MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEK 0 YBL tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 10. 28.

Tartalomjegyzék

Algebra, betűs kifejezések használata..... **2**

Nevezetes azonosságok, binomiális tétel..... **5**

Hatványozás, hatványazonosságok, normálalak..... **6**

Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés..... **8**

Elsőfokú egyenletek..... **9**

Másodfokú egyenletek..... **10**

Egyenlőtlenségek..... **11**

Egyenletrendszerek..... **12**

Szöveges feladatok..... **13**

Függvények..... **14**

Elsőfokú függvények..... **16**

Függvénytranszformációk, függvények ábrázolása..... **17**

Pontok, egyenesek, síkok, szögek, a geometria alapjai..... **18**

Síkidomok, háromszögek, négyszögek, sokszögek..... **22**

A kör..... **33**

A Pitagorasz-tétel..... **45**

Mértékegységek és mértékegység-átváltás..... **46**

Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek..... **47**

Gyökös azonosságok és gyökös egyenletek..... **48**

Trigonometria a síkgeometriában..... **50**

Logaritmus, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek..... **51**

Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek..... **52**

Szinusztétel és koszinusztétel..... **54**

Vektorok..... **55**

Koordinátageometria..... **56**

Algebra, betűs kifejezések használata

Ha több művelet szerepel egymás után, akkor ezeket a műveleti sorrend szerint kell elvégeznünk.

A műveleti sorrendben az első mindig a zárójel, vagyis a zárójelben szereplő műveleteket kell elsőként elvégezni.
A második a szorzás és az osztás. Ha több szorzás és osztás van, akkor balról jobbra kell őket elvégezni.
Végül az utolsó szint az összeadás és kivonás, és itt is ha több is van belőlük, akkor balról jobbra kell elvégezni.

A hatványozás még egy kicsit bezavarhat a dologba, így érdemes megnézni külön a hatványozásról és a hatványazonosságokról szóló epizódokat is.

Most pedig nézzünk egy példát a műveleti sorrendre:

Pl.: $3 \cdot (5-3) + 2 : 2 = 3 \cdot 2 + 2 : 2 = 6 + 1 = 7$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az együttható a betűs kifejezés előtt álló szám.

Pl.: $3x$ kifejezés együtthatója 3.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az algebrai kifejezésekben a betűket változóknak nevezzük.

Pl.: $2x + y$ algebrai kifejezésben x és y változók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A betűs kifejezéseket nevezzük algebrai kifejezéseknek.

Pl.: $2x + y$ egy algebrai kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az önmagában álló számokat nevezzük konstansnak.

Pl. $2x + y + 5$ kifejezésben az 5 konstans.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egynemű kifejezések azok a betűs kifejezések, amik csak az együtthatójukban különböznek.

pl.: $5x$ és $3x$ egynemű kifejezések, mert csak az együtthatóik (5 és 3) különböznek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egynemű kifejezések mindig összevonhatóak. Az összevont kifejezés együtthatója az eredeti együtthatók összege lesz.

Pl.: $3x + 5x + 2x = (3 + 5 + 2)x = 10x$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Zárójel felbontásakor minden tagot minden taggal szorozni kell.

Pl.: $5 \cdot (4x + 6) = 5 \cdot 4x + 5 \cdot 6 = 20x + 30$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kiemelés a zárójelfelbontás megfordítása.

A dolog úgy indul, hogy találnunk kell egy közös részt, amit kiemelhetünk.

A kiemelés során egy többtagú kifejezést egy vagy többtagú kifejezések szorzatává alakítjuk át úgy, hogy minden tagból kiemeljük a közös részeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0}$ $\sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ $\frac{}{\text{tört nevező}} \neq 0$

pl.

$\frac{2}{x-3}$ értelmezési tartománya $x \in R \setminus \{3\}$, mert tört van benne és a tört nevezője nem lehet nulla ($x \neq 3$)

$\sqrt{2x+5}$ értelmezési tartománya $x \in \left[-\frac{5}{2}, \infty\right[$, mert páros gyök alatt van (második) és így a gyök alatti kifejezés ≥ 0

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A törtek egyszerűsítése azt jelenti, hogy a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nem nulla számmal osztjuk. Ha nincs olyan szám, amivel mind a számláló és a nevező is osztható lenne, akkor már nem egyszerűsíthető tovább a tört.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Algebrai törteknek nevezzük azokat a törteket, melyek nevezőjében betűs kifejezés van.

Tehát ha csak a tört számlálójában van betűs kifejezés (pl.x), de a nevezőjében nem, akkor az még nem algebrai tört.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Zárójel felbontásakor minden tagot minden taggal szorozni kell.

Ha a szorzás mindkét tényezője többtagú, akkor az első tényező első tagjával szorozzuk végig a másik tényező tagjait, majd pedig folytatjuk az első tényező második tagjával.

Pl.: $(a+b)\cdot(c-5)=a\cdot c-5\cdot a+b\cdot c-5\cdot b$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítési érték azt jelenti, hogy a betűs kifejezés helyére írjuk be a behelyettesítendő értéket.

Pl.: $2x+5$ kifejezés helyettesítési értéke $x=3$-ban: $2\cdot 3+5=6+5=11$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nevezetes azonosságok, binomiális tétel

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0}$ $\sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ $\text{tört nevező} \neq 0$

pl.

$\frac{2}{x-3}$ értelmezési tartománya $x \in R \setminus \{3\}$, mert tört van benne és a tört nevezője nem lehet nulla ($x \neq 3$)

$\sqrt{2x+5}$ értelmezési tartománya $x \in \left[-\frac{5}{2}, \infty\right[$, mert páros gyök alatt van (második) és így a gyök alatti kifejezés ≥ 0

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Binomiális tétel:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatványozás, hatványazonosságok, normálalak

A hatványozás a szám önmagával vett szorzatait rövidíti.

Pl.: $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Itt a 6-ot a hatvány alapjának nevezzük, a 3-at kitevőnek, az eredményt pedig a hatvány értékének.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha azonos alapú hatványokat szorzunk, akkor a kitevők összeadódnak.

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha azonos alapú hatványokat osztunk, akkor a kitevők kivonódnak.

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatvány hatványa a kitevők szorzata.

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden nem nulla szám nulladik hatványa 1.

$a^0 = 1$, ha $a \neq 0$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy nem nulla szám negatív egész kitevőjű hatványát úgy számolhatjuk ki, hogy a reciprokát a kitevő ellentettjére emeljük.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szorzat mindkét tényezője ugyanarra a hatványra van emelve, akkor a hatványt leírhatjuk csak egyszer zárójellel.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ez az azonosság visszafele irányba hasznosabb, ha egy zárójeles szorzat hatványozva van, akkor azt szét lehet szedni és mindkét tényezőt hatványozni kell.

Pl.: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy törtnek a számlálója és nevezője is ugyanarra a hatványra van emelve, akkor a hatványt leírhatjuk csak egyszer zárójellel.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ez az azonosság visszafele irányba hasznosabb, ha egy zárójeles tört hatványozva van, akkor azt szét lehet szedni és a számlálót és nevezőt is hatványozni kell.

Pl.: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A túl nagy vagy éppen túl pici számok leírására találták ki a normálalakot.

A normálalak mindig egy szorzat, az első tényezője egy abszolútértékben 1-nél nagyobb vagy egyenlő, 10-nél kisebb szám. A másik tényezője pedig egy 10 hatvány.

Pl.: $35000 = 3{,}5 \cdot 10^4$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés

Egy a nem negatív szám négyzetgyöke az a nem negatív szám, aminek a négyzete a.

$a \geq 0 \qquad \sqrt{a} \geq 0 \qquad \sqrt{a}^2 = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0,\ b \geq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy a szám köbgyöke az a szám, aminek a köbe a.

$a \in R \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \in R,\ b \in R$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad a \in R,\ b \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökvonás másképpp viselkedik páros, illetve páratlan gyökkitevő esetén, így kétféle definíciónk lesz.

Egy a nem negatív szám $n = 2k$-adik gyöke az a nem negatív szám, amire:

$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$

Egy tetszőleges a szám $n = 2k + 1$-edik gyöke az a szám, amire:

$(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú egyenletek

A mérleg elv lényege, hogy amikor megoldunk egy egyenletet, az egyenlőségjel mindkét oldalán ugyanazokat a műveleteket kell elvégeznünk. Az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadhatjuk, vagy az egyenlet mindkét oldalából ugyanazt a számot kivonhatjuk. És az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nem nulla számmal megszorozhatjuk, vagy mindkét oldalt ugyanazzal a nem nulla számmal eloszthatjuk. Vagyis:

- ha elveszünk egy számot az egyik oldalról, akkor a másik oldalról is el kell venni

- ha hozzáadunk egy számot az egyik oldalhoz, akkor a másik oldalhoz is hozzá kell adni

-ha szorozzuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is szorozni kell ugyanezzel a számmal

-ha osztjuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is osztani kell ugyanezzel a számmal

Az összeadás, kivonás és szorzás egymásutáni lépéseivel jutunk el a megoldáshoz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A megoldás lényege, hogy gyűjtsük össze az x-eket az egyik oldalon, a másik oldalon pedig a számokat, a végén pedig leosztunk az x együtthatójával.

Ha törtet is látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha törtet látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Figyeljünk rá, hogy ilyenkor az egyenlet minden tagját meg kell szorozni (a tagokat $+$, $-$ vagy $=$ jelek választják el egymástól...).

Miután megszabadultunk a törtektől az egyenlet megoldásának lépései a szokásosak a mérleg elv segítségével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Másodfokú egyenletek

Ha a másodfokú egyenlet így néz ki:

$$ax^2+bx+c=0$$

Akkor a megoldóképlet:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodfokú egyenlet megoldóképletének gyök alatti részét nevezzük diszkriminánsnak.

$$D=b^2-4ac$$

Ez dönti el, hogy a másodfokú egyenletnek hány valós megoldása lesz.

Ha a diszkrimináns nulla, akkor csak egy.

Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek két valós megoldása van.

Ha pedig negatív, akkor az egyenletnek nincs valós megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $ax^2+bx+c=0$ alakú másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Viète-formulák nem valami titkos gyógyszer hatóanyag, hanem a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket írja le:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Olyankor, amikor a másodfokú tag együtthatója 1, a Viète-formulák is egyszerűbbek:

$$x^2+px+q=0 \qquad x_1+x_2=-p \qquad x_1x_2=q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenséget ugyanúgy kell megoldani, mint egyenletet. Amire figyelnünk kell, hogy ha negatív számmal szorzunk, az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyik megoldás az, hogy szorzattá alakítjuk, aztán pedig számegyenesen ábrázoljuk a tényezők előjelét.

A második megoldás, hogy ábrázoljuk vázlatosan a másodfokú függvényt, amit az egyenlőtlenségből alkotunk, majd leolvassuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenletrendszerek

A behelyettesítő módszer az egyenletrendszerek megoldásának egyik technikája.

Lényege, hogy kiválasztjuk az egyik egyenletet, ahonnét az egyik változót kifejezzük a másikkal. Ilyenkor célszerű a számunkra szimpatikusabb, egyszerűbb egyenletet választani.

Ezt követően az így kapott kifejezést behelyettesítjük a másik, fel nem használt egyenletbe, így egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenlő együtthatók módszere egy megoldási technika az egyenletrendszerekhez.

Lényege, hogy ha a két egyenletben vagy az x vagy az y együtthatói megegyeznek, akkor a két egyenletet egymásból kivonva azok kiesnek, és egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.

Ha az együtthatók egymás ellentettjei lennének, akkor pedig össze kell adni a két egyenletet.

A módszer akkor is működik, ha nem volnának egyenlő együtthatók, ilyenkor bátran szorozhatjuk az egyenleteket addig, amíg nem lesznek egyenlő együtthatók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szöveges feladatok

Az utazásról szóló szöveges feladatok megoldása során jól jönnek a még fizikából tanult összefüggések:

$v = \frac{s}{t} \qquad s = v \cdot t \qquad t = \frac{s}{v}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Adott az A és B nem üres halmaz.

Ha az A halmaz bizonyos elemeihez egyértelműen hozzárendeljük a B halmaz bizonyos elemeit, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f: A \mapsto B$ függvény. A függvény értelmezési tartománya azoknak az elemeknek a halmaza az A halmazban, amikhez a függvény hozzárendel B halmazbeli elemeket.

Az értelmezési tartományt az angol domain szó alapján, ami egyébként azt jelenti, hogy tartomány, így jelöljük: D_f.

