**

Kétváltozós eloszlások..... **55**

Becslések..... **57**

Hipotézisvizsgálat..... **63**

Regressziószámítás..... **68**

# Komplex számok

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$

A két komplex szám összege:
$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

A két komplex szám különbsége:
$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt két komplex szám: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$

A két komplex szám szorzata:
$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c)i$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A komplex számok egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tegelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. Az imaginárius tengely egysége az i, ami olyan, mint a valós tengelyen az 1, csak éppen egy meglehetősen furcsa dolgot tud. Az imaginárius egység egy olyan komplex szám, aminek a négyzete $-1$ és $i$-vel jelöljük, azaz

$$i^2 = -1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A komplex számokat azért hívjuk "komplex"nek, mert két részből tevődnek össze. Egy valós és egy imaginárius (képzetes) számból épülnek föl. A valós számok a szokásos x tengelyen helyezkednek el, míg az imaginárius számok egy erre merőleges y tengelyen, amit imaginárius tegelynek, vagy képzetes tengelynek nevezünk. A komplex számok egy valós számból és egy imaginárius számból tevődnek össze:

$$z = a + bi$$

Itt $a$ és $b$ valós számok, az $i$ pedig az imaginárius egység, ami azt tudja, hogy $i^2 = -1$.

Magukat a valós számokat és az imaginárius számokat is komplex számnak tekinthetjük. A valós számok olyan komplex számok, amelyeknek az imaginárius része nulla, míg az imaginárius számok olyankomplex számok, amelyeknek a valós része nulla. A komplex számok egy síkon, az úgynevezett komplex számsíkon helyezkednek el. Kicsit olyanok, mint a koordinátageometriában a kétdimenziós sík vektorai, ahol az i és j bázisvektorkat szokás használni, az x tengelynél az i és az y tengelynél a j vektorral. Ennek az analógiának köszönhetően vannak, akik az imaginárius számokat nem is i-vel, hanem j-vel jelölik. Bár ez segíthet erősíteni az analógiát a sík vektoraival, de mégis zavaró, mivel aki komolyabban is fogalakozik a komplex számokkal, a hivatalos jelöléssel fog találkozni, ahol az imaginárius tengelyen i-k vannak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A valós számokat úgy érdemes elképzelni, mint egy koordinátarendszer x tengelyét. És minden helyet ki is töltenek a valós számok ezen a számegyenesen. A komplex számok egy valós és egy imaginárius (képzetes) részből épülnek föl, és szemléltetésükhöz nem egy, hanem két koordinátatengelyre van szükség. Az x tengelyen vannak a valós számok, az y tengelyen pedig az imaginárius, vagyis a képzetes számok. A valós számok tengelyén az egység a szokásos 1, míg az imaginárius számok tengelyén az egység az i. A kétb tengely által kifeszített síkot nevezzük komplex számsíknak, vagy másknt Gauss-féle számsíknak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt ez a komplex szám:

$$z = a + bi$$

Komplex számoknak van ilyenje, hogy imaginárius egység:

$$i^2 = -1$$

Komplex számok konjugáltja:

$$\overline{z} = a - bi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt ez a komplex szám: $z = a + bi$

Ennek a komplex számnak az abszolútértéke:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, ahol

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt két komplex szám trigonometrikus alakban: $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right), z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$

Komplex számok szorzása trigonometrikus alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right)$$

Komplex számok osztása trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban:$r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$

Ekkor ennek a komplex számnak az $n$-edik hatványa:

$$z^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt ez a komplex szám trigonometrikus alakban:$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$

Ekkor ennek a komplex számnak az $n$-edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt két komplex szám exponenciális alakban:$z_1=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$

Komplex számok szorzása exponenciális alakban:

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Komplex számok osztása exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban:$z=re^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az $n$-edik hatványa:

$$z^n=r^ne^{ni\theta}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt ez a komplex szám exponenciális alakban:$z=re^{i\theta}$

Ekkor ennek a komplex számnak az $n$-edik gyöke:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Differenciálegyenletek

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A szeparábilis differenciálegyenlet így néz ki:

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az $y'$-t lecseréljük arra, hogy $\frac{dy}{dx}$.

Aztán jön a szétválasztás: minden $y$-os dolgot a $dy$-os oldalra viszünk és minden $x$-eset a $dx$-es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy differenciálegyenlet homogén fokszámú, ha $y = ux$ helyettesítés után minden $x$-es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú differenciálegyenletek megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az $y(x) = xu(x)$ (röviden $y = xu$) helyettesítést, ekkor $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol $y$ helyett most $u$-ra hajtunk. És amikor $u$ már megvan, visszacsináljuk $y$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ differenciálegyenlet akkor egzakt, ha $p'_y(x,y) = q'_x(x,y)$, röviden $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$.

Az egzakt egyenletek megoldása $F(x,y) = C$, ahol $F'_x(x,y) = p(x,y)$ és $F'_y(x,y) = q(x,y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x,y) = \int p(x,y)\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha a differenciálegyenlet nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p}$ és $\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$

Ha ezek közül az első csak y-t tartalmaz, vagy a második csak x-et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$u = e^{-\int f(y)\,dy}$ vagy $u = e^{\int g(x)\,dx}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy$y'$, és van benne egy elsőfokú $y$.

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy $v(x)$ függvényt:

$$v = e^{\int P(x)\,dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet $v(x)$-el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)'\,dx = \int vQ(x)\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A konstans variálás módszere egy megoldási módszer az elsőrendű lineáris differenciálegyenletekhez.

Első lépésként megoldjuk az úgynevezett homogén egyenletet, ami ez:

$$y' + yP(x) = 0$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_0 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Ezt követően jön a konstansok variálása, azt mondjuk, hogy a megoldásban szereplő konstans legyen egy $C(x)$ függvény. És ezt a $C(x)$ függvényt úgy variáljuk, hogy ha behelyettesítjük az egyenletbe, akkor épp az inhomogén egyenlet jobb oldalát kapjuk.

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$$

Az egyenlet megoldását úgy kapjuk meg, hogy a homogén megoldásban $C(x)$ helyére beírjuk, ami kijött.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósnak, mert a $P(x)$ függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk $a$.

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

A homogén egyenlet: $y' + ay = 0$

A homogén megoldás: $y_0 = Ce^{-ax}$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvénytől függ:

$Q(x) =$ másodfokú polinom: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$Q(x) =$ harmadfokú polinom: $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$Q(x) =$ exponenciális kifejezés: $y_p = Ae^{\alpha x}$

$Q(x) =$ szinusz vagy koszinusz: $y_p = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet partikuláris megoldásában szerepel $e^{\alpha x}$ és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van$r_1$ és $r_2$ akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van$r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax}\left(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet: $ar^2 + br + c = 0$.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van$r_1$ és $r_2$ akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van$r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax}\left(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx\right)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$Q(x) =$ polinom: $y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$

$Q(x) =$ exponenciális kifejezés: $y_p = Ae^{\alpha x}$

$Q(x) =$ szinusz vagy koszinusz: $y_p = A\cos \alpha x + B \sin \alpha x$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Izoklinák

Azon pontok halmazát, melyekben a megoldásfüggvények meredeksége egy adott számmal egyenlő, a differenciálegyenlet izoklinájának nevezzük.

Az $y' = f(x, y(x))$ izoklináinak egyenlete:

$$f(x, y(x)) = K$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

# Mátrixok, vektorok, vektorterek

Egy nXk-as mátrix tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor amátrix összes elemét meg kell szorozni a számmal.

pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor amátrix minden elemét osztani kell a számmal.

pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két mátrix összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

A mátrixok összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két mátrix kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két mátrix szorzata akkor létezik, ha a bal oldalimátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldalimátrix sorainak számával.

