

MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEK 0 RKK tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 10. 28.

Tartalomjegyzék

Algebra, betűs kifejezések használata..... **2**

Nevezetes azonosságok, binomiális tétel..... **5**

Hatványozás, hatványazonosságok, normálalak..... **6**

Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés..... **8**

Elsőfokú egyenletek..... **9**

Másodfokú egyenletek..... **10**

Egyenlőtlenségek..... **11**

Egyenletrendszerek..... **12**

Függvények..... **13**

Elsőfokú függvények..... **15**

Függvénytranszformációk, függvények ábrázolása..... **16**

Kombinatorika..... **17**

Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek..... **19**

Logaritmus, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek..... **20**

Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek..... **21**

Vektorok..... **23**

Koordinátageometria..... **24**

Statisztika..... **25**

Algebra, betűs kifejezések használata

Ha több művelet szerepel egymás után, akkor ezeket a műveleti sorrend szerint kell elvégeznünk.

A műveleti sorrendben az első mindig a zárójel, vagyis a zárójelben szereplő műveleteket kell elsőként elvégezni.
A második a szorzás és az osztás. Ha több szorzás és osztás van, akkor balról jobbra kell őket elvégezni.
Végül az utolsó szint az összeadás és kivonás, és itt is ha több is van belőlük, akkor balról jobbra kell elvégezni.

A hatványozás még egy kicsit bezavarhat a dologba, így érdemes megnézni külön a hatványozásról és a hatványazonosságokról szóló epizódokat is.

Most pedig nézzünk egy példát a műveleti sorrendre:

Pl.: $3 \cdot (5-3) + 2 : 2 = 3 \cdot 2 + 2 : 2 = 6 + 1 = 7$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az együttható a betűs kifejezés előtt álló szám.

Pl.: $3x$ kifejezés együtthatója 3.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az algebrai kifejezésekben a betűket változóknak nevezzük.

Pl.: $2x + y$ algebrai kifejezésben x és y változók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A betűs kifejezéseket nevezzük algebrai kifejezéseknek.

Pl.: $2x + y$ egy algebrai kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az önmagában álló számokat nevezzük konstansnak.

Pl. $2x + y + 5$ kifejezésben az 5 konstans.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egynemű kifejezések azok a betűs kifejezések, amik csak az együtthatójukban különböznek.

pl.: $5x$ és $3x$ egynemű kifejezések, mert csak az együtthatóik (5 és 3) különböznek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egynemű kifejezések mindig összevonhatóak. Az összevont kifejezés együtthatója az eredeti együtthatók összege lesz.

Pl.: $3x + 5x + 2x = (3 + 5 + 2)x = 10x$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Zárójel felbontásakor minden tagot minden taggal szorozni kell.

Pl.: $5 \cdot (4x + 6) = 5 \cdot 4x + 5 \cdot 6 = 20x + 30$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kiemelés a zárójelfelbontás megfordítása.

A dolog úgy indul, hogy találnunk kell egy közös részt, amit kiemelhetünk.

A kiemelés során egy többtagú kifejezést egy vagy többtagú kifejezések szorzatává alakítjuk át úgy, hogy minden tagból kiemeljük a közös részeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0}$ $\sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ $\frac{}{\text{tört nevező}} \neq 0$

pl.

$\frac{2}{x-3}$ értelmezési tartománya $x \in R \setminus \{3\}$, mert tört van benne és a tört nevezője nem lehet nulla ($x \neq 3$)

$\sqrt{2x+5}$ értelmezési tartománya $x \in \left[-\frac{5}{2}, \infty\right[$, mert páros gyök alatt van (második) és így a gyök alatti kifejezés ≥ 0

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A törtek egyszerűsítése azt jelenti, hogy a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nem nulla számmal osztjuk. Ha nincs olyan szám, amivel mind a számláló és a nevező is osztható lenne, akkor már nem egyszerűsíthető tovább a tört.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Algebrai törteknek nevezzük azokat a törteket, melyek nevezőjében betűs kifejezés van.

Tehát ha csak a tört számlálójában van betűs kifejezés (pl.x), de a nevezőjében nem, akkor az még nem algebrai tört.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Zárójel felbontásakor minden tagot minden taggal szorozni kell.

Ha a szorzás mindkét tényezője többtagú, akkor az első tényező első tagjával szorozzuk végig a másik tényező tagjait, majd pedig folytatjuk az első tényező második tagjával.