De a gyengébb idegzetűek kedvéért szokás úgy is jelölni, hogy É.T.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f: x \mapsto y$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ha $x_1 \neq x_2$ akkor $y_1 \neq y_2$. Vagyis különböző x-ekhez mindig különböző y-okat rendel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a pontokat, ahol a függvény grafikonja az x tengelyt metszi, zérushelynek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden$x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden$x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú függvények

A lineáris függvény képlete:

$y = m \cdot x + b$ vagy $x \mapsto m \cdot x + b$ vagy $f(x) = m \cdot x + b$

Az egyik dolog, amit érdemes tudni róla, hogy milyen meredeken megy.

Ezt meredekségnek hívjuk, és így jön ki:

$$m = \frac{\text{amennyit fölfelemegy}}{\text{amennyit előremegy}}$$

A másik dolog, amit érdemes tudni, hogy hol metszi a függvény grafikonja az$y$ tengelyt.

Ezt úgy hívjuk ,hogy tengelymetszet, és a jele$b$ a képletéből.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvénytranszformációk, függvények ábrázolása

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x)=f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x)=-f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pontok, egyenesek, síkok, szögek, a geometria alapjai

A geometria legapróbb építőkockái a pontok. A pontokat az ABC nagy betűivel jelöljük.

Az egyenesek mindkét irányban végtelen kiterjedésű és végtelenül keskeny egyenes vonalak. De ez csak az egyenes vizuális leírása, matematikai definíciója nincsen, ugyanis az egyenes a ponthoz hasonlóan alapfogalom.

A sík is geometria alpafogalom. A síkok már két dimenziósak, ellentétben az egy dimenziós egyenessel. Az egyenesen csak jobbra és balra tudunk mozogni, egy síkban viszont már két lényegesen különböző irány létezik, jobbra-balra és előre-hátra. Ennél is nagyobb a dimenziója a térnek, amiben a pontok, az egyenesek és a síkok helyezkednek el. A térben három lényegesen különböző irány van, ezért a tér három dimenziós. Létezik benne jobbra-balra, előre-hára és fel-le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy egyenesnek a két pont közötti részét szakasznak nevezzük.

A szakasz az egyenessel ellentétben mindig véges hosszúságú, és a hossza mindig a két pont távolsága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy síkot egy egyenessel kettévágunk, akkor két félsík keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a teret egy síkkal két részre vágjuk, akkor két féltér keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík egy pontjából kiinduló két félegyenes a síkot két tartományra osztja. Ezek a tartományok és a két félegyenes szöget alkotnak. Azt, hogy a két szögtartomány közül melyikről van szó, a szárak közé rajzolt körívvel jelezzük. A szög csúcsa a két félegyenes közös végpontja, a szög szárai pedig maguk a félegyenesek. A félegyenesek közötti részt szögtartománynak nevezzük. A két félegyenes mindig két ilyen tartományt határoz meg, és egy körívvel jelöljük, hogy épp melyik szögtartományról van szó.

A szögeket a görög abc betűivel jelöljük: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

A szögeket nagyságuk szerint szokás csoportosítani. A szögek mérésére a fokot szokás használni, egy teljes kör éppen 360 fok, a derékszög pedig a 90 fok. Amikor a két szögszár éppen egybeesik, akkor az általuk meghatározott szög a nullszög és a teljes szög, az egyik 0 fokos, a másik 360 fokos. Amikor a két félegyenes 0 és 90 fok közötti szöget zár be, azt úgy hívjuk, hogy hegyes-szög. Amikor épp 90 fokos szögben állnak, azt derékszögnek nevezzük. A 90 foknál nagyobb és 180 foknál kisebb szögek a tompaszögek. A 180 fokos szöget egyenes-szögnek nevezzük, míg a 180 fok és 360 fok közötti szögeket homorúszögnek hívjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 0° és 90° közé esik, akkor hegyesszögnek nevezzük.

Az α szög hegyesszög, ha $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög pontsoan 90°-os, akkor derékszögnek is nevezzük.

Az α szög derékszög, ha $\alpha = 90^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 90° és 180° közé esik, akkor tompaszögnek nevezzük.

Az α szög tompaszög, ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög pontosan 180°-os, akkor egyenesszögnek is nevezzük.

Az α szög egyenesszög, ha $\alpha = 180^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szög 180° és 360° közé esik, akkor homorúszögnek nevezzük.

Az α szög homorúszög, ha $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két pont távolsága a pontokat összekötő szakasz hossza.

Ha tehát le kell mérni két pont távolságát, csak rá kell helyezni a vonalzónkat a két pontra, és már látjuk is a két pont távolságát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pont és egyenes távolságának leméréséhez először a pontból merőlegest kell állítanunk az egyenesre.

A távolság pedig ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Pont és sík távolságának leméréséhez először a pontból merőlegest kell állítanunk a síkra.

A pont és sík távolsága pedig ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a két egyenes metszi egymást, akkor a távolságuknak nincs sok értelme vagy 0.

Ha a két egyenes egymással párhuzamos, akkor a távolságukat úgy kapjuk meg, hogy az egyik egyenes tetszőleges pontjából merőlegest bocsátunk a másik egyenesre.

És a két egyenes távolsága ennek a merőleges szakasznak a hossza.

Ha az egyenesek különböző síkokban futnak, úgy hívjuk őket, hogy kitérő egyenesek.

A kitérő egynesek nem párhuzamosak, de nem is metszik egymást.

A kitérő egyenesek mindig két párhuzamos síkban futnak, így a távolságuk a két sík távolsága.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az egyenesek különböző síkokban futnak, úgy hívjuk őket, hogy kitérő egyenesek.

A kitérő egynesek nem párhuzamosak, de nem is metszik egymást.

Kitérő egyenesek láthatunk például autópályáknál, ahol az egyik út keresztezi a másikat egy hídon át.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a két sík metszi egymást, olyankor egy egyenesben metszik egymást és a távolságuknak nincs sok értelme vagy 0.

Ha a két sík párhuzamos, akkor a két sík távolságát úgy kapjuk meg, hogy veszünk az egyik síkon egy tetszőleges pontot, a pontbl merőlegest állítunk a síkra, és a távolságuk ennek a szakasznak a hossza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két ponttól azonos távolságra lévő pontok halmaza a két pontot összekötő szakasznak a szakaszfelező merőleges egyenese.

Három ponttól azonos távolságra lévő pont a három pon köré írható kör középpontja.

Két metsző egyenestől azonos távolságra lévő pontok halmaza a két egyenes szögének szögfelezője.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szögben a szögszárak egymással párhuzamosak és egyforma irányúak is, akkor ezeket a szögeket egyállású szögeknek nevezzük.

Az egyállású szögek egyenlők.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szögben a szögszárak egymással párhuzamosak, de irányuk ellentétes, akkor ezeket a szögeket váltószögeknek nevezzük.

A váltószögek egyenlők.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két váltószöget a csúcsuknál összeillesztünk, akkor ezeket a szögeket csúcsszögeknek nevezzük.

A csúcsszögek egyenlők.

Ha két egyenes metszi egymást, akkor mindig két-két csúcsszög pár keletkezik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha két szög szárai párhuzamosak és az egyik száruk közös, akkor ezeket a szögeket kiegészítő szögnek nevezzük.

A kiegészítő szögek nem egyenlők (kivéve ha 90°-90°-osak), de ha összeadjuk őket, mindig 180 fokot kapunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

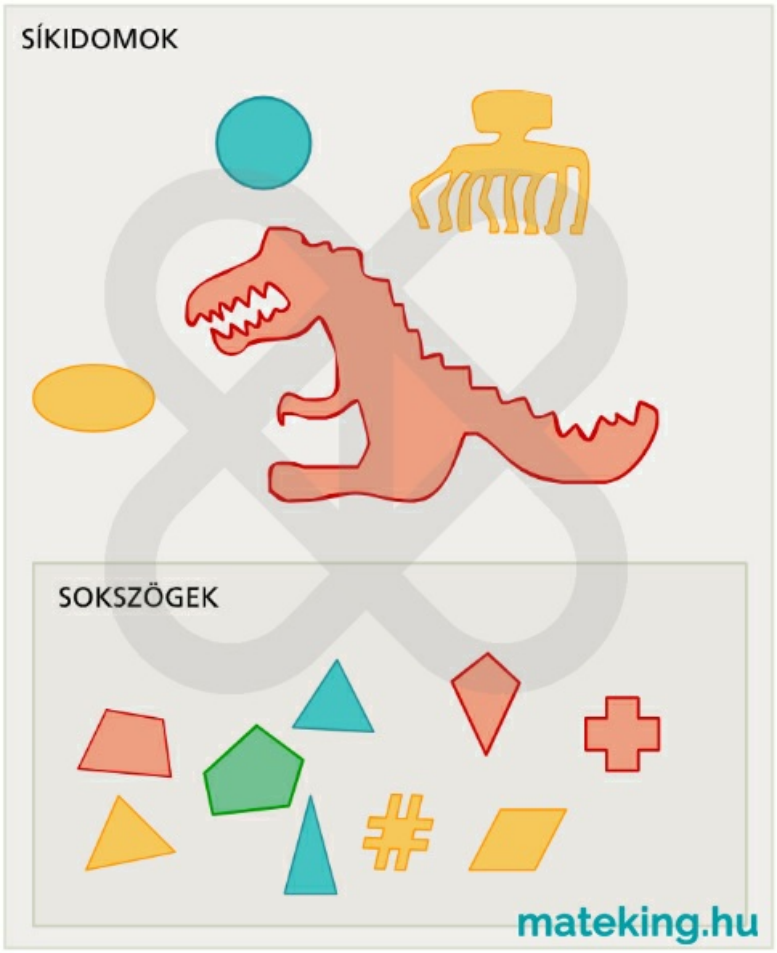
Ha két szög 90 fokra egészíti ki egymást, akkor pótszögeknek hívjuk őket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Síkidomok, háromszögek, négyszögek, sokszögek

Síkidomnak nevezzük a sík zárt vonalakkal körülhatárolt részét.

A zárt vonal azt jelenti, hogy fogjuk a ceruzát, elindulunk valahonnan... és hopp, visszaérünk ugyanoda, ahonnan indultunk. Síkodom például egy háromszög, vagy egy négyzet, de síkidom egy kör is, vagy éppen a különböző emojik. Egy síkidomot több különböző zárt vonal is atárolhat. Olyankor, amikor csak egy zárt vonal határolja, egyszerű síkidomnak nevezzük. Mindez sokkal könnyebben elképzelhető, ha megnézed az ehhez kapcsolódó epizódot.

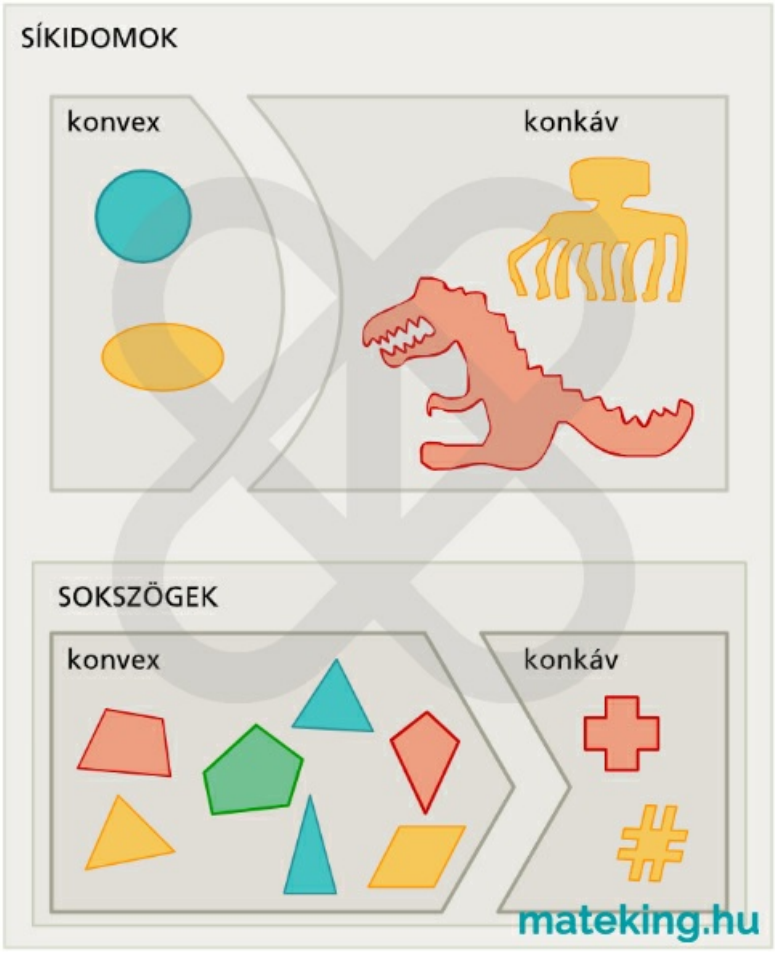


Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból álló zárt görbe (töröttvonal) határol. Vagyis azok a síkidomok sokszögek, amelyek határoló vonalai csak egyenes szakaszokból állnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