Ha az A mátrix m x n-es a B mátrix pedig n x k-s, akkor az eredménymátrix m x k-s lesz.

Az eredménymátrix i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldalimátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali mátrix j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

pl.: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A mátrix összeadás kommutatív:

$$A+B=B+A$$

És asszociatív:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A kvadratikus mátrix négyzetes mátrix vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A diagonális mátrix olyan kvadratikus mátrix, aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az egységmátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely $A$ mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egységmátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

pl.: $I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az inverz mátrix jele $A^{-1}$ és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$A \cdot A^{-1} = I$ (jobb inverz)

$A^{-1} \cdot A = I$ (bal inverz)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele $A^T$ vagy $A^*$

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

Pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

Pl.: $\frac{\begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

Pl.: $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$

asszociatív: $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

Pl.: $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-8\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A skaláris szorzat két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

Pl.: $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\quad\underline{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

$\underline{a}^T\cdot\underline{b}=3\cdot4+2\cdot1+5\cdot2=24$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}^T\cdot\underline{b}=\underline{b}^T\cdot\underline{a}$

nem asszociatív: $\left(\underline{a}^T\cdot\underline{b}\right)^T\cdot\underline{c}\neq\underline{a}^T\cdot\left(\underline{b}^T\cdot\underline{c}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két vektor diadikus szorzata egy mátrix. Lássuk milyen.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy mátrixot megszorzunk jobbról egy $\underline{e_i}$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik oszlopát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy mátrixot megszorzunk balról egy $\underline{e_i}$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik sorát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van a síkban két pont: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt két pont a síkban: $P(x_1, y_1)$ és $Q(x_2, y_2)$.

Ekkor a két pont közti távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ha a térben veszünk két pontot: $P(x_1, y_1, z_1)$ és $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Akkor a két pont közti távolság a térben:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Van itt két vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

A két vektor vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra, és

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $V$ nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha a $V$ halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden $V$-beli $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorhoz hozzárendelünk egy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektort, ami szintén eleme $V$-nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ $V$-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ $V$-beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan $\underline{0}$ $V$-beli vektor, hogy bármely $\underline{v}_1$ $V$-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely $\underline{v}_1$ $V$ beli vektorra létezik olyan $-\underline{v}_1$ $V$-beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden $V$-beli $\underline{v}_1$ vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \underline{v}_1$ vektort, ami szintén $V$-beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely $\underline{v}_1$ $V$-beli vektorra és $\lambda, \mu$ skalárra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ $V$-beli vektorra és $\lambda$ skalárra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárokra: bármely $\underline{v}_1$ $V$-beli vektorra és $\lambda, \mu$ skalárra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységszeres: bármely $\underline{v}_1$ $V$-beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan $\lambda_i \neq 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy $V$ vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok generátor-rendszert alkotnak, ha minden $\underline{w}$ vektor a $V$ vektortérben előáll $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$ alakban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg $R^*$-ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek $n$-nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő független vektorok maximális száma. $R^3$-ban a rang például maximum három lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $V$ vektortérnek $W$ altere, ha $W \subset V$ és $W$ maga is vektortér a $V$-beli műveletekre.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azon vektorok lineáris kombinációjaként.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok inverze

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x-ek együtthatóiból álló mátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlósmátrix alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak $\underline{e}$-s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A bázistranszformáció során fent maradt x-ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány $x_i$ fönt marad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a $b$ helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az $A$ helyén, a $b$ helyén keletkezett mátrix pedig az $A$ mátrix inverze lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Négyzetes mátrixok inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a $b$ helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a $b$ helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

# Determináns, sajátérték, sajátvektor, leképezések

Ha az $A$ egy $n$ $x$ $n$-es mátrix, akkor determinánsa

$det(A) = \sum_{\forall p}(-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}$

ahol $p$ az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy 2x2-es mátrix determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A 3x3-as mátrixok determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha az $A$ egy nxn-es mátrix, akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az $a_{ij}$ elemhez tartozó aldeterminánsa.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Azokat a mátrixokat nevezzük szinguláris nak, amelyek determinánsa nulla.

Az $A$ mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik $A^{-1}$ inverz mátrix
- RANG<n
- Az $A$ mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az $A$ mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik $A^{-1}$ inverz mátrix
- RANG=n
- Az $A$ mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az $A$ mátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ nxn-es mátrix sajátértéke egy olyan $\lambda$ valós szám, amelyhez van valami $\underline{v}$ nem nullvektor, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátérték lényege, hogy vannak olyan mátrixok, és olyan vektorok, hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. Az egységmátrixpéldául ilyen: ha az egységmátrixszal megszorzunk egy tetszőleges vektort, akkor ugyanazt a vektort kapjuk. Ilyenkor minden vektor sajátvektor és a sajátérték 1, mert minden vektorból az 1-szerese lesz.

A sajátvektorok és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le. A síkbeli tükrözés az x tengelyre például egy geometriai transzformáció, aminek a mátrixa két sajátértékkel rendelkezik. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Az y tengelyen lévő vektorok viszont az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátértékei. Az 1 és a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ nxn-es mátrix sajátvektora egy olyan $\underline{v}$ nem nullvektor, amelyhez van valami $\lambda$ valós szám, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátvektor lényege, hogy vannak olyan mátrixok, és olyan vektorok, hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. A sajátvektorok és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le.

Vegyük például a síkbeli tükrözést az x tengelyre. Ez egy geometriai transzformáció. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Vagyis ezek a vektorok egytől egyig sajátvektorok, mert teljesítik azt amit egy sajátvektornak tudnia kell: ha megszorozzuk a mátrixokt a vektorral, akkor az eredeti vektor számszorosát kapjuk. Itt most éppen az eredeti vektor 1-szeresét kapjuk. Az y tengelyen lévő vektorok szintén sajátvektorok, mert az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. Vagyis ezek a vektorok saját maguk -1-szeresei lesznek. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátvektorai: az x tengely és az y tengely vektorai. Az x tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték az 1, míg az y tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A karakterisztikus egyenlet a sajátértékek kiszámolásához szükséges egyenlet:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet segít nekünk kiszámolni egy mátrix sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Az egyenletet karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy nxn-es mátrix karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5x5-ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A-\lambda\cdot I)$$

A karakterisztikus polinom segít nekünk kiszámolni egy mátrix sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Vagyis a sajátértékek mindig a karakterisztikus polinom gyökei. Előfordul, hogy egy sajátérték többszörös gyök, és az is megeshet, hogy komplex gyökei vannak a karakterisztikus polinomnak.

Azt az egyenletet, amikor a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy nxn-es mátrix karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5x5-ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A)=X^{-1}\cdot A\cdot X$$

itt $X=(\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az $A$ mátrix egy $n$ x $n$-es diagonalizálható mátrix, akkor a sajátfelbontása:

$$A = X \cdot diag(A) \cdot X^{-1}$$

Itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$ vagyis egyszerűen úgy keletkezi, hogy a sajátvektorokat fogjuk, és leírjuk egymás mellé és

$$diag(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A spektrálfelbontás segítségével könnyebben hatványozhatunk:

$$A^n = X \cdot (diag(A))^n \cdot X^{-1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy mátrix sarok főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarok mátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy mátrix főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarokmátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ nxn-es mátrix pozitív definit, ha minden $\lambda$ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ nxn-es mátrix negatív definit, ha minden $\lambda$ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + - +$ de mínusszal indul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ nxn-es mátrix pozitív szemidefinit, ha minden $\lambda$ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ nxn-es mátrix negatív szemidefinit, ha minden $\lambda$ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ nxn-es mátrix indefinit, ha van $\lambda_1$ és $\lambda_2$ sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha $A$ nxn-es szimmetrikus mátrix és $\underline{x}$ egy vektor $R^n$-ben, akkor a

$$Q(x) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $\varphi$ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezésnél $V_2$-nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más $V_1$-beli vektorok képe is nullvektor lesz. Ezen vektorok halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja $V_1$ dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a mátrixok pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist $V_1$-ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $\varphi$ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

$\varphi^{-1}$ mátrixa $(\varphi)_b^{-1}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $\varphi$ lineáris leképezésnek a $\underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \dots\ \underline{b}_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1)\ \varphi(\underline{b}_2)\ \varphi(\underline{b}_3)\ \dots\ \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is $V_1$-ben, a leképezés mátrixa mindig egy nxn-esmátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak $V_1$-ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret $Hom(V_1, V_2)$-nek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha $A$ és $B$ olyan mátrixok, hogy létezik egy $C$ mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík

Az $f(x,y)$ függvény $x$ és $y$ szerinti deriváltjaiból álló vektort gradiensnek nevezzük.

