

## Kromatikus szám, klikk, perfekt gráfok

A legkevesebb színt, amivel egy gráf csúcsait kiszínezhetjük úgy, hogy a szomszédos csúcsok ne legyenek egyforma színűek, a gráf kromatikus számának nevezzük.

Jele:  $\chi(G)$ .

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy  $G$  egyszerű gráfban klikknek nevezzük azokat a részgráfokat, amelyek teljes gráfok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy gráf klikkszám a gráfban található maximális klikk elemszáma.

A  $G$  gráf klikkszámát  $\omega(G)$ -vel jelöljük.

Minden gráfban a klikkszám alsó becslés a kromatikus számra:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A  $G$  gráfban a  $G'$  részgráf feszített részgráf, ha bármely két csúcs a  $G'$  gráfban pontosan akkor szomszédos, ha  $G$ -ben is szomszédos.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha egy  $G$  gráf minden  $G'$  feszített részgráfjára igaz, hogy

$$\omega(G') = \chi(G')$$

akkor a  $G$  gráfot perfekt gráfnak nevezzük.

Ha egy gráf perfekt, akkor a kromatikus száma egyenlő a klikkszámával. Az állítás fordítva nem igaz, abból, hogy  $\omega(G) = \chi(G)$  még nem következik, hogy a gráf perfekt.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

ahol  $\omega(G)$  a gráf klikkszám,  $\chi(G)$  a kromatikus száma és  $\Delta(G)$  a maximális fokszáma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A mohó színezés egy algoritmus a gráfok színezésére.

Lényege, hogy sorba rakjuk a gráf csúcsait, és elkezdjük színezni úgy, hogy minden csúcs színezéséhez a lehető legkisebb sorszámú színt használjuk. Ezt addig folytatjuk, amíg az összes csúcs ki nem lesz színezve, és így elhasználunk legfeljebb  $\Delta(G) + 1$  darab színt.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Ha  $G$  nem teljes gráf, vagy páratlan csúcsú kör, akkor

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy  $G$  gráfban azt a legkisebb számot, amire a gráfnak már van jó élszínezése, a  $G$  gráf élkromatikus számának nevezzük.

Jele:  $\chi_e$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

A Vizing-tétel a gráfok élkromatikus számára ad alsó és felső becslést:

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Vagyis a  $G$  egyszerű gráfok két osztályba sorolhatók:

Első osztály:  $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Második osztály:  $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Az intervallumgráf egy olyan gráf, melynek csúcsai megfeleltethetők a valós számok egy-egy intervallumának, és két csúcs között akkor vezet él, ha a nekik megfeleltethető két intervallum metszete nem üres.

Az intervallumgráfok mindig perfekt gráfok.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Egy  $G$  gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsainak a  $V(G)$  halmaza felbontható az  $A$  és  $B$  diszjunkt részhalmazokra, úgy hogy  $A$ -n és  $B$ -n belül nem vezetnek élek.

A páros gráfok kromatikus száma 2, élkromatikus számukra pedig König Dénesnek van egy remek tétele:

Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\chi_e(G) = \Delta(G)$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---

Jan Mycielski lengyel matematikust nyugtalanította az a kérdés, hogy léteznek-e olyan gráfok, amelyeknek a kromatikus száma nagyon nagy, de a klikkszámuk csak 2.

Létrehozott egy konstrukciót, amivel olyan gráfokat lehet alkotni, amelyek klikkszámuk 2, a kromatikus számuk pedig bármilyen nagy lehet. Ezeket a gráfokat Mycielski-gráfoknak nevezzük.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

---