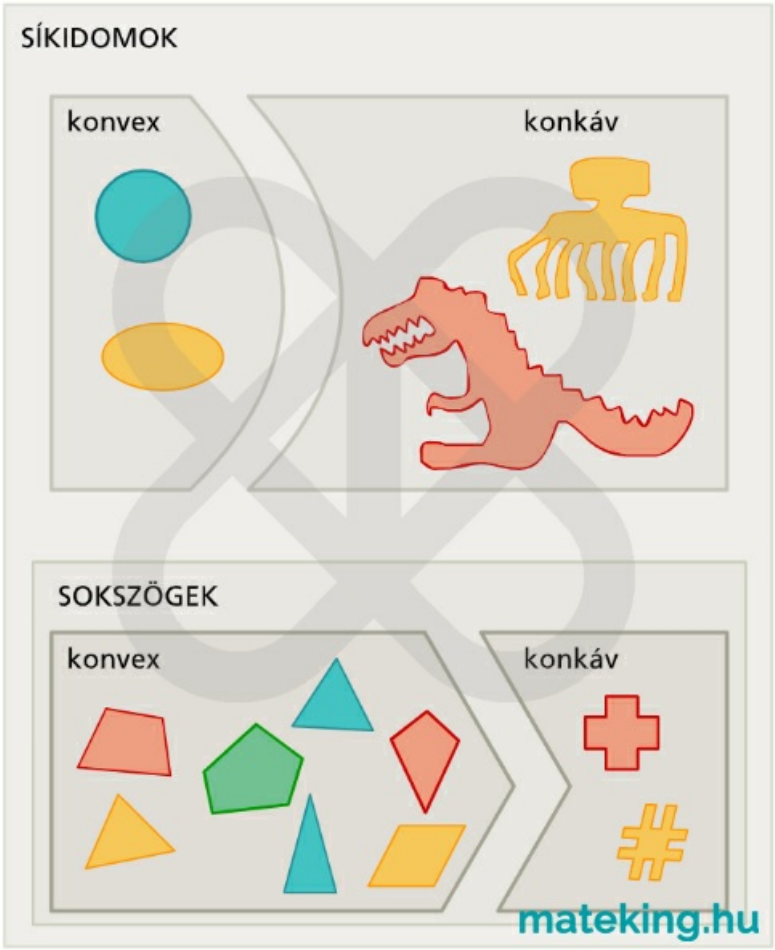
A konkáv síkidom az, amelyikben ki tudunk választani két olyan pontot, hogy az ezeket összekötő szakasznak egy része a síkidomon kívül halad. Egy kör vagy egy téglalap például nem konkáv, mert bárhogyan választunk benne két pontot, a pontokat összekötő szakasz is a síkidomban halad. De például egy szívecske már konkáv, mert ha a két kidudorodó részét összekötjük, akkor az összekötő vonal kívül halad. Mindez sokkal egyszerűbb, ha megnézed az ehhez a témához kapcsolódó epizódot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konvex síkidom az, amelyikben akárhogy veszünk két belső pontot, az őket összekötő szakasz minden pontja a síkidom belsejében lesz.

Egy kör vagy egy téglalap például konvex, mert bárhogyan választunk benne két pontot, a pontokat összekötő szakasz is a síkidomban halad. De például egy szívecske már nem konvex, mert ha a két kidudorodó részét összekötjük, akkor az összekötő vonal kívül halad. Mindez sokkal egyszerűbb, ha megnézed az ehhez a témához kapcsolódó epizódot.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sokszöget szabályosnak nevezünk, ha minden oldala és minden belső szöge egyforma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból álló zárt görbe (töröttvonal) határol. Ezeket az egyenes szakaszokat nevezzük a sokszög oldalainak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sokszögnek nevezzük azokat a síkidomokat, melyeket véges sok, egymáshoz csatlakozó egyenes szakasz alkotta zárt görbe határol. Ezeket a szakaszokat oldalaknak, vagy másként oldaléleknek nevezzük, és azokat a pontokat, ahol az oldalélek találkoznak, a sokszög csúcsainak hívjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sokszögek nem szomszédos csúcsait összekötő szakaszokat a sokszög átlójának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenlő szárú háromszögben van két egyforma hosszú oldal, amiket szárnak nevezünk. És hát van ugye a harmadik oldal, ez az alap.

Annyit érdemes megjegyezni róla, hogy az alaphoz tartozó súlyvonal, magasságvonal, oldalfelező merőleges és szögfelező mind egybeesik. És ez egyúttal a háromszög szimmetriatengelye is.

És azt is jó tudni róla, hogy az alapon fekvő szögek egyformák.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szabályos háromszögnek minden oldala és minden szöge egyenlő (tehát a szögek 60°-osak).

Szabályos háromszögben a körülírt kör középpontja, a magasságpont és a súlypont is egybeesnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszögnek van 90°-os szöge.

A derékszöggel szemközti oldalt átfogónak nevezzük, a másik kettőt pedig befogónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hegyesszögű háromszögek minden szöge hegyesszög, azaz 0°-nál nagyobbak, de 90°-nál kisebbek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A tompaszögű háromszögek azok, amelyeknek van egy tompaszöge, azaz egy olyan szöge, ami 90°-nál nagyobb, de 180°-nál kisebb.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög egyenlőtlenség szerint minden háromszög bármelyik oldalának rövidebbnek kell lennie, mint a másik két oldal összege.

$a+b>c \qquad a+c>b \qquad b+c>a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög magasságvonala a csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges.

Ezek mindig egy pontban metszik egymást, és ezt a pontot magasságpontnak nevezzük.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor a magasságpont a háromszögön kívülre esik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.

Ezek mindig egy pontban metszik egymást, ezt a pontot hívjuk a háromszög súlypontjának.

További izgalom, hogy a súlypont mindegyik súlyvonalat 2:1 arányban osztja.

Továbbá a súlyvonal felezi a háromszög területét.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög oldalfelezőmerőlegesei mindig egy pontban metszik egymást. Ez a pont minden csúcstól egyenlő távolságra van és emiatt a háromszög köré írható kör középpontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A háromszög belső szögfelezői mindig egy pontban metszik egymást. Ez a háromszögbe írható kör középpontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy háromszög oldalfelezőpontjait összekötjük, akkor a háromszög középvonalait kapjuk.

A középvonalak párhuzamosak a háromszög oldalaival és éppen fele olyan hosszúak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A jól ismert képlet háromszögek területére:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

És it jön egy kevésbé ismert háromszög-területképlet:

$$T = \frac{abc}{4R}$$

Itt R a háromszög köré írható körének sugara.

Ez pedig egy még kevésbé ismert képlet háromszögek területére:

$$T = r \cdot s$$

Itt r a beírható kör sugara, s pedig a kerület fele.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Hérón-képlet a háromszögek területképletei közül egy kevésbé ismert, de elég jól használható képlet. Akkor érdemes használni, ha ismert a háromszög mindhárom oldala.

$$s = \frac{a+b+c}{2} \qquad T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A legszabályosabb négyszög a négyzet. A négyzet oldalai egyenlő hosszúak és minden szöge derékszög. Egy sokszöget akkor nevezünk szabályos sokszögnek, ha minden oldala és minden szöge egyforma. Így tehát az egyetlen szabályos négyszög a négyzet. Ezen kívül a négyzetek mége egy fontos dolgot tudnak: az átlóik is merőlegesek egymásra.

A négyzet területe:

$$T = a^2$$

A négyzet kerülete:

$$K = 4a$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

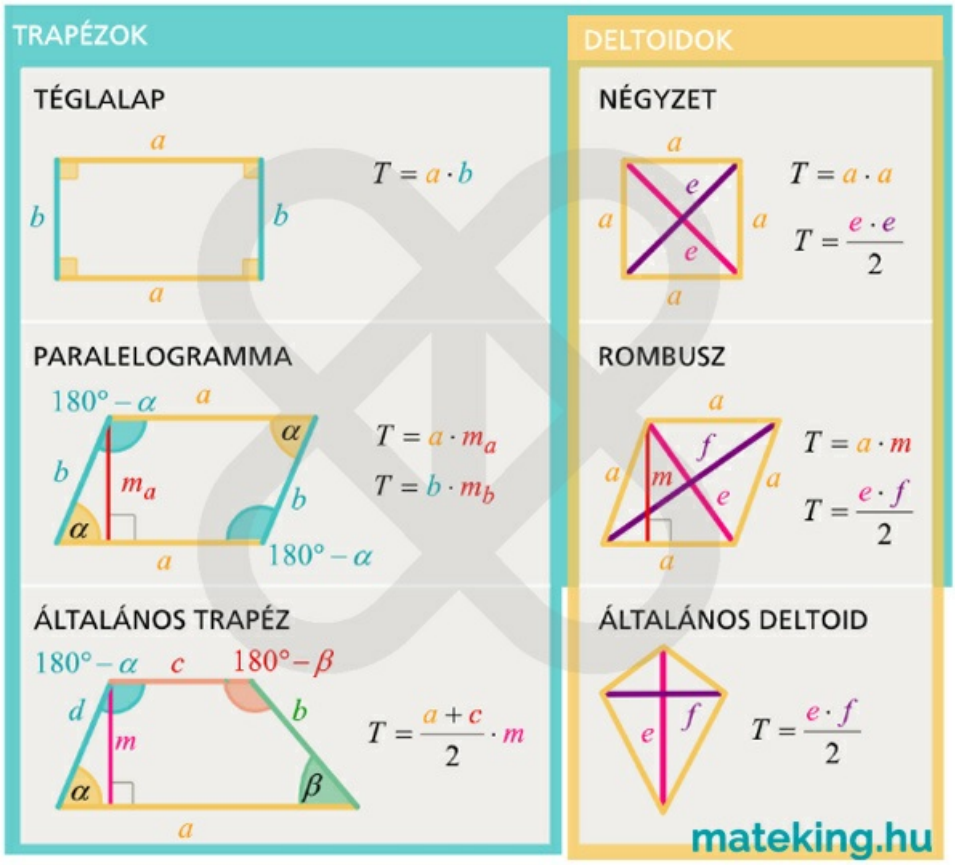
Téglalap olyan négyszög, aminek minden szöge derékszög. Vagyis az oldalak nem feltétlen egyenlő hosszúak. Olyankor, amikor az oldalai is egyenlő hosszúak, egy négyzetet kapunk. A téglalapok egyik fontos tulajdosága, hogy a szemközti oldalai egyforma hosszúak, vagyis két darab a hosszúságú és két darab b hosszúságú oldala van. A téglalapoknak egy másik fontos tulajdonsága pedig, hogy a szemközti oldalai párhuzamosak egymással. Ez pedig azt jelenti, hogy a téglalapok mindig paralelogrammák is egyben (ugyanis a paralelogrammák azok a négyszögek, amelyeknek van két párhuamos oldalpárjuk).

Területe:

$$T = a \cdot b$$

Kerülete:

$$K = 2a + 2b$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Rombusz egy olyan négyszög, amelynek minden oldala egyforma hosszú. Vagyis egy rombusznál az oldalak egyenlő hosszúságúak, de a szögeknek nem kell derékszögnek lenniük. Amikor a rombusz szögei derékszögek, egy négyzetet kapunk. Vagyis a négyzet is rombusz. A rombuszok másik fontos tulajdonsága, hogy a szemközti oldalaik mindig párhuzamosak egymással, vagyis a rombuszok paralelogrammák. is. Ez elvezet minket a rombusz egy másik definíciójához: a rombusz egyenlő oldalú paralelogramma.