A gradienst szokás deriváltvektornak is nevezni, és az $f(x,y)$ kétváltozós függvény gradiensvektorát úgy jelöljük, hogy $\text{grad}\,(f(x,y))$.

A gradiensvektor elnevezés onnan ered, hogy éppen a gradiens vektor irányában emelkedik mindig a legjobban a kétváltozós függvény grafikonja, ami egy felület.

Az $f(x,y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az $(x_0,y_0)$ pontban:

$$\text{grad}\,(f(x_0,y_0)) = \nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

A gradiens segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $f(x,y)$ függvény $x$ és $y$ szerinti deriváltjaiból álló vektort deriváltvektornak nevezzük.

A deriváltvektort szokás gradiensnek is nevezni, és az $f(x,y)$ kétváltozós függvény deriváltvektorát úgy jelöljük, hogy $\nabla f(x,y)$.

Az $f(x,y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az $(x_0,y_0)$ pontban:

$$\text{grad}\,(f(x_0,y_0)) = \nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

A deriváltvektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0,y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta \underline{e}} = \text{grad}\,(f(x_0,y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogyha a kétváltozós függvény grafikonjának egy pontjában áll egy hagymászó, és elindul egy $\underline{v}$ irányban, akkor ebben az irányban milyen meredeken emelkedik a felület.

Ahogy a $\underline{v}$ irányt változtatjuk, az iránymenti derivált értéke is változik.

És van egy olyan $\underline{v}$ irány, ahol az iránymenti derivált maximális. Ezt az irányt nevezzük gradiens iránynak és ez mindig megegyezik a deriváltvektor irányával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A függvényeket két nagy típusba sorolhatjuk, az explicit és az implicit függvények csoportjába. Az explicit függvények azok, amelyek egy konkrét képlettel vannak megadva, míg az implicit függvények valamilyen egyenlet formájában adhatók meg.

Egy függvény akkor implicit, ha $y$ nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha $F(x, y) = 0$ egy implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ egy $n$ változós implicit függvény, akkor az $x_i$, mint implicit függvény deriváltja az $x_j$ változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $f(x,y)$ függvény $x$ szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy $x$ szerint deriválunk, $y$ most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami $x$-essel, akkor marad

Az $f(x,y)$ függvény $y$ szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy $y$ szerint deriválunk, $x$ most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami $y$-ossel, akkor marad

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x,y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x,y)$$

---

Második lépés:

$$f'_x(x,y) = 0$$

$$f'_y(x,y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

---

Harmadik lépés:

$$\underline{f''} = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkétparciális derivált nulla, az $f(x,y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha az $f$ többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek $f$ első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \cdots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor $x_0$ az $f$ többváltozós függvény stacionárius pontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A másodrendű deriváltakból képzett mátrix, amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az $f$ függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x,y) = c$, az $f$ függvény szintvonalának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0,y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta \underline{e}} = \operatorname{grad}(f(x_0,y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A függvényeket két nagy típusba sorolhatjuk, az explicit és az implicit függvények csoportjába. Az explicit függvények azok, amelyek egy konkrét képlettel vannak megadva, míg az implicit függvények valamilyen egyenlet formájában adhatók meg.

Egy függvény akkor implicit, ha $y$ nincs kifejezve, vagyis nem $y = \ldots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha $F(x,y) = 0$ egy implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$ egy $n$ változós implicit függvény, akkor az $x_i$, mint implicit függvény deriváltja az $x_j$ változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}{F'_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Kétváltozós határérték és totális differenciálhatóság

Az $f(x,y)$ függvény határértéke az $R(x_0,y_0)$ pontban $B$, ha minden $\epsilon > 0$-ra van $\delta > 0$ úgy, hogy ha $(x,y)$ eleme az $R(x_0,y_0)$ pont $\delta$ sugarú környezetének, vagyis ha

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

akkor

$$|f(x,y) - B| < \epsilon$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $f(x,y)$ kétváltozós függvény totálisan differenciálható az $(x_0,y_0)$ helyen, ha léteznek olyan $A$ és $B$ valós számok, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-(A(x-x_0)+B(y-y_0)+f(x_0,y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $f(x,y)$ kétváltozós függvény $x$ szerinti parciális deriváltja:

$$\lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = f'_x(x_0,y_0) = \frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta x}$$

Az $f(x,y)$ kétváltozós függvény $y$ szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x_0,y_0) = \frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta y}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Vektormezők, görbementi és felületi integrálok

A vektormező egy olyan függvény, ami egy tér pontjaihoz vektort rendel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $v(x,y)$ vektormezőnek az $r(t)=(x(t),y(t))$ görbe mentén vett integrálja $t_1$ és $t_2$ között:

$$\int_r v(x,y)\,ds=\int_{t_1}^{t_2} v\left(x(t),y(t)\right)\cdot\left(x'(t),y'(t)\right)\,dt$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A fluxus azt mondja meg, hogy egy adott felületen mekkora az átáramló anyag vagy energia.

A fluxust a vektormező vektorainak és a felület normálvektorainak skaláris szorzata adja.

$$\int_S v(x,y,z)\,ds=\int_A v(x,y,z)\cdot\underline{n}\,dA$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $v(x,y,z)$ vektormezőnek az $S(t,u)=(x(t,u),y(t,u),z(t,u))$ felületi integrálja:

$$\int_S v(x,y,z)\,ds=\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2} v\left(x(t,u),y(t,u),z(t,u)\right)\cdot S'_t\times S'_u\,dudt$$

ahol

$$S'_t\times S'_u=\det\begin{bmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ \frac{dx(t,u)}{dt} & \frac{dy(t,u)}{dt} & \frac{dz(t,u)}{dt}\\ \frac{dx(t,u)}{du} & \frac{dy(t,u)}{du} & \frac{dz(t,u)}{du}\end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A $v(x,y,z)$ vektormezőnek az $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ görbe mentén vett integrálja:

$$\int_r v(x,y,z)\,ds=\int_{t_1}^{t_2} v\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)\,dt$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Kettős és hármas integrál, térfogati integrál

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátáit, kirajzolódik az $x, y$ sík felett a függvény, ami egy felület.

A kétváltozós függvények határozott integrálja így egy test térfogata.

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A kettősintegrálok segítségével különböző felületek alatti térfogatokat tudunk kiszámolni.

A legegyszerűbb eset, amikor egy téglalapon integrálunk. Ilyenkor az integrálás határai valamilyen számok.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$$

A sorrend megcserélhető: mindegy, hogy először az $x$ szerinti határokat adjuk meg és utána az $y$ szerintit vagy fordítva.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A polárkoordinátás helyettesítés egy olyan helyettesítés, ami remekül alkalmazkodik a kör tulajdonságaihoz. A dolog lényege, hogy a körben a hagyományos $x$ és $y$ koordináták helyett új koordinátákat vezetünk be.