Pl.: $(a+b)\cdot(c-5)=a\cdot c-5\cdot a+b\cdot c-5\cdot b$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítési érték azt jelenti, hogy a betűs kifejezés helyére írjuk be a behelyettesítendő értéket.

Pl.: $2x+5$ kifejezés helyettesítési értéke $x=3$-ban: $2\cdot 3+5=6+5=11$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Nevezetes azonosságok, binomiális tétel

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0}$ $\sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}}$ $\log(\text{ez itt} > 0)$ $\frac{}{\text{tört nevező}} \neq 0$

pl.

$\frac{2}{x-3}$ értelmezési tartománya $x \in R \setminus \{3\}$, mert tört van benne és a tört nevezője nem lehet nulla ($x \neq 3$)

$\sqrt{2x+5}$ értelmezési tartománya $x \in \left[-\frac{5}{2}, \infty\right[$, mert páros gyök alatt van (második) és így a gyök alatti kifejezés ≥ 0

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Binomiális tétel:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatványozás, hatványazonosságok, normálalak

A hatványozás a szám önmagával vett szorzatait rövidíti.

Pl.: $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Itt a 6-ot a hatvány alapjának nevezzük, a 3-at kitevőnek, az eredményt pedig a hatvány értékének.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha azonos alapú hatványokat szorzunk, akkor a kitevők összeadódnak.

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha azonos alapú hatványokat osztunk, akkor a kitevők kivonódnak.

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatvány hatványa a kitevők szorzata.

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden nem nulla szám nulladik hatványa 1.

$a^0 = 1$, ha $a \neq 0$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy nem nulla szám negatív egész kitevőjű hatványát úgy számolhatjuk ki, hogy a reciprokát a kitevő ellentettjére emeljük.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy szorzat mindkét tényezője ugyanarra a hatványra van emelve, akkor a hatványt leírhatjuk csak egyszer zárójellel.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ez az azonosság visszafele irányba hasznosabb, ha egy zárójeles szorzat hatványozva van, akkor azt szét lehet szedni és mindkét tényezőt hatványozni kell.

Pl.: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy törtnek a számlálója és nevezője is ugyanarra a hatványra van emelve, akkor a hatványt leírhatjuk csak egyszer zárójellel.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ez az azonosság visszafele irányba hasznosabb, ha egy zárójeles tört hatványozva van, akkor azt szét lehet szedni és a számlálót és nevezőt is hatványozni kell.

Pl.: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A túl nagy vagy éppen túl pici számok leírására találták ki a normálalakot.

A normálalak mindig egy szorzat, az első tényezője egy abszolútértékben 1-nél nagyobb vagy egyenlő, 10-nél kisebb szám. A másik tényezője pedig egy 10 hatvány.

Pl.: $35000 = 3{,}5 \cdot 10^4$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gyökvonás, gyökös azonosságok, gyöktelenítés

Egy a nem negatív szám négyzetgyöke az a nem negatív szám, aminek a négyzete a.

$a \geq 0 \qquad \sqrt{a} \geq 0 \qquad \sqrt{a}^2 = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0,\ b \geq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy a szám köbgyöke az a szám, aminek a köbe a.

$a \in R \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \in R,\ b \in R$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad a \in R,\ b \in R$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gyökvonás másképpp viselkedik páros, illetve páratlan gyökkitevő esetén, így kétféle definíciónk lesz.

Egy a nem negatív szám $n = 2k$-adik gyöke az a nem negatív szám, amire:

$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$

Egy tetszőleges a szám $n = 2k + 1$-edik gyöke az a szám, amire:

$(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú egyenletek

A mérleg elv lényege, hogy amikor megoldunk egy egyenletet, az egyenlőségjel mindkét oldalán ugyanazokat a műveleteket kell elvégeznünk. Az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadhatjuk, vagy az egyenlet mindkét oldalából ugyanazt a számot kivonhatjuk. És az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nem nulla számmal megszorozhatjuk, vagy mindkét oldalt ugyanazzal a nem nulla számmal eloszthatjuk. Vagyis:

- ha elveszünk egy számot az egyik oldalról, akkor a másik oldalról is el kell venni

- ha hozzáadunk egy számot az egyik oldalhoz, akkor a másik oldalhoz is hozzá kell adni

-ha szorozzuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is szorozni kell ugyanezzel a számmal

-ha osztjuk az egyik oldalt egy nem nulla számmal, akkor a másik oldalt is osztani kell ugyanezzel a számmal

Az összeadás, kivonás és szorzás egymásutáni lépéseivel jutunk el a megoldáshoz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A megoldás lényege, hogy gyűjtsük össze az x-eket az egyik oldalon, a másik oldalon pedig a számokat, a végén pedig leosztunk az x együtthatójával.