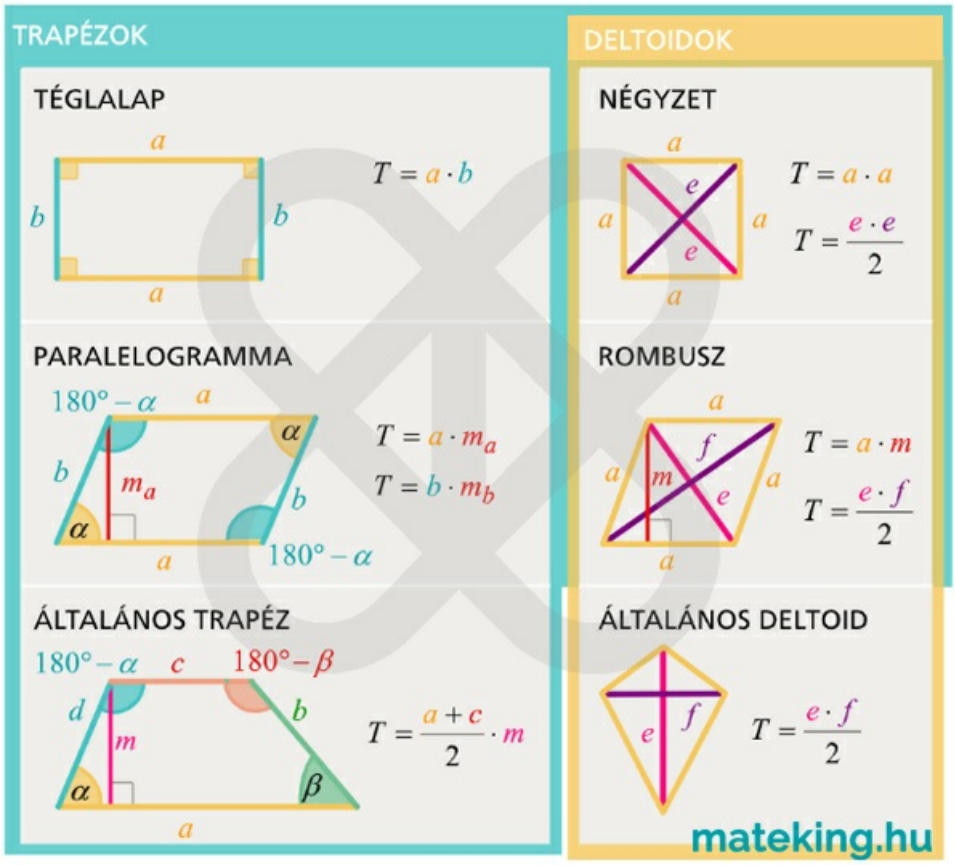
A rombusz magasságát m-mel jelöljük, az átlóit pedig e-nek és f-nek szokás nevezni. Ezeknek a segítségével tudjuk kiszámolni egy rombusz területét.

Területe:

$$T = a \cdot m = \frac{e \cdot f}{2}$$

Kerülete:

$$K = 4a$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

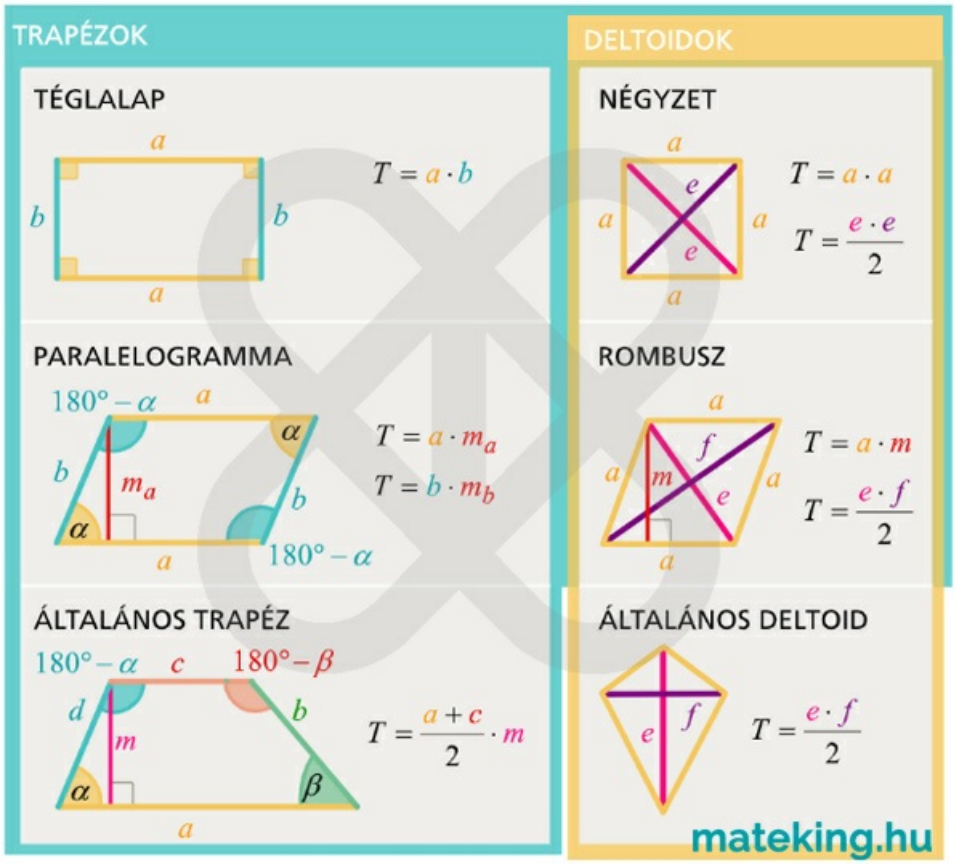
A paralelogramma olyan négyszög, aminek van két párhuzamos oldalpárja. Nagyon sok ilyen tulajdonságú négyszög van. Ilyenek a négyzetek, a téglalapok és a rombuszok. Vagyis minden négyzet, minden téglalap és minden qrombusz egyben paralelogramma is. A paralelogramma magasságát m-mel szokás jelölni.

Területe:

$$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

Kerülete:

$$K = 2a + 2b$$



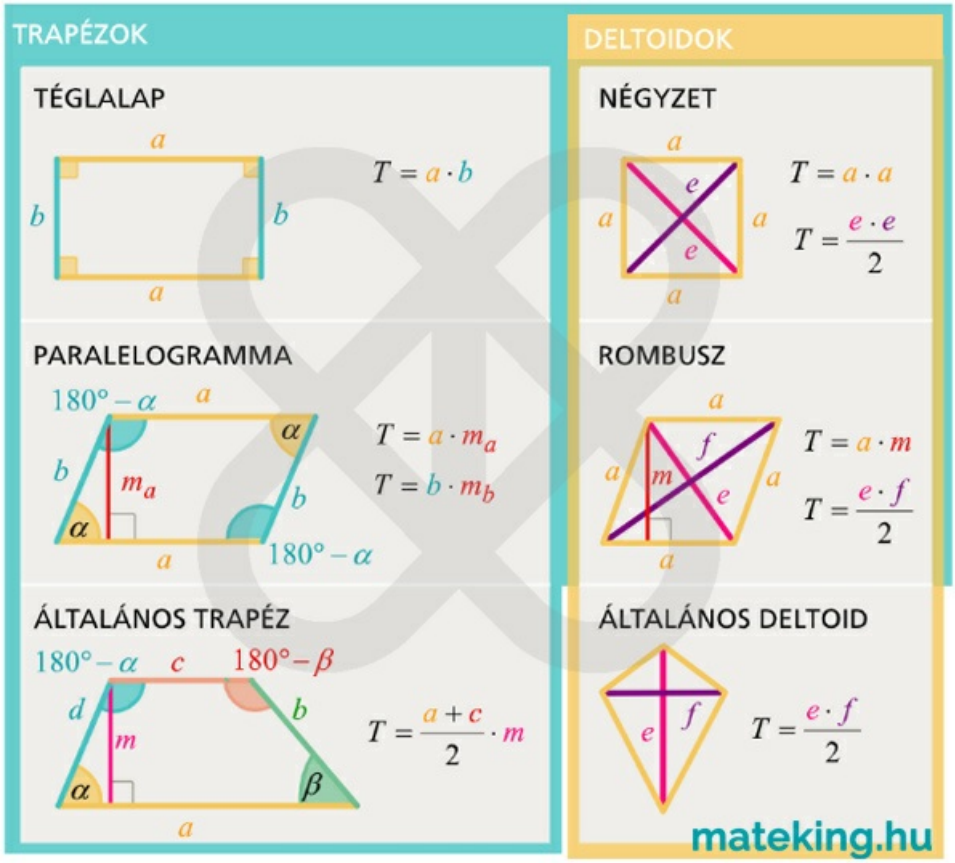
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A trapéz olyan négyszög, aminek van legalább egy párhuzamos oldalpárja. Ezeket az oldalakat a trapéz alapjainak nevezzük és a-val meg c-vel jelöljük. Általában a nagyobbik alapot szokás a-val jelölni és a kisebbik alapot pedig c-vel. Olyankor, amikor a trapéz alapjai egyforma hosszúak, paralelogrammát kapunk. Vagyis minden paralelogramma egyben trapéz is. Sőt, ha meggondoljuk, akkor a trapéz definíciója nagyon sok négyszögre ráillik. Egy darab párhuzamos oldalpárja ugyanis van a négyzetnek, a téglalapnak, a rombusznak és a paralelogrammáknak is. Vagyis minden négyzet, minden téglalap, minden rombusz és minden paralelogramma egyben trapéz is.

Mivel azonban ezeknek van külön neve, amikor egy feladatban trapézról van szó, általában olyan trapézra gondoljunk, aminek két különböző hosszúságú párhuzamos oldala van, az egyik "alul" a másik "felül" és ezek a trapéz a-val és c-vel jelölt alapjai.

Területe:

$$T = \frac{a+c}{2} \cdot m$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a trapéz alapján fekvő két szög ugyanakkora, olyankor a trapéz szimmetrikus.

A szimmetrikus trapézt még szokás egyenlő szárú trapéznak is hívni, ugyanis a két szára mindig egyforma hosszú.

Ezen kívül van egy fantasztikus tulajdonsága is, hogy van köré írható köre.

Innen ered a harmadik elnevezés: húrtrapéz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

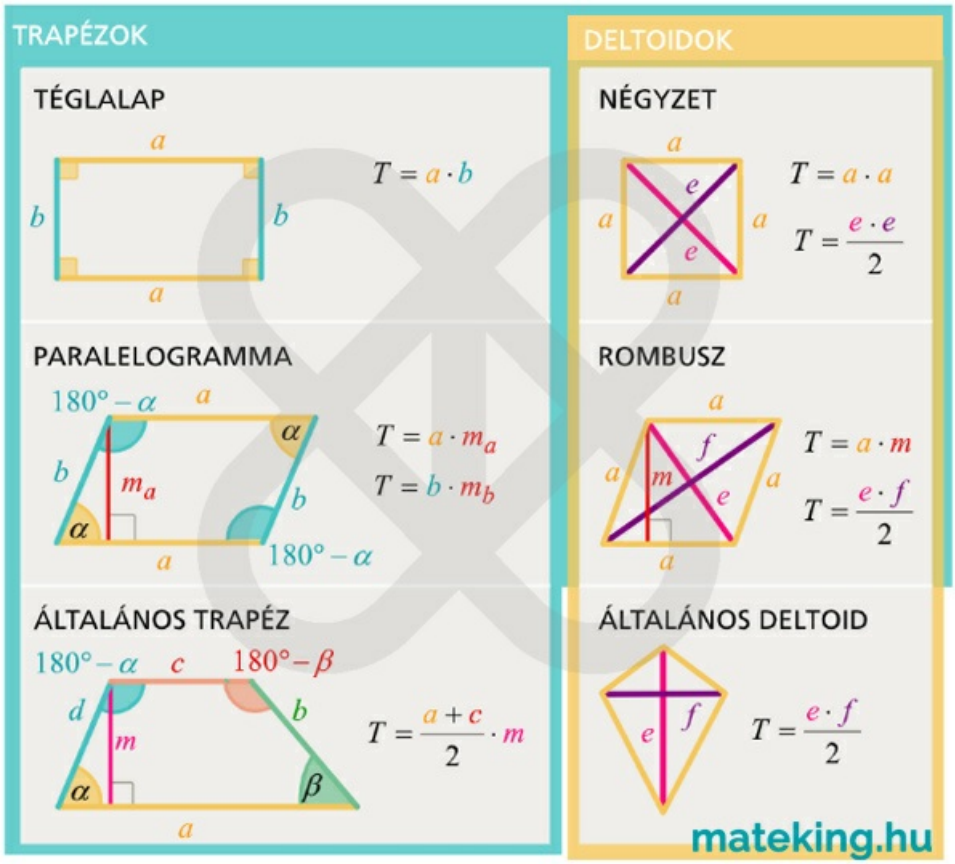
Azokat a négyszögeket nevezzük deltoidnak, amik papírsárkány alakúak és az átlóik merőlegesek egymásra.

Egy kicsit precízebben: deltoid az a négyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra és legalább az egyik átló szimmetriatengely.

A deltoidok közül kétféle speciális deltoidot érdemes megjegyezni, az egyik a rombusz, a másik a négyzet. Vagyis minden négyzet és minden rombusz deltoid. A deltoidok átlóit e-vel és f-fel jelöljük, és ezek csak akkor egyforma hosszúak, ha négyzetről van szó. A deltoidok területét általában az átlóik segítségével érdemes kiszámolni.