Az egyik azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk a kör középpontjától és ez $r$-nek nevezzük.

A másik pedig egy forgásszög, és jele $\theta$.

Az új koordinátákat polárkoordinátáknak nevezzük, a módszert pedig polárkoordinátás helyettesítésnek. A kapcsolat a régi és az új koordináták között a következő:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

A polárkoordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek. A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int\int_D f(x,y)\, dydx = \int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A henger-koordináták:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

A henger-koordinátás helyettesítés elvégzése után az integrálásban drasztikus változások lesznek.

A helyettesítést ezzel a képlettel végezzük:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\, dxdydz = \int\int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, drd\theta dz$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A polárkoordináták háromdimenziós változatát gömbi koordinátáknak nevezzük.

Az $r$ azt mondja meg, hogy milyen távol vagyunk az origótól, a $\varphi$ és $\theta$ pedig két forgás-szög.

A régi $x, y, z$ és az új gömbi koordináták közti kapcsolat:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta \quad y = r\sin\varphi\sin\theta \quad z = r\cos\varphi$$

A gömb koordinátás helyettesítés:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_D f\left(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\right) r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

# Divergencia és rotáció

A vektormező divergenciája egy olyan függvény, amely a vektormező minden pontjában megméri, hogy ott mennyi anyag áramlik a rendszerbe vagy épp mennyi tűnik el.

A képlete:

$$div\left(v(x,y)\right) = \frac{\delta v_1(x,y)}{\delta x} + \frac{\delta v_2(x,y)}{\delta y}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A rotáció a vektormező örvénylését írja le.

$$rot\left(v(x,y)\right) = \frac{\delta v_2(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta v_1(x,y)}{\delta y}$$

Azokban a pontokban, ahol $x = y$ a rotáció épp nulla.

Ha $x > y$ akkor a rotáció pozitív, és ha $x < y$ akkor negatív.

$R^3 \to R^3$ vektormező esetén:

$$rot(v) = \left(\frac{\delta v_3}{\delta y} - \frac{\delta v_2}{\delta z}\right) \cdot \underline{i} + \left(\frac{\delta v_1}{\delta z} - \frac{\delta v_3}{\delta x}\right) \cdot \underline{j} + \left(\frac{\delta v_2}{\delta x} - \frac{\delta v_1}{\delta y}\right) \cdot \underline{k} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy vektormező akkor forrásmentes, ha nincs benne forrás, vagyis nincs benne olyan pont, amelynek pozitív a divergenciája.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy vektormező akkor örvénymentes, ha a vektormező rotációja mindenütt nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A konzervatív vektormezőre több különböző definíció van forgalomban attól függően, hogy fizikusok vagy matematikusok alkották-e meg magát a definíciót.

#0 A $v(x,y,z)$ egyszeresen összefűgő tartományon értelmezett vektormező pontosan akkor konzervatív, ha bármely pontjában a rotáció nulla.

#1 A $v(x,y,z)$ vektormező konzervatív, ha létezik primitív függvénye. Ezt a függvényt potenciál-függvénynek nevezzük, és íme, itt is van:

$$F(x,y,z) \qquad v(x,y,z) = \left(\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}, \frac{\delta F}{\delta z}\right)$$

#2 A $v(x,y,z)$ vektormező konzervatív, ha tetszőleges A és B pontjára igaz, hogy bármely A és B közti görbén ugyanakkora a vektormező integrálja:

$$\int_{\substack{r_1(t)\\A\to B}} v(x,y)\,ds = \int_{\substack{r_2(t)\\A\to B}} v(x,y)\,ds$$

#3 A $v(x,y,z)$ vektormező konzervatív, ha bármely zárt görbén a vektormező integrálja nulla.

$$\oint_{r(t)} v(x,y)\,ds = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A vektormező akkor konzervatív, ha létezik $F$ primitív függvénye. Ez az $F$ függvény a vektormező potenciál-függvénye.

A potenciál-függvény egy vektor-skalár függvény, és azt tudja, hogy a vektormező minden pontjához hozzárendel egy számot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Green-tétel #1 (zárt görbén vett örvénylés):

$$\oint_{r(t)} v(x,y)\,ds = \int_D rot(v)\,dydx$$

Az első Green-tétel azt írja le a rotáció segítségével, hogy mekkora egy vektormező örvénylése a zárt görbén.

Green-tétel #2 (zárt görbén vett fluxus)

A második Green-tétel pedig azt írja le a divergencia segítségével, hogy mekkora egy vektormező fluxusa a zárt görbén.

$$\oint_{r(t)} v(r(t)) \cdot n(t)\,dt = \int_D div(v)\,dydx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A második Green-tétel térbeli változata azt mondja, hogy egy vektormező integrálja az $S$ kifelé irányított zárt felületen egyenlő a divergencia integráljával a felület által határolt $D$ tartományon.

$$\oint_{S(t,u)} v\left(S(t,u)\right) \cdot S'_t \times S'_u \, dudt = \int_D div(v) \, dxdydz$$

Ezt a tételt divergencia-tételnek vagy másként Gauss-Osztrogradszkij-tételnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az első Green-tétel térbeli megfelelője azt mondja, hogy a vektormező örvénylése egy zárt görbén kiszámolható úgy is, ha a görbe által határolt $S$ felületen integráljuk a vektormező rotációját.

$$\oint_{r(t)} v(x,y,z) \, ds = \int_S rot(v) \cdot \underline{n} \, ds$$

Ráadásul teljesen mindegy, hogy melyik felületen.

Az első Green-tétel térbeli változatát Stokes-tételnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Valszám alapok, Kombinatorika

Eseményeknek nevezzük a valószínűségi kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.

Megkülönböztetünk elemi eseményeket, ilyen például, hogy egy dobókockával 1-est dobunk. Vannak azonban olyan események is amik több elemi eseményből épülnek fel, ilyen például az, hogy párosat dobunk.

Az eseményeket az ABC nagybetűivel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az esemény valószínűségét úgy kaphatjuk meg, hogy megszámoljuk hány elemi eseményből áll és ezt elosztjuk az összes elemi esemény számával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ és $B$ eseményt egymástól függetlennek nevezzük, ha teljesül rájuk, hogy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ és $B$ eseményt kizárónak nevezünk, ha

$$A \cap B = \emptyset$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $A$ esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a $B$ esemény biztosan bekövetkezik:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

Ha $B_1$, $B_2$ és így tovább $B_n$ teljes eseményrendszer, valamint $A$ tetszőleges esemény, akkor

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A Bayes tételt akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett ($B_k$) esemény valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett ($A$) tükrében.