Ha törtet is látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha törtet látunk az egyenletben, akkor az az első lépés, hogy megszabadulunk attól, mégpedig úgy, hogy beszorzunk a nevezővel.

Figyeljünk rá, hogy ilyenkor az egyenlet minden tagját meg kell szorozni (a tagokat $+$, $-$ vagy $=$ jelek választják el egymástól...).

Miután megszabadultunk a törtektől az egyenlet megoldásának lépései a szokásosak a mérleg elv segítségével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Másodfokú egyenletek

Ha a másodfokú egyenlet így néz ki:

$$ax^2+bx+c=0$$

Akkor a megoldóképlet:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodfokú egyenlet megoldóképletének gyök alatti részét nevezzük diszkriminánsnak.

$$D=b^2-4ac$$

Ez dönti el, hogy a másodfokú egyenletnek hány valós megoldása lesz.

Ha a diszkrimináns nulla, akkor csak egy.

Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek két valós megoldása van.

Ha pedig negatív, akkor az egyenletnek nincs valós megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $ax^2+bx+c=0$ alakú másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Viète-formulák nem valami titkos gyógyszer hatóanyag, hanem a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket írja le:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Olyankor, amikor a másodfokú tag együtthatója 1, a Viète-formulák is egyszerűbbek:

$$x^2+px+q=0 \qquad x_1+x_2=-p \qquad x_1x_2=q$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenséget ugyanúgy kell megoldani, mint egyenletet. Amire figyelnünk kell, hogy ha negatív számmal szorzunk, az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyik megoldás az, hogy szorzattá alakítjuk, aztán pedig számegyenesen ábrázoljuk a tényezők előjelét.

A második megoldás, hogy ábrázoljuk vázlatosan a másodfokú függvényt, amit az egyenlőtlenségből alkotunk, majd leolvassuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egyenletrendszerek

A behelyettesítő módszer az egyenletrendszerek megoldásának egyik technikája.

Lényege, hogy kiválasztjuk az egyik egyenletet, ahonnét az egyik változót kifejezzük a másikkal. Ilyenkor célszerű a számunkra szimpatikusabb, egyszerűbb egyenletet választani.

Ezt követően az így kapott kifejezést behelyettesítjük a másik, fel nem használt egyenletbe, így egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenlő együtthatók módszere egy megoldási technika az egyenletrendszerekhez.

Lényege, hogy ha a két egyenletben vagy az x vagy az y együtthatói megegyeznek, akkor a két egyenletet egymásból kivonva azok kiesnek, és egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.

Ha az együtthatók egymás ellentettjei lennének, akkor pedig össze kell adni a két egyenletet.

A módszer akkor is működik, ha nem volnának egyenlő együtthatók, ilyenkor bátran szorozhatjuk az egyenleteket addig, amíg nem lesznek egyenlő együtthatók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Adott az A és B nem üres halmaz.

Ha az A halmaz bizonyos elemeihez egyértelműen hozzárendeljük a B halmaz bizonyos elemeit, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f: A \mapsto B$ függvény. A függvény értelmezési tartománya azoknak az elemeknek a halmaza az A halmazban, amikhez a függvény hozzárendel B halmazbeli elemeket.

Az értelmezési tartományt az angol domain szó alapján, ami egyébként azt jelenti, hogy tartomány, így jelöljük: D_f.

De a gyengébb idegzetűek kedvéért szokás úgy is jelölni, hogy É.T.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f: x \mapsto y$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ha $x_1 \neq x_2$ akkor $y_1 \neq y_2$. Vagyis különböző x-ekhez mindig különböző y-okat rendel.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a pontokat, ahol a függvény grafikonja az x tengelyt metszi, zérushelynek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden$x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden$x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Elsőfokú függvények

A lineáris függvény képlete:

$y = m \cdot x + b$ vagy $x \mapsto m \cdot x + b$ vagy $f(x) = m \cdot x + b$

Az egyik dolog, amit érdemes tudni róla, hogy milyen meredeken megy.

Ezt meredekségnek hívjuk, és így jön ki:

$$m = \frac{\text{amennyit fölfelemegy}}{\text{amennyit előremegy}}$$

A másik dolog, amit érdemes tudni, hogy hol metszi a függvény grafikonja az$y$ tengelyt.