Területe:

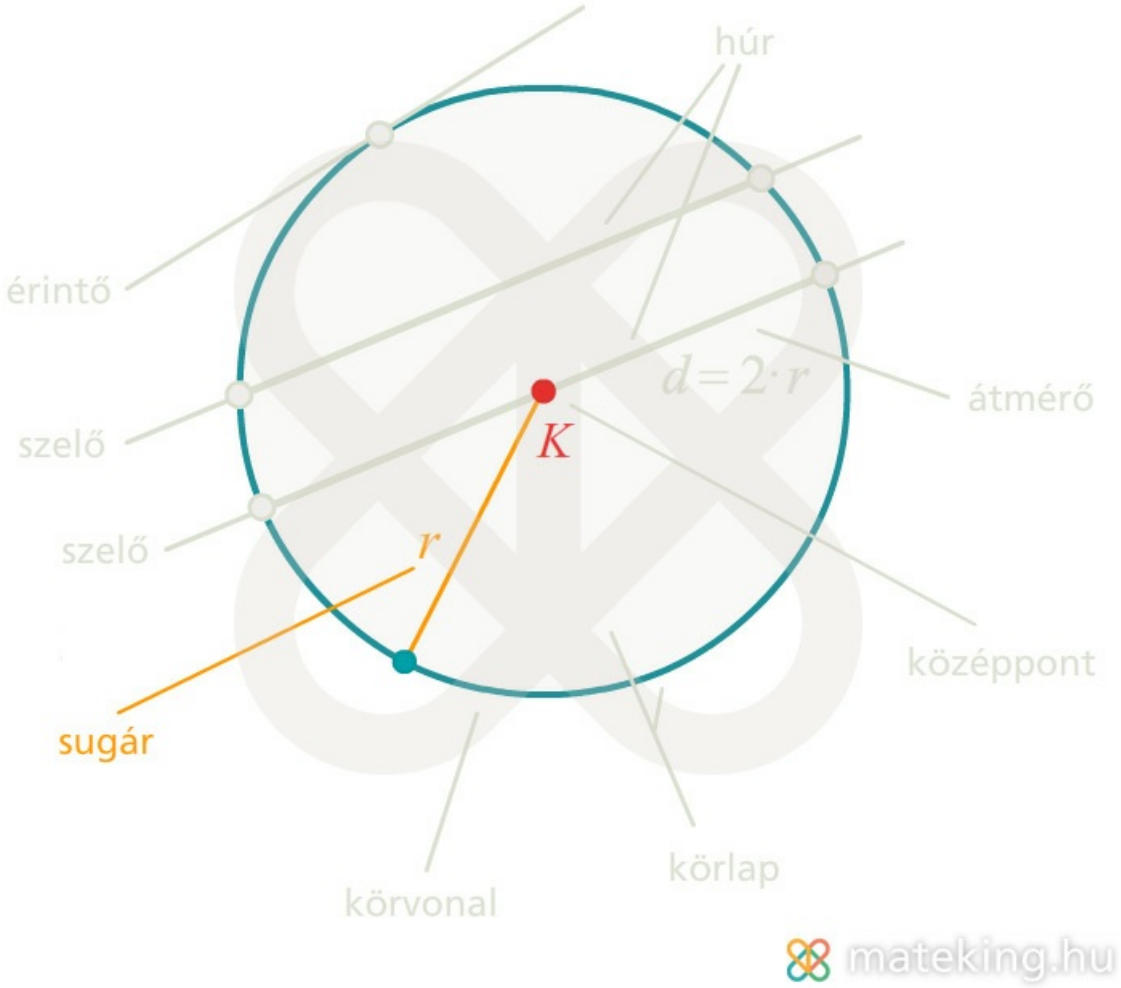
$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$



Megnézem a kapcsolódó epizódot

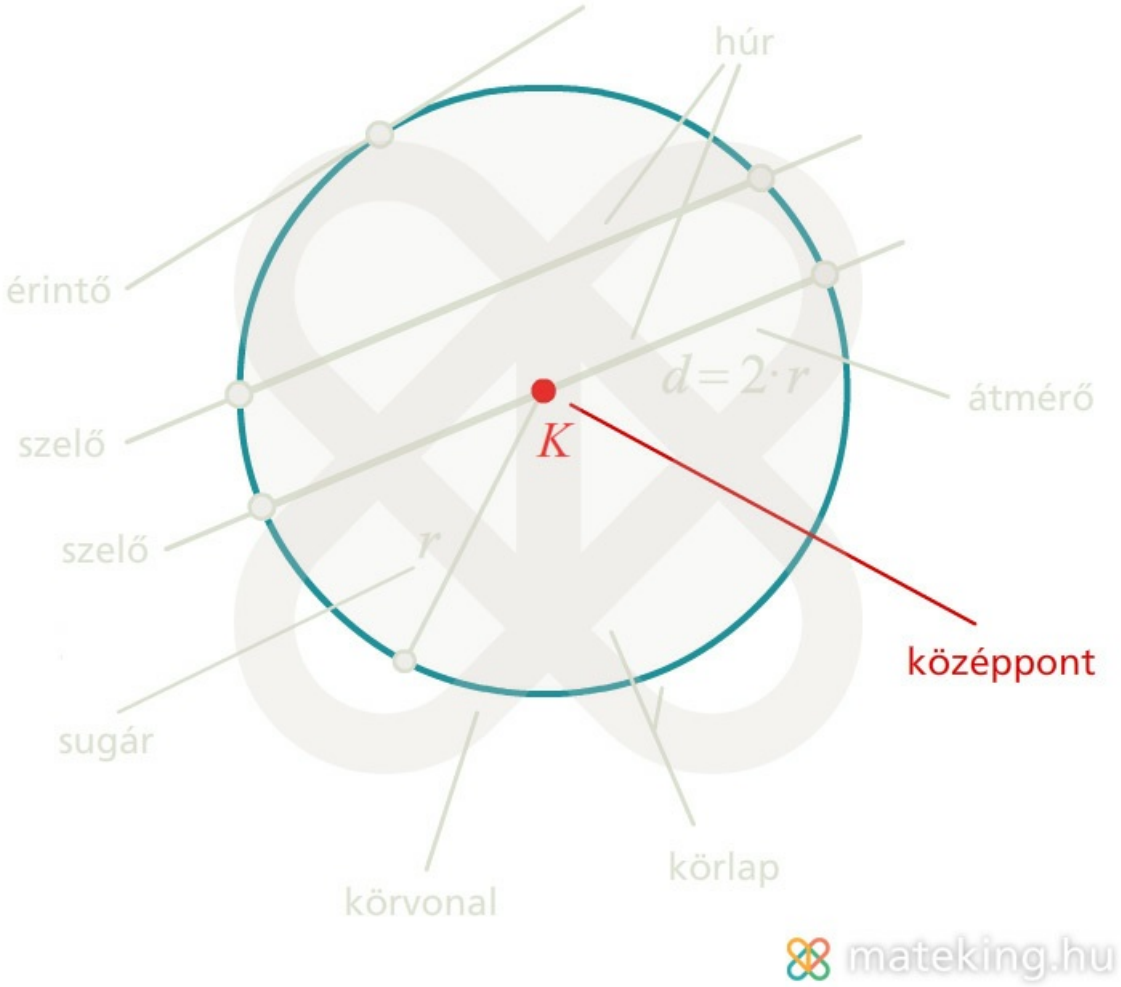
A kör

Egy kör sugara a kör középpontját a körvonal bármely pontjával összekötő szakasz hossza. A kör sugarát r betűvel jelöljük ami a radius szó kezdőbetűje.



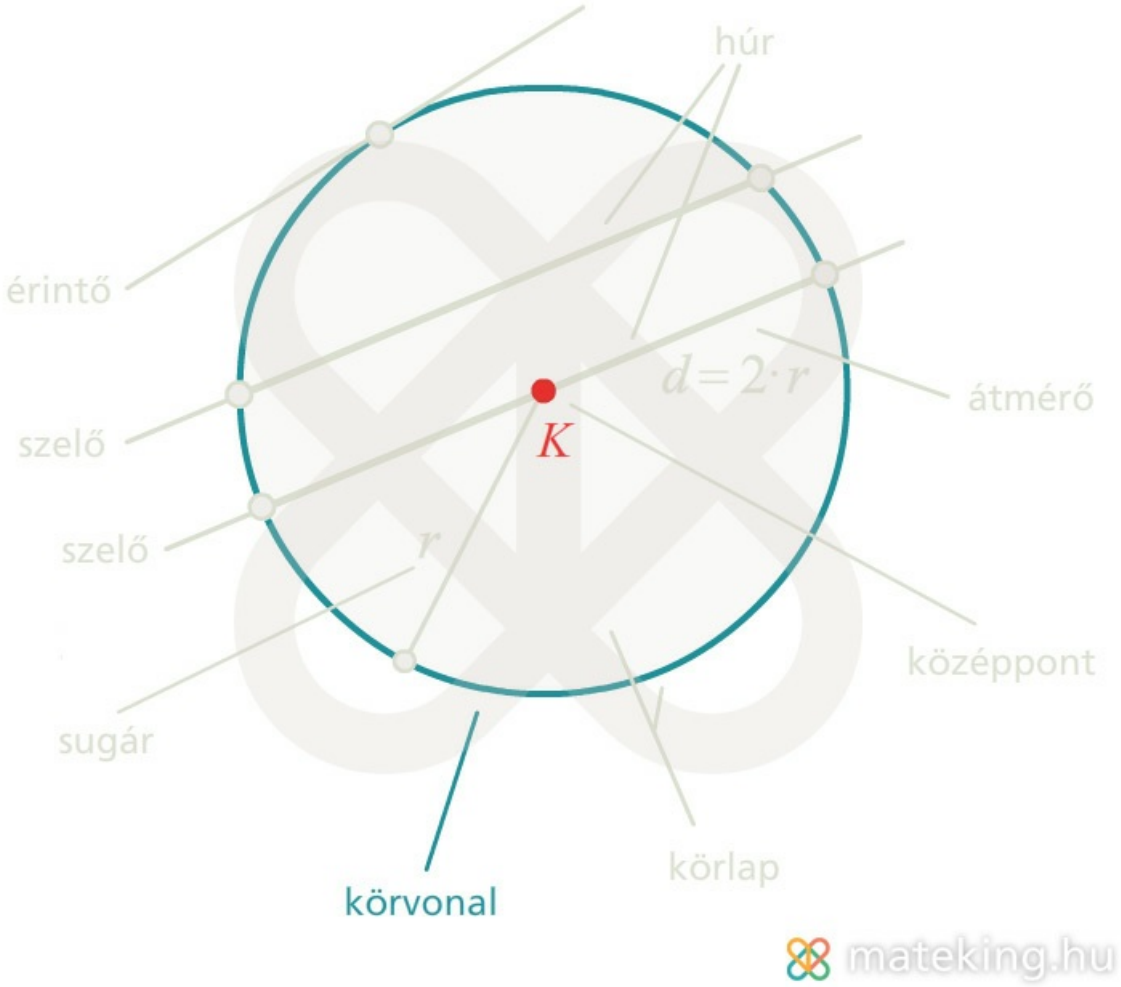
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kör azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Ezt az adott pontot hívjuk a kör középpontjának. A kör középpontját általában O-val vagy K-val szokás jelölni.