Ha $B_1, B_2$ és így tovább $B_n$ teljes eseményrendszer, valamint $A$ tetszőleges esemény, akkor bármely $B_k$ eseményre

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Folytonosnak nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik folytonos mennyiségeket mérnek, ilyen például az idő, a távolság. Ebben az esetben az eloszlás függvény is mindig folytonos függvény lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Diszkrétnek nevezzük azokat a valószínűségi változókat, amik megszámlálhatóan sok értéket vesznek fel. Ez azt jelenti, hogy vagy véges sokat, vagy végtelent, de úgy, hogy fel tudjuk sorolni az értékeit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(X < x)$$

Ha az $X$ valószínűségi változó diszkrét és értékei $X = a, X = b, X = c$ meg ilyenek, akkor az eloszlásfüggvény mindig egy lépcsőzetes függvény, ami minden számnál pontosan akkorát ugrik, mint az adott szám valószínűsége, amíg el nem érjük az 1-et.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{ha } x \leq a \\ P(X = a) \quad \text{ha } a < x \leq b \\ P(X = a) + P(X = b) \quad \text{ha } b < x \leq c \\ \dots \\ 1 \end{cases}$$

Ha az $X$ valószínűségi változó folytonos, akkor az $a$ és $b$ számok között bármilyen valós értéket fölvehet. Ilyenkor az eloszlásfüggvény is folytonos, ami $a$-ig nullát vesz föl, $a$ és $b$ közt növekszik és $b$ után végig egyet vesz föl.Vagyis ahol az $X$ valószínűségi változó működik, ott a függvény életre kel, előtte és utána pedig hibernált állapotban van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sűrűségfüggvény úgy működik, hogy a valószínűségeket a görbe alatti területek adják meg. Az eloszlásfüggvény jele $F(x)$ volt, a sűrűségfüggvény jele $f(x)$. Az $a < X < b$ valószínűség éppen a görbe alatti terület $a$-tól $b$-ig.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ha az $X < a$ valószínűséget szeretnénk kiszámolni:

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

Ha a $b < X$ valószínűséget:

$$P(b < X) = \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

Ha ezt a három területet összeadjuk, akkor éppen a teljes görbe alatti területet kapjuk, ami a 100%-ot jelenti, így hát ez a terület éppen 1.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

nem negatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1. $\lim_{-\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{\infty} F(x) = 1$
3. monoton nő
4. balról folytonos

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
2. nem negatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$$P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

$$P(b < X) = 1 - F(b) = \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $X$ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényéből úgy kapjuk meg az $f(x)$ sűrűségfüggvényét, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt deriváljuk, azaz:

$$F'(x) = f(x)$$

Ha az $X$ valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségi függvényét ismerjük, és meg akarjuk adni az $F(x)$ eloszlásfüggvényét, akkor azt pedig így tehetjük:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

# Geometriai valószínűség, Binomiális tétel

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Binomiális tétel:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

# Várható érték és szórás

A várható érték jele $E(X)$.

Diszkrét esetben úgy kell kiszámolni, hogy

$$E(X) = \sum X_i P(X_i)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A szórás azt mutatja meg, hogy a várható érték körül milyen nagy ingadozásra számíthatunk.

Jele: $D(X)$

Kiszámításának módja diszkrét esetben:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Folytonos valószínűségi változók esetén a várható érték:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Folytonos valószínűségi változó esetén a szórást ugyanúgy kell számolni, mint diszkrétvalószínűségi változó esetén:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Markov és Csebisev egyenlőtlenségek

A Markov-egyenlőtlenség egy nagyon egyszerű dolgot állít. Az, hogy az $X$ valószínűségi változó sokkal nagyobb legyen a várható értéknél nem túl valószínű:

$$P(X \geq t \cdot E(X)) \leq \frac{1}{t}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A Csebisev egyenlőtlenség arról szól, hogy a várható értéktől való eltérés nem lehet túl nagy.

Ha ez az eltérés nagyobb, mint a szórás $t$-szerese, akkor ennek a valószínűsége kicsi:

$$P(|X - E(X)| \geq t \cdot D(X)) \leq \frac{1}{t^2}$$

Ha az eltérés kisebb, mint a szórás $t$-szerese, akkor ennek valószínűsége nagy:

$$P(|X - E(X)| < t \cdot D(X)) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha egy esemény bekövetkezésének elméleti valószínűsége $p$, akkor minél többször végezzük el a kísérletet, a relatív gyakoriság és az elméleti valószínűség eltérése annál kisebb lesz.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \qquad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások

A hipergeometriai eloszlás egy diszkrét eloszlás.

Ismert, hogy mennyi az összes elem és az összes selejt, vagyis $N, K$ és $n$.

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A hipergeometriai eloszlás várható értéke:

$$E(X)=n\frac{K}{N}$$

A hipergeometriai eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{n\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A binomiális eloszlás egy diszkrét eloszlás.

Csak valami %-os izé ismert, a várható érték, az átlag, az arány, a valószínűség, továbbá $X$ korlátos diszkrét valószínűségi változó.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

A binomiális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=np$$

A binomiális eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A Poisson eloszlás egy diszkrét eloszlás, ahol előre ismert a várható érték, és a valószínűségi változó nem korlátos, vagyis tetszőleges bármilyen nagy érték is lehet.

Például valamilyen anyagban a hibák száma, vagy egy adott idő alatt bekövetkező események száma. APoisson eloszlásos feladatokban általában valamilyen százalék vagy arány vagy várható érték vagy átlag vagy valószínűség van megadva. Mondjuk egy könyvben az oldalak 80%-ában nincs hiba, vagy az 20 méter hosszú ruhaszövetek harmadában nincs hiba, vagy egy üzletben óránként várhatóan 13 vevő érkezik, vagy egy bankban percenként átlag 24 tranzakció történik, vagy 0,2 a valószínűsége, hogy 10 perc alatt nem érkezik segélyhívás. Ezek mind Piosson eloszlások, ahol az $X$ nem korlátos diszkrét valószínűségi változó.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

A Poisson eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\lambda$$

A Poisson eloszlás szórása:

$$D(X)=\sqrt{\lambda}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az exponenciális eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\leq 0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{ha } 0<x\end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\leq 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } 0<x\end{cases}$$

Az exponenciális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Az exponenciális eloszlás szórása:

$$D(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az egyenletes eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\leq A\\ \frac{x-A}{B-A} & \text{ha } A<x\leq B\\ 1 & \text{ha } B<x\end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{B-A} & \text{ha } A<x\leq B\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\frac{A+B}{2}$$

Az egyenletes eloszlás szórása:

$$D(X)=\frac{B-A}{\sqrt{12}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A normális eloszlás egy folytonos eloszlás.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

A normális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\mu$$

A normális eloszlás szórása:

$$D(X)=\sigma$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Kétváltozós eloszlások

$X$ és $Y$ együttes eloszlása egy táblázat, amelyben szerepel $X$ és $Y$ összes lehetséges értéke és a hozzájuk tartozó valószínűségek.

Ha a táblázat sorait összeadjuk, akkor $Y$ peremeloszlását kapjuk. Ha az oszlopokat adjuk össze, akkor $X$ peremeloszlását kapjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A korreláció $X$ és $Y$ valószínűségi változók közötti kapcsolatot írja le.

$$COV(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$$

$$R(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$X$ és $Y$ kétváltozós eloszlás esetén...

$X$ peremeloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = P(X < x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y)$$

$Y$ peremeloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$X$ és $Y$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) dv du$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az együttes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = F'$$

ahol

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\ dv du$$

Az együttes eloszlásfüggvény.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$X$ perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

ahol

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du$$

az $X$ perem-eloszlásfüggvénye.

---

$Y$ perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

ahol

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv$$

az $Y$ perem-eloszlásfüggvénye.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$X$ és $Y$ kétváltozós eloszlás esetén...

$X$ peremeloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = P(X < x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y)$$

$Y$ peremeloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Becslések

Olyan esetekben, amikor valamiért nem tudjuk vagy nem akarjuk a teljes sokaságot megvizsgálni, hogy meghatározzuk a fontosabb statisztikai mutatóit, becslést alkalmazunk. A becslés lényege, hogy egy minta alapján próbálunk ezekre a mutatókra következtetni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A megbízhatósági szintet konfidencia szintnek nevezzük. A konfidencia szint szokásos jelölése $1-\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az $1-\alpha$ megbízhatósági szinthez, vagy másként konfidencia szinthez tartozó konfidencia intervallumok azok az intervallumok, amik a sokasági átlagot $1-\alpha$ valószínűséggel tartalmazzák.