Ezt úgy hívjuk ,hogy tengelymetszet, és a jele$b$ a képletéből.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvénytranszformációk, függvények ábrázolása

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x)=f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x)=-f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kombinatorika

Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli permutációján az n különböző elem egy sorba rendezését értjük.

n darab különböző elem permutációinak száma:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

n faktoriálisán az n-nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész számok szorzatát értjük.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

pl.:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$1! = 1$$

Továbbá definíció szerint $0! = 1$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.

n darab különböző elemből kiválasztott k darab elem variációinak száma:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n különböző elem közül kiválasztunk k ($k \leq n$) db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

n darab különböző elem közül kiválasztott k darab elem kombinációinak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n elem között van $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését ismétléses permutációnak nevezzük.

n elem közötti $k_1, k_2, \dots, k_r$ egymással megegyező ismétléses permutációinak száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha n db. egymástól különböző elem közül kiválasztunk k db.-ot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha kör alakban helyezünk el n különböző elemet és azok sorrendjét vizsgáljuk, akkor ciklikus permutációról beszélünk.

n darab különböző elem ciklikus permutációinak száma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek

Hatványozás azonosságai:

$a^n a^k = a^{n+k}$

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(a^n)^k = a^{nk} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális függvénynek nevezzük az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket, ahol $a > 0$ valós szám.

Az exponenciális függvények meglehetősen fontosak a matematikában, sőt nem csak a matematikában.

Ilyen függvények írják le a baktériumok szaporodását, a radioaktív elemek bomlását, a számítógépek teljesítményének növekedését és még rengeteg más dolgot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális egyenletek megoldásának kulcsa, hogy a két oldalt azonos hatványalapra hozzuk, mert ekkor

$a^x = a^b \Rightarrow x = b$

Így hát az egyenlet két oldalát addig alakítgatjuk a hatványozás azonosságainak segítségével, amíg erre az alakra nem jutunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenlőtlenséget ugyanúgy kell mint az egyenletet, amire figyelni kell csupán az az, hogy amikor elhagyjuk a hatványalapot, nem mindegy, hogy az 1-nél nagyobb, vagy kisebb szám-e.

Ha az alap 1-nél nagyobb szám, akkor nem történik semmi, az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megmarad.

Ha viszont az alap 1-nél kisebb szám, akkor az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Logaritmus, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

$log_a x$ azt mondja meg, hogy a-t hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy x-et kapjunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x^k} = \frac{k}{n} \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logaritmikus egyenletek megoldásának lényege, hogy ilyen alakra jussunk:

$$log_a x = b$$

Mert innen a logaritmus definíciója miatt az következik, hogy

$$x = a^b$$

Ahhoz, hogy a bonyolúltabb egyenleteket is ilyen alakra hozzuk, a logaritmus azonosságait használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek

Azt a kört a koordinátarendszerben, aminek középpontja az origo és a sugara 1, egységkörnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin\alpha = \sin\left(\pi - \alpha\right)$

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad -\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\cos\alpha = \cos\left(\pi - \alpha\right)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának x koordinátáját nevezzük az α szög koszinuszának, és így jelöljük: $\cos\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának y koordinátáját nevezzük az α szög szinuszának, és így jelöljük: $\sin\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy α szög tangense az α szög szinuszának és koszinuszának hányadosával egyenlő:

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad k \in Z$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények periodikusak, ez azt jelenti, hogy bizonyos időközönként megismétlik önmagukat. Ezt az időközt periódusnak nevezzük és az ő esetükben a periódus 2π.

Ha van egy ilyen egyenlet, hogy

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

akkor ennek a periodikussága miatt végtelen sok megoldása van, ezért írjuk oda a megoldások mögé, hogy $+2k\pi$.

További nehézség, hogy két megoldás is van, az egyiket a számológépünk adja, a másikat pedig...

Szinusz esetén úgy, hogy a két megoldás összegének π-nek kell lennie.

Koszinusz esetén pedig úgy, hogy a két megoldás mindig egymás minuszegyszerese.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus függvényeknek vagy szögfüggvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek tartalmaznak trigonometrikus kifejezéseket, mint például szinusz, koszinusz vagy tangens. Ezek eredetileg egy derékszögű háromszög egy szöge és két oldala hányadosa közti összefüggéseket írja le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektorok

A vektor egy irányított szakasz.

Jelölése: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt két vektor: $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$

A két vektor összege:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

A két vektor különbsége:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Van itt az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ vektor.