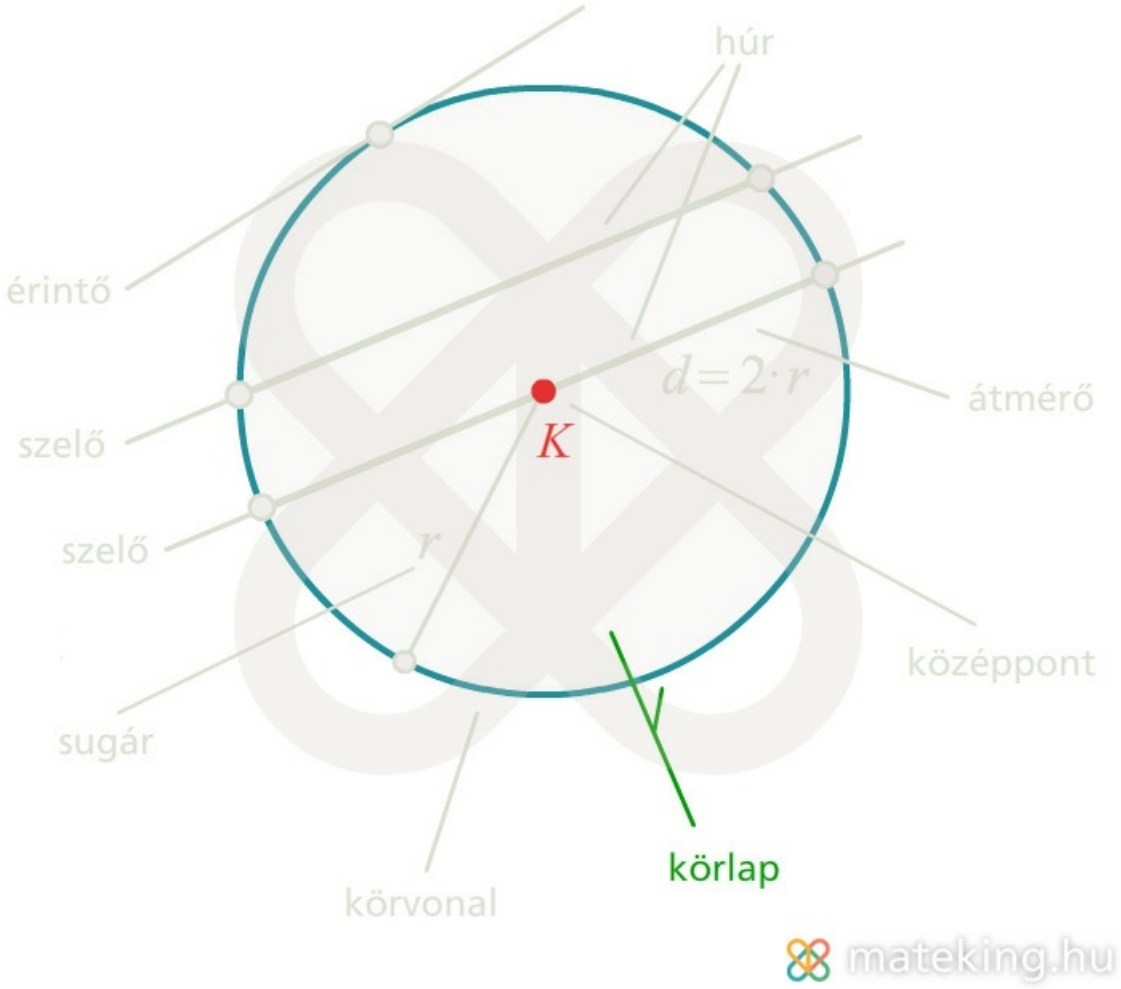
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körvonal azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra vannak. A körvonalat szokás egyszerűen körként is emlegetni.



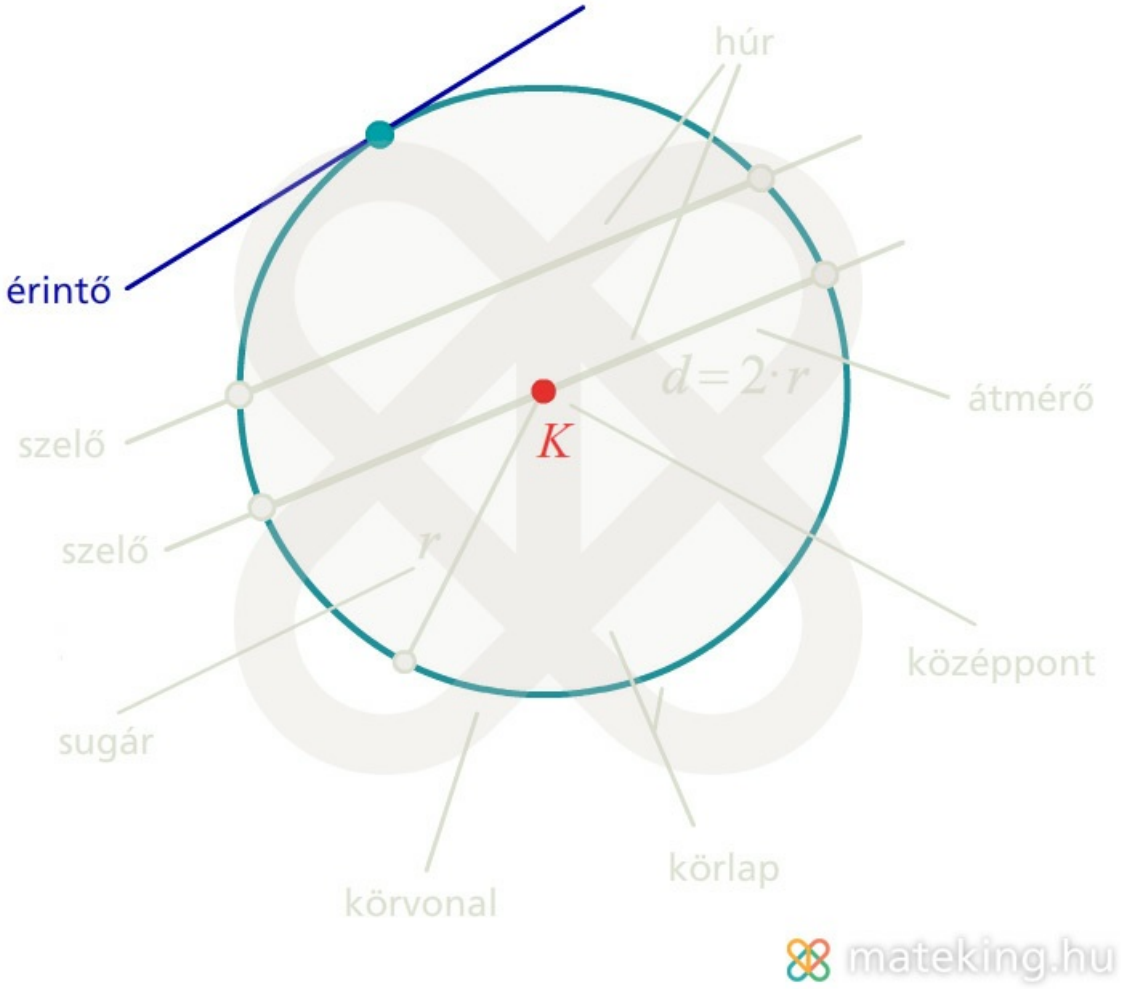
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körlap vagy körlemez a körvonal és a körvonalon belüli rész együttes elnevezése. Ezt így egyben szokás egyszerűen csak simán körnek is nevezni. Matematikailag precíz definíciója: azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) legfeljebb egy adott ***r*** távolságra (***r*** a kör sugara) vannak.



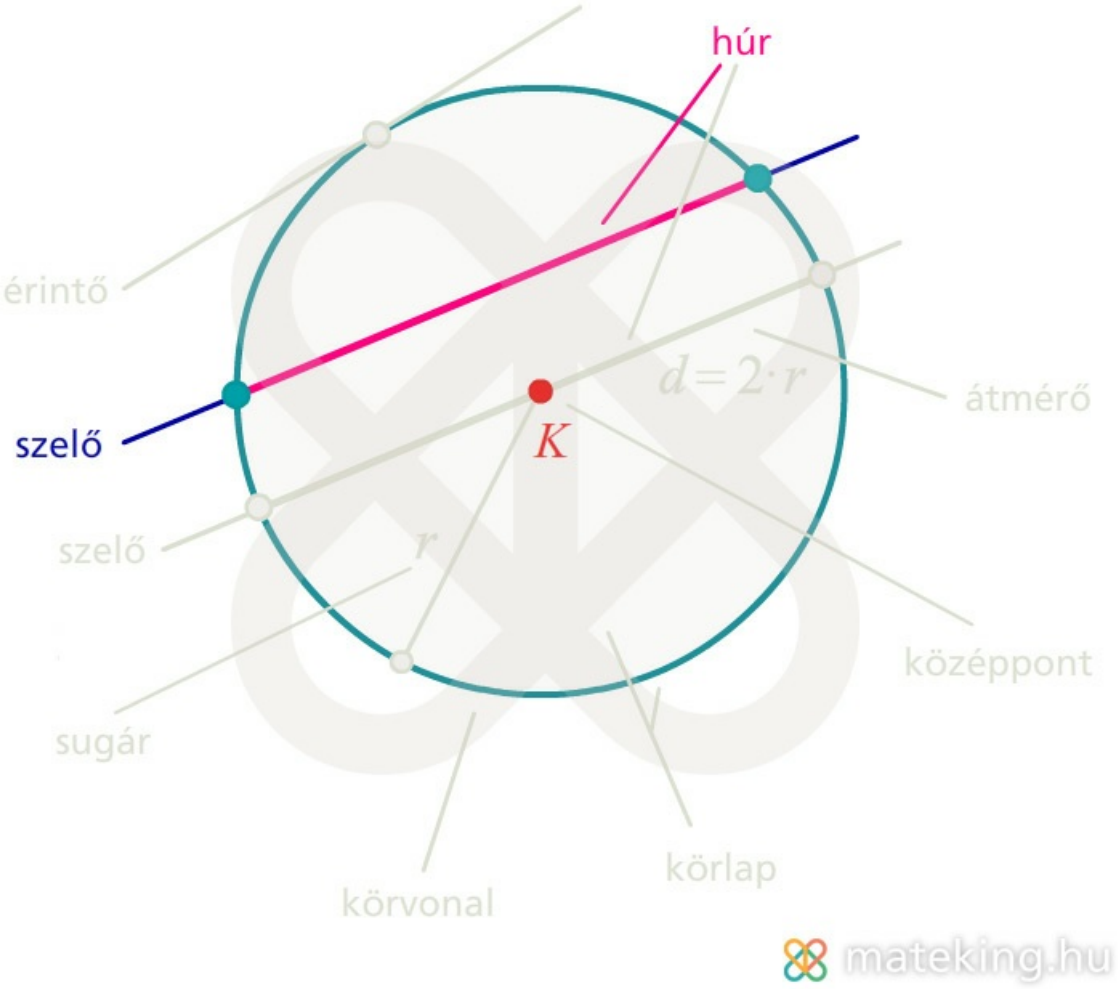
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenes éppen olyan távol halad egy kör középpontjától, mint a kör sugara, akkor ez az egyenes érinti a kört. Az érintőnek csak egy közös pontja van a körrel, amit érintési pontnak nevezünk. Az érintési pontba vezető sugár mindig merőleges az érintőre.



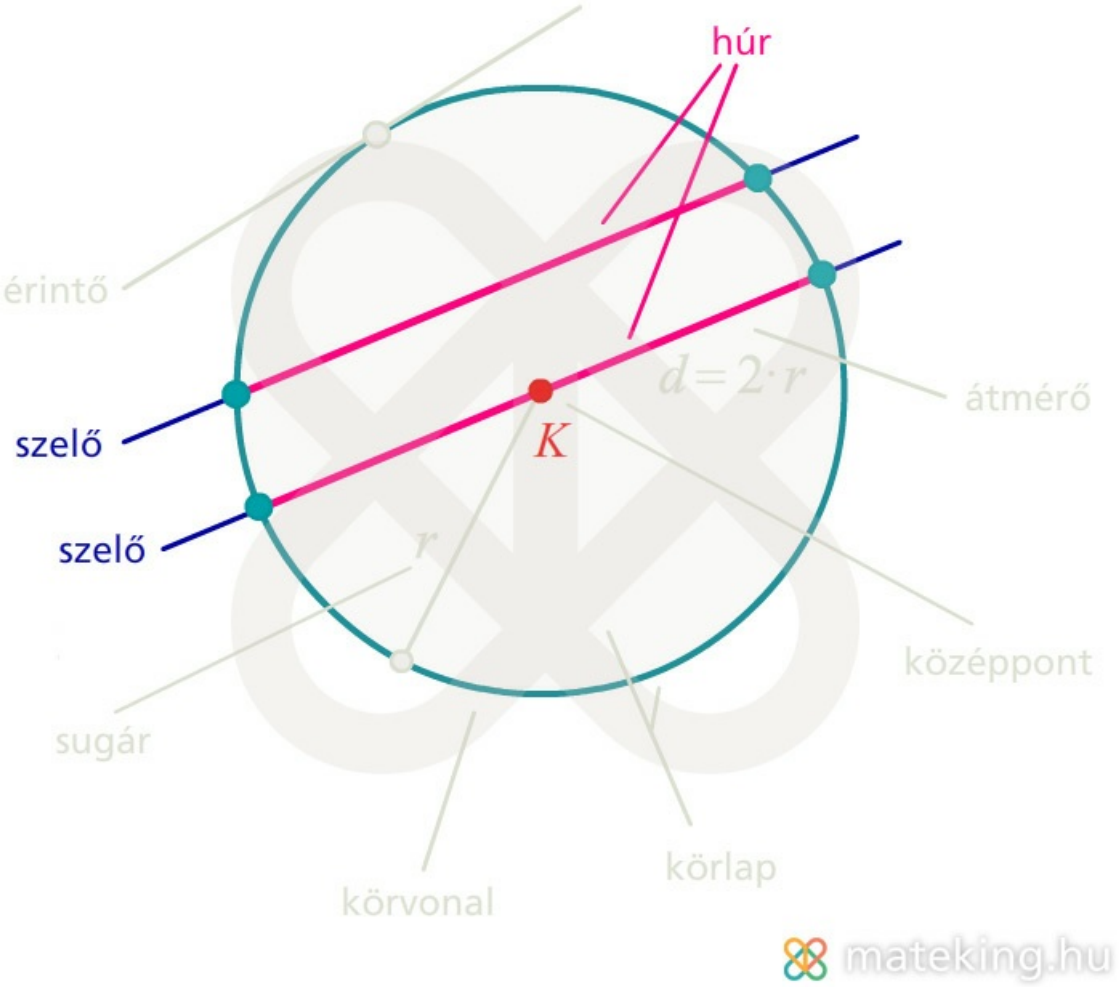
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat az egyeneseket, amik metszik a kört úgy hívjuk, hogy szelő. A szelők két pontban metszik a kört és a két pont közötti szakasz a húr. Olyankor, amikor a szelő éppen átmegy a kör középpontján, a szelő a kör területét felezi, és ilyenkor a metszéspontok közötti húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.