A konfidencia intervallum végpontjai:

$\overline{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ahol

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$\sigma =$ a teljes sokaság szórása

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a standard normális eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó $Z$ értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$\overline{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ahol

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$\sigma =$ a teljes sokaság szórása

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a standard normális eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó $Z$ értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A FAE minta azt jelenti, hogy a mintavétel során bármely mintaelemet azonos eséllyel választunk ki. Ilyen a visszatevéses mintavétel, vagy pedig abban az esetben ha az alapsokaság elemszáma nagyon nagy, akkor a visszatevés nélküli mintavétel is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$\overline{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$s =$ a teljes sokaság szórása, a sokasági szórás nem ismert

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a t-eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$\overline{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a standard normális eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó $Z$ értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(v)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}(v)}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$s =$ a minta szórása, a sokasági szórás nem ismert

$\chi^2(v)$ pedig a khi-négyzet eloszlás megfelelő értéke

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az EV-minta abban különbözik a FAE-mintától, hogy a kiválasztott mintaelemek nem függetlenek egymástól.

Ez olyankor fordulhat elő, ha a teljes sokaság mérete viszonylag kicsi a minta elemszámához képest. EV-minták esetén tehát a minta fontos jellemzőjévé válik, hogy mekkora a teljes sokaság, amelynek elemszámát $N$ jelöli.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$\overline{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1-\frac{n}{N}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$N =$ a teljes sokaság elemszáma

$s =$ a minta szórása

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a t-eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$\overline{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \cdot \sqrt{1-\frac{n}{N}}$ ahol

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{p} =$ a minta alapján kapott valószínűség

$n =$ a minta elemszáma

$N =$ a teljes sokaság elemszáma

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pedig a standard normális eloszlás $1-\frac{\alpha}{2}$-höz tartozó $Z$ értéke.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha a teljes sokaságot felosztjuk viszonylag homogén rétegekre, és a mintát is ezen a rétegek szerint vizsgáljuk, a variancia csökkenthető.

$\hat{\overline{x}}_R \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\hat{\overline{X}}_R}$

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{x} =$ a minta átlaga

$n =$ a minta elemszáma

$n_j =$ a minta j-edik rétegének elemszáma

$N =$ a teljes sokaság elemszáma

$N_j =$ a teljes sokaság j-edik rétegének elemszáma

$W_j =$ a teljes sokaság j-edik rétegének a teljes sokasághoz viszonyított aránya

$s_j =$ a minta j-edik rétegének szórása

$\hat{\overline{X}}_R = \sum_{j=1}^{M} W_j \overline{x}_j$

$s^2_{\hat{\overline{X}}_R} = \sum_{j=1}^{M} W_j^2 \frac{s_j^2}{n_j}\left(1-\frac{n_j}{N_j}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A kétmintás becslésekre akkor van szükség, amikor kétsokaság valamilyen paraméterét, leginkább az átlagát szeretnénk összehasonlítani.

A kétmintás becslések lehetnek független mintás becslések vagy páros mintás becslések.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha mindkét sokaság közel normális eloszlású, akkor az átlagok különbségének becslésére ez a formula van forgalomban.

$d \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_d$ ahol $d = \overline{x} - \overline{y}$

$s_d = s_c \cdot \sqrt{\frac{1}{n_Y} + \frac{1}{n_X}}$ itt $s_c^2 = \frac{(n_X-1)s_X^2+(n_Y-1)s_Y^2}{n_X+n_Y-2}$

$1-\alpha =$ konfidencia szint

$\overline{x} =$ az egyik minta átlaga

$\overline{Y} =$ a másik minta átlaga

$n_X =$ az egyik minta elemszáma

$n_Y =$ a másik minta elemszáma

A szabadságfok $v = n_X + n_Y - 2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Egy becslést torzítatlannak nevezünk, ha az egyes mintákból kapott becslések várható értéke megegyezik a becsülni kívánt mennyiséggel.

Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy a becslés során kapott értékek a becsülni kívánt érték körül ingadoznak, és ez az ingadozás szimmetrikus. A torzítatlan becsléseket mindig előnyben részesítjük a torzítottakkal szemben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A kérdés az, hogy ha egy sokasági jellemzőre több becslés jöhet szóba, hogyan válasszunk közülük, vagyis mikor tekintünk egy becslést jónak, kettő közül melyiket tekintjük jobbnak és kijelenthetjük-e valamelyikről, hogy a legjobb?

Két alapvető szempont alapján szoktuk a becsléseket versenyeztetni. Az egyik, a már jól ismert torzítatlanság, vagyis a becslésnek az a tulajdonsága, hogy az összes lehetséges mintán vett becslések átlaga megegyezik a becsülni kívánt sokasági jellemzővel. A másik az úgynevezett minimális variancia kritérium.

A minimális variancia kritérium azt jelenti, hogy ha van két torzítatlan becslésünk, akkor a kettő közül azt tekintjük jobbnak, aminek az összes mintán vett értékeinek varianciája kisebb.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + (E(\theta) - \theta)^2$$

Az első tag a varianciát, a második tag a várható értéktől való eltérést, vagyis a torzítottságot méri. Ha a becslés torzítatlan, $E(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$ így ez a második tag nulla. Két becslés közül azt részesítjük előnyben, amelyre MSE kisebb.

Az $E(\hat{\theta}) - \theta$ különbségre, vagyis a torzítás mértékére az angol bias szó alapján a$Bs\hat{\theta}$ jelölés van forgalomban. Használatos tehát az

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + Bs^2(\hat{\theta})$$

Képlet is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Eddigi vizsgálódásaink egyik legfontosabb eredménye a mintaátlagot eloszlásának jellemzése. Ha a teljessokaság átlaga $\mu$ és szórása pedig $\sigma$, akkor az ebből vett $n$ elemű minták átlagai olyan eloszlással helyezkednek el, aminek átlaga szintén $\mu$, a szórása pedig $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ezt az utóbbit a minta standard hibájának szokás nevezni. A standard hiba tehát azt mondja meg, hogy a mintaátlagok mekkora szórással ingadoznak a tényleges sokasági átlag körül.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Mintavételi hibának azokat a hibákat nevezzük, amik kimondottan azért fordulnak elő, mert nem tudjuk, vagy nem akarjuk a teljes sokaságot vizsgálni. A mintavételi hiba tehát a sokaság eloszlásán és a mintavételi eljáráson kívül főleg a minta elemszáma határozza meg. Mivel pedig ezeket általában már a mintavételt megelőzően ismerjük, a mintavételi hibának megvan az a kellemes tulajdonsága, hogy legtöbbször előre megállapítható. Vagyis még el sem végeztük a mintavételt, de már tudjuk, hogy mekkora lesz a mintavétel során elkövetett hiba. Ez a kellemes tulajdonság lesz a kiindulópont a becslések és később a hipotizésvizsgálatok elméletének kiépítésében.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

# Hipotézisvizsgálat

Az elfogadási tartomány az a tartomány, ahová ha a próba értéke kerül, akkor a nullhipotézist elfogadjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A kritikus tartomány az a tartomány, ahová ha a próba értéke kerül, akkor a nullhipotézist elvetjük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A szignifikanciaszint a hibás döntés valószínűsége.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

ELSŐ LÉPÉS: A HIPOTÉZIS MEGFOGALMAZÁSA

Minden hipotézisvizsgálat két egymásnak ellentmondó felvetés felírásával kezdődik. Az egyiket nullhipotézisnek nevezzük és $H_0$-al jelöljük, a másikat pedig ellenhipotézisnek és jele $H_1$.

MÁSODIK LÉPÉS: A PRÓBAFÜGGVÉNY KIVÁLASZTÁSA

A próbafüggvények kiválasztása magától a hipotézistől, illetve a mintavétel módjától is függ.

HARMADIK LÉPÉS: SZIGNIFIKANCIASZINT ÉS KRITIKUS TARTOMÁNY

Ha a próbafüggvény értéke az elfogadási tartományba fog esni, akkor ezt a tényt a nullhipotézist igazoló jelnek fogjuk tekinteni. Hogyha pedig a kritikus tartományba, akkor a nullhipotézist elvetjük.