Az $\underline{a}$ vektor hossza:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza:

$$\overrightarrow{AB} = |\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

És pont ugyanígy kapjuk meg az A és B pontok távolságát is.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két pont közti vektor a végpontba mutató helyvektor minusz a kezdőpontba mutató helyvektor.

Tehát $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Koordinátageometria

A normálvektor az egyenesre merőleges nem nullvektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az irányvektor az egyenessel párhuzamos nem nullvektor.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $\underline{n}(A,B)$ normálvektorú és a $P(x_0,y_0)$ ponton átmenő e egyenes egyenlete:

$$e: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$C(u,v)$ középpontú és r sugarú kör egyenlete:

$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy P pontnak az $\underline{n}(A,B)$ normálvektorú e egyenestől mért távolsága:

$$d(P,e)=\left|\frac{e(P)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Itt $e(P)$ azt jelenti, hogy a P pont koordinátáit behelyettesítjük az e egyenes egyenletébe.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Statisztika

Az adatsor legyakoribb értéke a módusz. Hogyha például Bob matekjegyei ezek:

2, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 2, 4

Akkor egyszerűen meg kell számolni, hogy melyikből van a legtöbb, és az a matekjegy lesz amódusz. Most 2-esből van a legtöbb, így Bob matekjegyeinek a módusza 2. A módusz jele Mo és így most Mo=2.

Léteznek olyan eloszlások is, amelyeknek több módusza van. Hogyha például Bob jegyei:

1, 2, 2, 3, 5, 3, 3, 4, 2

Itt 2-esből és 3-asból ugyanannyi van, mindkettőből 3 darab. Ez egy kétmóduszúeloszlás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A medián a növekvő sorba rendezett adatsor középső értéke. Ha az adatsorban páros sok elem van, akkor nincs középső elem, ilyenkor a két középső elem átlagát vesszük.

Hogyha például Bob matekjegyei ezek:

2, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 2, 4

Akkor egyszerűen növekvő sorba kell rakni..

1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

És aztán meg kell keresni melyik a középső. Most nincsen középső, mert páros sok elem van, így ilyenkor a két középen lévőt átlagoljuk:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, **2**, **3**, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

Ezeknek az átlaga 2,5 vagyis a medián most 2,5. A medián jele Me, így Me=2,5

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az átlagot úgy kapjuk meg, hogy az összes elemet összeadjuk, és aztán elosztjuk az elemek számával.

Jele: $\overline{x}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az átlagtól való átlagos eltérés egyik legjobb mérőszáma a szórás. Hátránya, hogy egy kicsit ronda a szórás képlete. A szórást egy szigma nevű görög betűvel jelöljük.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az adatsor első felének a felezőpontja az alsó kvartilis.

Az alsó kvartilis jele: Q_1

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az adatsor második felének a felezőpontja a felső kvartilis.

A felső kvartilis jele: Q_3

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kvartilisek és a medián azt szemlélteti, hogyan oszlanak el az adatsorban szereplő adatok. Ezek segítségével készíthető el a doboz-ábra, vagy másnéven dobozdiagram. Szokás még sodrófa diagramnak is nevezni, és az angol elnevezést is gyakran használják, ami a box plot.

Egy sobarendezett adatsorban öt darab speciális negyedelőpontot fogunk használni. Az első az adatsor legkisebb értéke, ez a Q_0 . Aztán a következő negyedelő az alsó kvartilis, ami Q_1 utána jön a felezőpont vagyis a medián, ezt Me-vel és Q_2-vel is jelöljük, végül a felső kvartilis, ami a Q_3. Az adatsor legnagyobb értéke pedig Q_4. A legnagyobb és a legkisebb érték különbsége a terjedelem, míg a két kvartilis különbségét félterjedelemnek vagy más néven interkvartilisnek hívjuk. Ezekből épül föl a doboz-ábra vagy másként dobozdiagram.

Előfordulhat, hogy az adatsorban kiugró értékek is szerepelnek. A kiugró érték az, ami az alsó kvartilisnál legalább a félterjedelem másfélszeresénél kisebb, vagy pedig a felső kvartilisnél legalább a félterjedelem másfélszeresénél nagyobb. Huh, ez elég bonyolultan hangzik. De valójában nagyon egyszerű, csak nézd meg kapcsolódó epizódot és kiderül.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A relatív szórás azt mondja meg, hogy a szórás az átlagnak hány százaléka:

$$V = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot