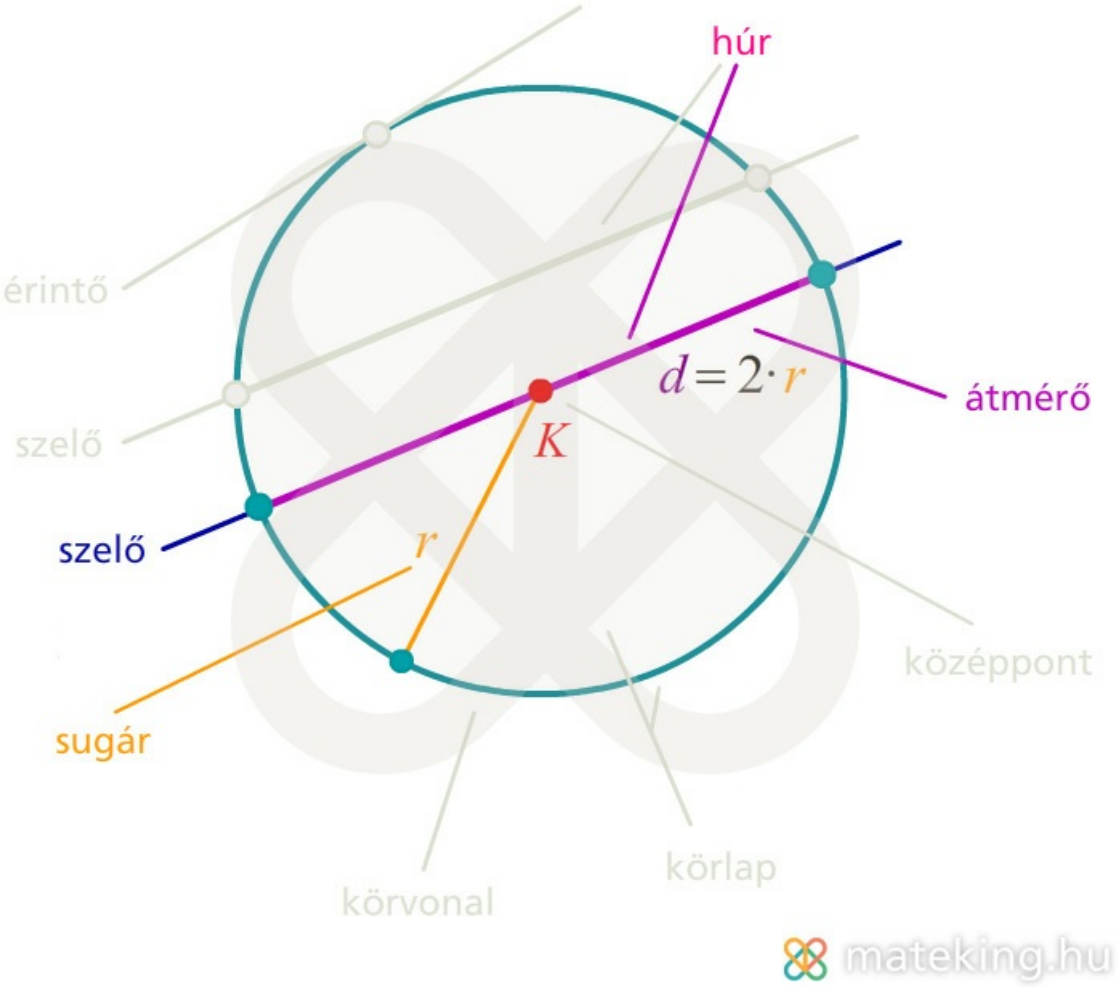
Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy körben a körvonal két különböző pontját összekötő szakaszt húrnak nevezzük. Olyankor, amikor a húr éppen átmegy a kör középpontján, a húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

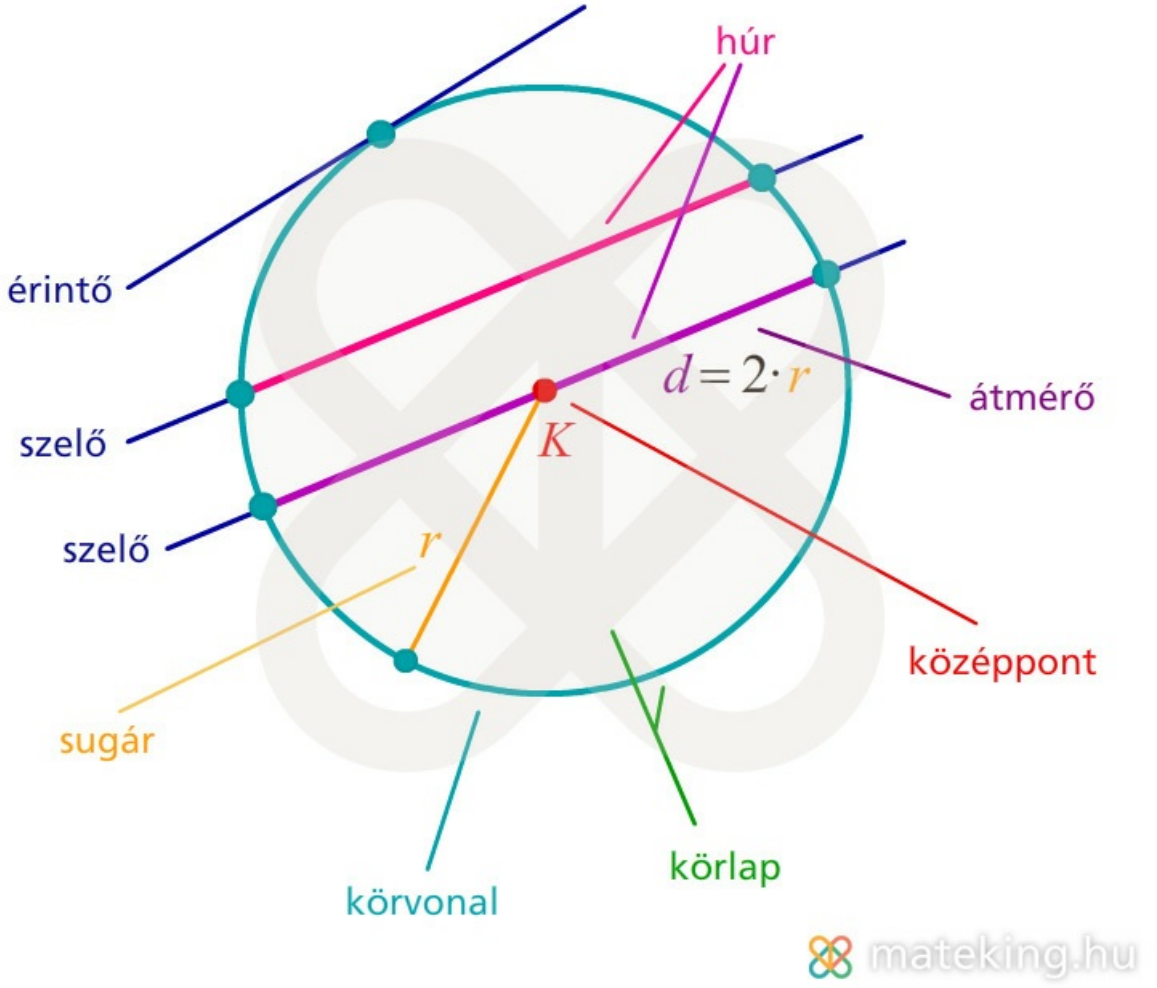
A kör középpontját áthaladó húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő a kör maximális szélessége, és az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese. Jele d a diameter szó kezdőbetűje alapján.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy adott ponttól állandó távolságra lévő pontok halmazát körvonalnak nevezzük. És ezt az állandó távolságot hívjuk a kör sugarának. A sugár jele ***r***. A kör középpontját általában ***K***-val jelöljük.

És most nézzük a kör részeit:
Középpont: A kör azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Ezt az adott pontot hívjuk a kör középpontjának. A kör középpontját általában O-val vagy K-val szokás jelölni.
Körvonal: A körvonal azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra vannak. A körvonalat szokás egyszerűen körként is emlegetni.
Sugár: Egy kör sugara a kör középpontját a körvonal bármely pontjával összekötő szakasz hossza. A kör sugarát r betűvel jelöljük ami a radius szó kezdőbetűje.
Körlap vagy körlemez: A körlap vagy körlemez a körvonal és a körvonalon belüli rész együttes elnevezése. Ezt így egyben szokás egyszerűen csak simán körnek is nevezni. Matematikailag precíz definíciója: azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) legfeljebb egy adott r távolságra (r a kör sugara) vannak.
Húr: Egy körben a körvonal két különböző pontját összekötő szakaszt húrnak nevezzük. Olyankor, amikor a húr éppen átmegy a kör középpontján, a húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.
Átmérő: A kör középpontját áthaladó húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő a kör maximális szélessége, és az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese. Jele d a diameter szó kezdőbetűje alapján.



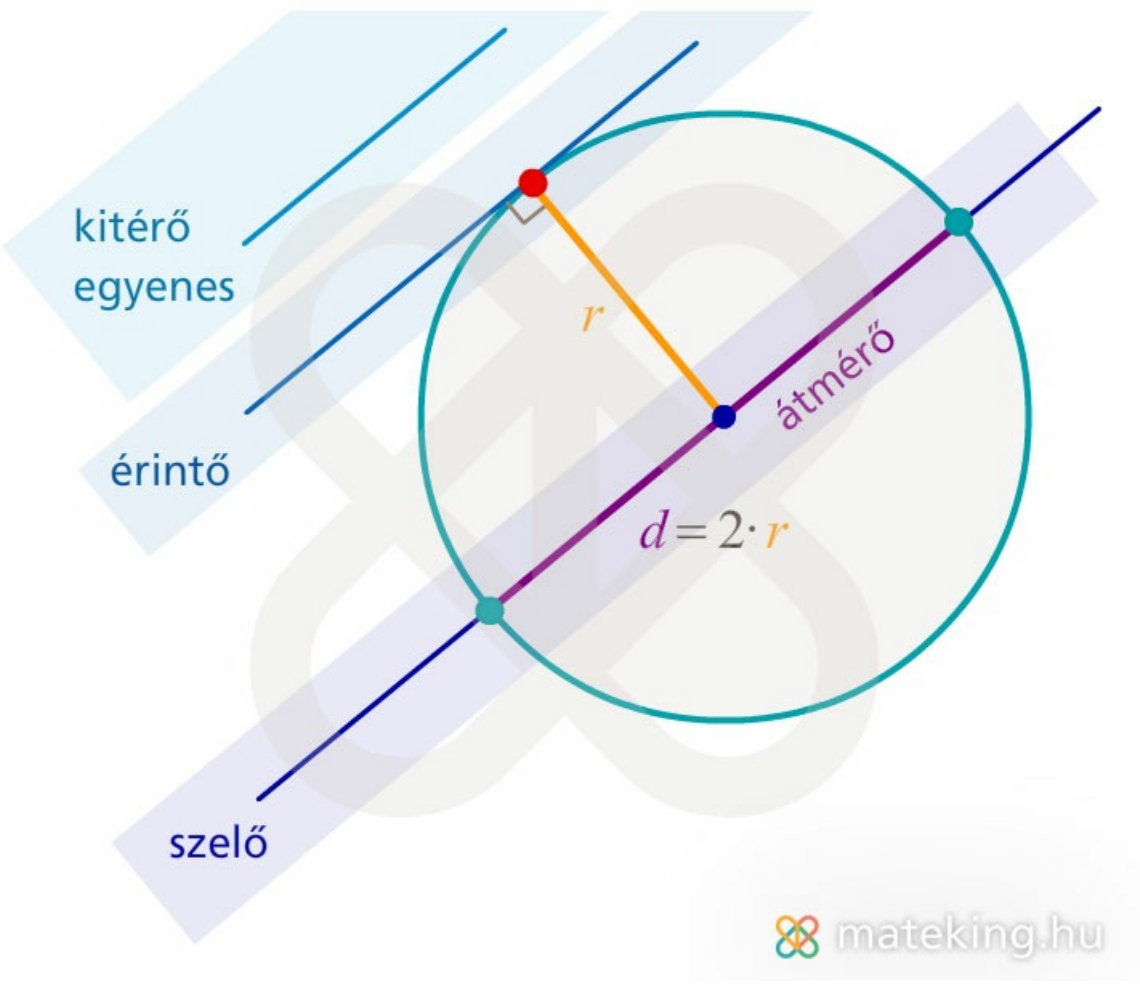
Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkban háromféle lehet. Az egyenes vagy metszi a kört vagy érinti, vagy kitérő.