NEGYEDIK LÉPÉS: MINTAVÉTEL ÉS DÖNTÉS

Ha a mintavétellel kapott eredményünk szerint a próbafüggvény az elfogadási tartományba esik, akkor a $H_0$ nullhipotézist tekintjük igaznak, a $H_1$ ellenhipotézist pedig elvetjük.

Ha viszont a próbafüggvény a minta alapján a kritikus tartományba esik, akkor a $H_0$ nullhipotézist vetjük el és a $H_1$ ellenhipotézist tekintjük igaznak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sokaság normális eloszlású, szórása $\sigma$, $H_0$ a sokaság átlagára vonatkozik, a minta elemszáma $n$.

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sokaság normális eloszlású, szórása nem ismert, $H_0$ a sokaság átlagára vonatkozik, a minta elemszáma $n$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sokaság tetszőleges eloszlású, szórása nem ismert, $H_0$ a sokaság átlagára vonatkozik, a minta $n$ elemű, elemszáma nagy.

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sokaság tetszőleges eloszlású, $H_0$ a sokasági arányra vonatkozik, a minta $n$ elemű, elemszáma nagy.

$$Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sokaság normális eloszlású, $H_0$ a sokasági szórásra vonatkozik, a minta $n$ elemű.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sokaság eloszlására irányuló vizsgálat.

$H_0$: mindegyik osztályköz valószínűsége egy adott eloszlásnak megfelelő érték, vagyis minden i-re az i-edik osztályköz valószínűsége a $P_i$ érték.

Az ellenhipotézis pedig, $H_1$: van olyan osztályköz, ami nem az adott eloszlásnak megfelelő $P_i$ érték. A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. A minta elemszáma $n$.

$$\chi^2(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{nP_i}$$

ahol a $v$ szabadságfok: $v = k - b - 1$.

Itt $k =$ az osztályközök száma és $b =$ az adott eloszlás azon paramétereinek száma, amit a mintából becsléssel határozunk meg.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A sokaságon belül két ismérv függetlenségére irányuló vizsgálat. $H_0$: a két ismérv független, az ellenhipotézis pedig, $H_1$: a két ismérv közti kapcsolat sztochasztikus vagy függvényszerű.

A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. A minta elemszáma $n$, a minta alapján készített kontingencia tábla sorainak száma $r$, oszlopainak száma $c$.

$$\chi^2(v) = \sum \frac{(n_{ij}-n^*_{ij})^2}{n^*_{ij}}$$

ahol a $v$ szabadságfok $v = (r-1)(c-1)$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két sokaságban valamely változó eloszlásának egyezőségére irányuló vizsgálat. $H_0$: a két sokaságban az eloszlás egyező, az ellenhipotézis pedig, $H_1$: a két eloszlás nem egyező.

A próbát $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ jobb oldali kritikus értékkel végezzük el, a nullhipotézist az ennél kisebb, az ellenhipotézist az ennél nagyobb értékek igazolják. Mintát ezúttal mindkét sokaságból veszünk, az $X$ sokaságból vett minta elemszáma $n_X$ az $Y$ sokaságból vett mintáé $n_Y$ mindkét mintában az osztályközök száma $k$.

\( \chi^2(v) = n_X \cdot n_Y \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_{Xi}+n_{Yi}} \cdot \left( \frac{n_{Xi}}{n_X} - \frac{n_{Yi}}{n_Y} \right)^2 \)

ahol a $v$ szabadságfok $v = k-1$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Mindkét sokaság normális eloszlású, szórásaik $\sigma_X$ és $\sigma_Y$.

$$Z = \frac{(\bar{y}-\bar{x})-\delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}+\frac{\sigma_X^2}{n_X}}}$$

A nullhipotézis: $H_0$: $\mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol $\delta$ tetszőleges, de előre megadott érték. A minták elemszáma $n_X$ és $n_Y$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A két sokaság normális eloszlású és szórásaik egyformák.

$$t(v) = \frac{(\bar{y}-\bar{x})-\delta_0}{s\cdot\sqrt{\frac{1}{n_Y}+\frac{1}{n_X}}}$$

itt $s^2 = \frac{(n_X-1)s_X^2+(n_Y-1)s_Y^2}{n_X+n_Y-2}$

A nullhipotézis $H_0$: $\mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol $\delta$ tetszőleges, de előre megadott érték.

A minták elemszáma $n_X$ és $n_Y$, szórása $s_X$ és $s_Y$, a szabadságfok $v = n_Y + n_X - 2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A két sokaság eloszlása és szórása nem ismert, mindkettő szórása véges, és mindkét minta elemszáma elég nagy.

$$Z = \frac{(\overline{y}-\overline{x})-\delta_0}{\sqrt{\frac{s_Y^2}{n_Y}+\frac{s_X^2}{n_X}}}$$

A nullhipotézis $H_0: \mu_X - \mu_Y = \delta_0$, ahol $\delta$ tetszőleges, de előre megadott érték.

A minták elemszáma $n_X$ és $n_Y$, szórása $s_X$ és $s_Y$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Két sokaság szórásának összehasonlítására irányuló próba, ha mindkét sokaság normális eloszlású. A nullhipotézis $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \qquad F_{1-p}(v1;v2) = \frac{1}{F_p(v_2;v_1)}$$

Az F-eloszlás két szabadságfoka

$v_1 = n_1 - 1$ és $v_2 = n_2 - 1$

Bal oldali kritikus érték: $\frac{1}{F_{1-\alpha}(v_2;v_1)}$

Jobb oldali kritikus érték: $F_{1-\alpha}(v_1;v_2)$

Kétoldali kritikus érték:

$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_2;v_1)}$ és $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1;v_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Több sokaság várható értékének összehasonlítására vonatkozó próba, ha mindegyik sokaság normális eloszlású és azonos szórású.

A $H_0$ nullhipotézis: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_M = \mu$, vagyis az, hogy a várható értékek az összes sokaságra (M db) megegyeznek, míg az ellenhipotézis az, hogy van olyan $\mu_j$ amire $\mu_j \neq \mu$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A Bartlett-próba több sokaság szórásának összehasonlítására vonatkozó próba, ha mindegyik sokaság normális eloszlású.

A $H_0$ nullhipotézis: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \cdots = \sigma_M = \sigma$, vagyis az, hogy az összes sokaság (M db.) szórása megegyezik, míg az ellenhipotézis az, hogy van olyan $\sigma_j$, amire $\sigma_j \neq \sigma$.

$$SSB = \sum_{j=1}^{M}(n_j - 1)s_j^2 \qquad s_b = \frac{SSB}{n-M}$$

A próbafüggvény

$$B^2 = \frac{1}{c}\left(v \cdot \ln s_b^2 - \sum_{j=1}^{M} v_j \ln s_j^2\right)$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(M-1)}\left(\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{v_j} - \frac{1}{v}\right)$$

Jobb oldali kritikus érték: $\chi^2_{1-\alpha}(M-1)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

# Regressziószámítás

A regresszió egyenes egyenlete:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x$$

Ahol $b_1 = \frac{\sum dx \cdot dy}{\sum d^2x}$ és $b_0 = \overline{y} - b_1 \cdot \overline{x}$

A regressziós egyenes egyenletében szereplő regressziós paraméterek közül $b_1$ az egyenes meredeksége. A $b_0$ érték kevésbé jelentős, ez azt adja meg, hogy a magyarázó változó nulla értékéhez milyen $y$ érték tartozik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A regressziós egyenes egyenlete $\hat{y} = \hat{b_0} + \hat{b_1} \cdot x$

Ez egy lineáris függvény, ami mindegyik x-hez hozzárendel valamilyen y-t. Ezek általánan eltérnek a valódi y-októl. Ezeket az eltéréseket reziduumoknak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A reziduumokból képzett mutató az úgynevezett SSE, jelentése sum of squares of the errors vagyis eltérés-négyzetösszeg.