Szelő: Azokat az egyeneseket, amik metszik a kört úgy hívjuk, hogy szelő. A szelők két pontban metszik a kört és a két pont közötti szakasz a húr. Olyankor, amikor a szelő éppen átmegy a kör középpontján, a szelő a kör területét felezi, és ilyenkor a metszéspontok közötti húrt átmérőnek nevezzük. Az átmérő mindig a kör sugarának a kétszerese.

Érintő: Ha az egyenes éppen olyan távol halad a kör középpontjától, mint a kör sugara, akkor érintőt kapunk. Az érintőnek csak egy közös pontja van a körrel, amit érintési pontnak nevezünk. Az érintési pontba vezető sugár mindig merőleges az érintőre.

Kitérő egyenes: Végül az is lehet, hogy a körnek egyetlen közös pontja sincs a körrel, ilyenkor kitérő egyenesnek nevezzük.



Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két kör kölcsönös helyzete a síkban már eléggé sokféle lehet. Két fő esetet lehet megkölönböztetni egymástól. Az egyik eset, amikor a két kör sugara nem ugyanakkora, a másik eset pedig az, amikor a két kör sugara ugyanakkora.

Két kör kölcsönös helyzete, ha a körök sugara nem ugyanakkora:
Elkerülő körök: Ha a két kör középpontjának távolsága nagyobb, mint a körök sugarainak összege, akkor a köröknek nincs közös pontjuk.
Kívülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága éppen a sugarak összege, akkor egy közös pontjuk van és ilyenkor a két kör kívülről érinti egymást.

Metsző körök: Ha a körök középpontjainak távolsága kisebb, mint a sugarak összege, de nagyobb, mint a sugarak különbsége, akkor a körök metszik egymást. Ilyenkor a körvonalaiknak két közös pontja van.
Belülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága a két kör sugarának a különbsége, akkor az egyik kör belülről érinti a másikat.
Tartalmazó körök: Ha a két középpont távolsága még ennél is kisebb, de pozitív, akkor az egyik kör tartalmazza a másik kört.
Koncentrikus körök: Végül, ha a két kör középpontjának a távolsága nulla, vagyis a középpontok egybeesnek, akkor azt mondjuk, hogy a körök koncentrikus körök.



Két kör kölcsönös helyzete, ha a körök sugara ugyanakkora:
Elkerülő körök: Ha a két kör középpontjának távolsága nagyobb, mint a körök sugarainak összege, akkor a köröknek nincs közös pontjuk.
Kívülről érintő körök: Ha a középpontok távolsága éppen a sugarak összege, akkor egy közös pontjuk van és ilyenkor a két kör kívülről érinti egymást.
Metsző körök: Ha a körök középpontjainak távolsága kisebb, mint a sugarak összege, de nagyobb, mint nulla, akkor a körök metszik egymást. Ilyenkor a körvonalaiknak két közös pontja van.

Egybeeső körök: Ha a középpontok távolsága nulla, vagyis a középpontok egybeesnek, akkor azt mondjuk, hogy a körök koncentrikus körök.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az r sugarú kör kerülete:

$$K = 2r \cdot \pi$$

Területe:

$$T = r^2 \cdot \pi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körcikk ívhossza és területe úgy aránylik a kör kerületéhez és területéhez, mint a körcikkhez tartozó középponti szög a 360°-hoz:

$$I_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r \cdot \pi$$

$$T_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Thalész-tétel azt mondja, hogy ha az AB szakasz egy kör átmérője, és C a kör tetszőleges harmadik pontja, akkor az ACB-szög mindig derékszög.

Ezt úgy is szokás mondani, hogy az AB szakasz a körív bármely harmadik C pontjából derékszögben látszik.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Pitagorasz-tétel

A derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével, vagyis ha az átfogót c-vel jelöltük:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy háromszög oldalaira teljesül, hogy

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Akkor a háromszög derékszögű.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Pitagoraszi számhármasok olyan számok, amelyekre teljesül a Pitagorasz-tétel.

Pl.: $3, 4$ és 5 együtt Pitagoraszi számhármasok, ugyanis $3^2 + 4^2 = 5^2$ igaz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mértékegységek és mértékegység-átváltás

kilo	1000	kilométer (km)		kilogramm (kg)
hekto	100		hektoliter (hl)	
deka	10			dekagramm (dkg)
nincs prefixum	1	méter (m)	liter (l)	gramm (g)
deci	0,1	deciméter (dm)	deciliter (dl)	
centi	0,01	centiméter (cm)	centiliter (cl)	
milli	0,001	milliméter (mm)	milliliter (ml)	milligramm (mg)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$1\,m = 10\,dm = 100\,cm = 1000\,mm$$

Úgy kapjuk meg ebből a négyzetméter, négyzetdeciméter, négyzetcentiméter és négyzetmilliméter váltószámait, hogy négyzetre emeljük a mértékegységeket és a váltószámokat is:

$$1\,m^2 = 10^2\,dm^2$$

$$1\,m^2 = 100^2\,cm^2$$

$$1\,m^2 = 1000^2\,mm^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$1\,m = 10\,dm = 100\,cm = 1000\,mm$$

Úgy kapjuk meg ebből a köbméter, köbdeciméter, köbcentiméter és köbmilliméter váltószámait, hogy harmadik hatványra emeljük a mértékegységeket és a váltószámokat is:

$$1\,m^3 = 10^3\,dm^3$$

$$1\,m^3 = 100^3\,cm^3$$

$$1\,m^3 = 1000^3\,mm^3$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$1\,l = 1\,dm^3$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

1 hét = 7 nap

1 nap = 24 óra

1 óra = 60 perc

1 perc = 60 másodperc

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

Egy szám abszolútértékén a nullától való távolságát értjük.

Precizebben egy x szám abszolútértékén ezt értjük:

$$|x|=\begin{cases} x \text{ ha } 0 \leq x \\ -x \text{ ha } x<0 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gyökös azonosságok és gyökös egyenletek

Egy a nem negatív szám négyzetgyöke az a nem negatív szám, aminek a négyzete a.

$a \geq 0 \qquad \sqrt{a} \geq 0 \qquad \sqrt{a}^2 = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0,\ b \geq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy a szám köbgyöke az a szám, aminek a köbe a.

$a \in R \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \in R,\ b \in R$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad a \in R,\ b \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökvonás másképpp viselkedik páros, illetve páratlan gyökkitevő esetén, így kétféle definíciónk lesz.

Egy a nem negatív szám $n = 2k$-adik gyöke az a nem negatív szám, amire:

$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$

Egy tetszőleges a szám $n = 2k + 1$-edik gyöke az a szám, amire:

$(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökös egyenletek megoldását mindig ezzel kell kezdeni:

$$\sqrt{\text{IZÉ}} \Rightarrow \text{IZÉ} \geq 0$$

$$\sqrt{\text{IZÉ}} = \text{VALAMI} \Rightarrow \text{VALAMI} \geq 0$$

Ezt követően az elsőszámú célunk, hogy megszabaduljunk a gyökjeltől, amit négyzetreemeléssel végezhetünk. Ilyenkor az a lehető legjobb, ha a gyökös izé magányosan álldogál.

Ha megszabadultunk a gyökjeltől, minden úgy megy tovább, ahogy azt már megszokhattuk az egyenleteknél.

A végén viszont fontos, hogy ellenőriznünk kell, a megoldásunk megfelel-e a feladat elején felírt kritériumnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometria a síkgeometriában

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{szöggel melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szöggel melletti befogó}} = \frac{a}{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének koszinuszát a következőképp értelmezzük:

$$\cos\alpha = \frac{\text{szöggel melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének szinuszát a következőképp értelmezzük:

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Derékszögű háromszög α hegyesszögének tangensét a következőképp értelmezzük:

$$\tan\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szöggel melletti befogó}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A körszelet területét úgy kapjuk, hogy először kiszámoljuk, hogy mekkora területű a körcikk, aztán pedig kivonjuk belőle az ebbe beleeső egyenlőszárú háromszög területét:

$$T_{\text{sz}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{r^2 \cdot \sin alpha}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Logaritmus, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

$log_a x$ azt mondja meg, hogy a-t hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy x-et kapjunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x^k} = \frac{k}{n} \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logaritmikus egyenletek megoldásának lényege, hogy ilyen alakra jussunk:

$$log_a x = b$$

Mert innen a logaritmus definíciója miatt az következik, hogy

$$x = a^b$$

Ahhoz, hogy a bonyolúltabb egyenleteket is ilyen alakra hozzuk, a logaritmus azonosságait használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek

Azt a kört a koordinátarendszerben, aminek középpontja az origo és a sugara 1, egységkörnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin\alpha = \sin\left(\pi - \alpha\right)$

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad -\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\cos\alpha = \cos\left(\pi - \alpha\right)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának x koordinátáját nevezzük az α szög koszinuszának, és így jelöljük: $\cos\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának y koordinátáját nevezzük az α szög szinuszának, és így jelöljük: $\sin\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy α szög tangense az α szög szinuszának és koszinuszának hányadosával egyenlő:

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad k \in Z$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények periodikusak, ez azt jelenti, hogy bizonyos időközönként megismétlik önmagukat. Ezt az időközt periódusnak nevezzük és az ő esetükben a periódus 2π.

Ha van egy ilyen egyenlet, hogy

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

akkor ennek a periodikussága miatt végtelen sok megoldása van, ezért írjuk oda a megoldások mögé, hogy $+2k\pi$.

További nehézség, hogy két megoldás is van, az egyiket a számológépünk adja, a másikat pedig...

Szinusz esetén úgy, hogy a két megoldás összegének π-nek kell lennie.

Koszinusz esetén pedig úgy, hogy a két megoldás mindig egymás minuszegyszerese.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus függvényeknek vagy szögfüggvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek tartalmaznak trigonometrikus kifejezéseket, mint például szinusz, koszinusz vagy tangens. Ezek eredetileg egy derékszögű háromszög egy szöge és két oldala hányadosa közti összefüggéseket írja le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Szinusztétel és koszinusztétel

Bármely háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával. De ne ezt jegyezzük meg. A szinusztétel ennél sokkal többet is tud. Mégpedig ezt, ahol R a háromszög köré írható körének a sugara:

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Koszinusz tétel minden háromszögben felírható:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektorok

A vektor egy irányított szakasz.

Jelölése: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$

A két vektor összege:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

A két vektor különbsége:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ vektor hossza:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza:

$$\overrightarrow{AB} = |\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

És pont ugyanígy kapjuk meg az A és B pontok távolságát is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két pont közti vektor a végpontba mutató helyvektor minusz a kezdőpontba mutató helyvektor.

Tehát $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Koordinátageometria

A normálvektor az egyenesre merőleges nem nullvektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az irányvektor az egyenessel párhuzamos nem nullvektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{n}(A,B)$ normálvektorú és a $P(x_0,y_0)$ ponton átmenő e egyenes egyenlete:

$$e: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$C(u,v)$ középpontú és r sugarú kör egyenlete:

$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy P pontnak az $\underline{n}(A,B)$ normálvektorú e egyenestől mért távolsága:

$$d(P,e)=\left|\frac{e(P)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Itt $e(P)$ azt jelenti, hogy a P pont koordinátáit behelyettesítjük az e egyenes egyenletébe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot