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Ha a regresszió tökéletesen illeszkedik, akkor az $e_i = y_i - \hat{y}_i$ különbségek mindegyike 0, így SSE=0. Ha az illeszkedés nem tökéletes, akkor SSE egy pozitív érték, ami az illeszkedés pontatlanságát méri.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Ha az SSE értékeit elosztjuk a megfigyelt pontok számával és a kapott eredménynek vesszük a gyökét, akkor kapjuk a reziduális szórást:

$$s_e^* = \sqrt{\frac{SSE}{n}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az illeszkedés egy mérőszáma a lineáris korrelációs együttható:

$$r = \frac{\sum dx \cdot dy}{\sqrt{\sum d^2x \cdot \sum d^2y}}$$

A lineáris korrelációs együttható azt méri, hogy x és y között milyen szoros lineáris kapcsolat van. Értéke mindig $-1 \leq r \leq 1$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A magyarázóerőt méri az úgynevezett determinációs együttható, melynek jele $R^2$. Ez a kétváltozós lineáris modell esetében megegyezik $r^2$-tel.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Itt SSE az eltérés-négyzetösszeg, míg SSR az úgynevezett regressziós, vagy magyarázó négyzetösszeg, SST pedig a teljes négyzetösszeg, a köztük lévő kapcsolat pedig...

$$SST = \sum d^2y \quad SSR = \sum(\hat{y}_i - \overline{\hat{y}})^2 = b_1^2 \sum d^2x \quad SSE = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum e_i^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A regresszió egyenes egyenlete:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 \cdot x^{\hat{b}_1}$$

Amiből

$$\lg \hat{y} = \lg \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot \lg x$$

Ahol $\hat{b}_1 = \frac{\sum d\lg x \cdot d\lg y}{\sum d^2 \lg x}$ és $\lg \hat{b}_0 = \overline{\lg y} - \overline{\lg x} \cdot \hat{b}_1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A regresszió egyenes egyenlete:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 \cdot \hat{b}_1^x$$

Amiből

$$\lg \hat{y} = \lg \hat{b}_0 + x \cdot \hat{b}_1$$

Ahol $\lg \hat{b}_1 = \frac{\sum dx \cdot d\lg y}{\sum d^2 x}$ és $\lg \hat{b}_0 = \overline{\lg y} - \overline{x} \cdot \lg \hat{b}_1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

Az elaszticitás két összefüggő jelenség közti kapcsolat.

Lineáris modellben: $El(\hat{y}, x) = \frac{\hat{b}_1 x}{\hat{y}} = \frac{\hat{b}_1 x}{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x}$

Hatványkitevős modellben: $El(\hat{y}, x) = \hat{b}_1$

Exponenciális modellben: $El(\hat{y}, x) = x \cdot \ln \hat{b}_1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

I. A magyarázó változók nem valószínűségi változók.

II. A magyarázó változók lineárisan független rendszert alkotnak.

III. Az eredményváltozó közel lineáris függvénye a magyarázó változónak.

IV. Az $\epsilon$ hibatag feltételes eloszlása normális, várható értéke nulla.

V. Az $\epsilon$ hibatag különböző x-ekhez tartozó értékei korrelálatlanok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A paraméterek becslése:

$$\hat{b}_i \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot (n-k-1) \cdot s_{\hat{b}_i}$$

A regresszió becslése:

$$\hat{y}_* \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot (n-k-1) \cdot s_{\hat{y}_*}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A többváltozós regressziós modelleket olyankor alkalmazzuk, amikor az eredményváltozó alakulását több magyarázó változó tükrében vizsgáljuk.

A többváltozós lineáris regresszió egyenlete:

$$y = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 + \cdots + \hat{b}_k x_k + \epsilon$$

Az y eredményváltozó itt k darab magyarázó változótól és a hibatagtól függ.

A képletben a $\hat{b}_0$ paraméter a tengelymetszet, a többi $\hat{b}_i$ paraméter pedig azt jelenti, hogy az i-edik magyarázó változó egy egységgel történő változása, mennyivel változtatja az $\hat{y}$ értéket, ha a többi magyarázó változót rögzítjük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A kétváltozós esethez hasonlóan a korreláció itt is a változók közti kapcsolat szorosságát írja le, csakhogy itt egy fokkal rosszabb a helyzet, ugyanis most bármely két változó korrelációját vizsgálhatjuk. Ezt tartalmazza a korrelációmátrix.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & \dots & r_{yk} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{ky} & r_{k1} & r_{k2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Itt $r_{ij}$ az $x_i$ és az $x_j$ magyarázó változók közti korrelációt írja le, tehát például $r_{12}$ az $x_1$ és az $x_2$ közti korrelációt jelenti.

$r_{iy}$ pedig az $x_i$ magyarázó változó és az y eredményváltozó közti kapcsolatot jelenti.

Mivel $r_{ij}=r_{ji}$ a korreláció-mátrix szimmetrikus. Az áttekinthetőbb felírás kedvéért a felső háromszöget el is szokták hagyni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A lineáris regresszió egyenlete: $\hat{y}=\hat{b}_0+\hat{b}_1x_1+\hat{b}_2x_2+\dots+\hat{b}_kx_k$

A tesztelés úgy zajlik, hogy nullhipotézisnek tekintjük a $H_0:b_i=0$ feltevést, ellenhipotézisnek pedig azt, hogy $H_1:b_i\neq 0$.

A nullhipotézis azt állítja, hogy a modellben a $b_i$ paraméter szignifikánsan nulla, vagyis az i-edik magyarázó változó felesleges, annak hatása az eredményváltozóra nulla. Az ellenhipotézis ezzel szemben az, hogy $b_i\neq 0$ vagyis az i-edik magyarázó változónak a regresszióban nem nulla hatása van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

| Szóródás oka | Négyzetösszeg | Szabadságfok | Átlagos négyzetösszeg | F |
|---|---|---|---|---|
| Regresszió | $SSR$ | $k$ | $MSR=\frac{SSR}{k}$ | $F=\frac{MSR}{MSE}$ |
| Hiba | $SSE$ | $n-k-1$ | $MSE=\frac{SSE}{n-k-1}$ | |
| Teljes | $SST$ | $n-1$ | | |

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A multikollinearitás röviden összefoglalva azt jelenti, hogy két vagy több magyarázó változó között túl szoros korrelációs kapcsolat van, és ez zavarja a becslést.

A multikollinearitás mérésére az úgynevezett VIF (variance inflator factor) variancia növelő faktor van forgalomban.

$$VIF_j=\frac{1}{1-R_j^2}$$

A képletben szereplő $R_j^2$ a j-edik magyarázó változó és az összes többi magyarázó változó közti determinációs együttható.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az autokorreláció a regresszió maradéktagjának a saját későbbi értékeivel való korrelációját jelenti, vagyis egyfajta szabályszerűséget a maradékváltozóban. Ideális esetben a maradéktagnak véletlenszerűnek kell lennie, bármiféle szabályszerűségért a magyarázó változók felelnek a regresszióban.

Az autókorreláció tesztelésére a Durbin-Wattson-tesztet használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

A Durbin-Wattson-teszt lényegében egy hipotizésvizsgálat, aminek részletezésére nem térünk ki, mindössze a használatát nézzük meg.

Maga a próbafüggvény

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}$$

A szignifikanciaszint $\alpha$, a próba elvégzése pedig az alábbi módon történik:

$d_L$ és $d_U$ értékeket kikeressük a táblázatból,

n = a megfigyelések száma,

k = a magyarázó változók száma,

végül megnézzük, hogy a próbafüggvény melyik tartományba esik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---