

MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEMATIKA VILLAMOS NJE tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 11. 16.

Tartalomjegyzék

Halmazok, rendezett párok, leképezések..... **2**

Matematikai logika, ítéletkalkulus..... **4**

Gráfelméleti alapok..... **6**

Gráfok izomorfiája és síkbarajzolhatósága..... **7**

Gráfok bejárása és gráfalgoritmusok..... **9**

Kromatikus szám, klikk, perfekt gráfok..... **11**

Gráfparaméterek, párosítások..... **14**

Hálózatok, maximális folyam, minimális vágás..... **16**

Irányított gráfok, gráfalgoritmusok irányított gráfokban..... **18**

Legkisebb négyzetek módszere, legjobb lineáris közelítés..... **19**

Páros gráfok, párosítások..... **20**

Menger tételei, többszörös összefüggőség..... **21**

Mátrixok..... **22**

Vektortér, lineáris függetlenség, bázis..... **27**

Lineáris egyenletrendszerek..... **29**

Determináns, adjungált, kvadratikus alakok..... **31**

Sajátérték, sajátvektor, sajátfelbontás..... **37**

Lineáris leképezések..... **41**

Halmazok, rendezett párok, leképezések

Vannak az A és B halmazok.

Az A és B halmazok uniója: Azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.

Jele: $A \cup B$

Az A és B halmazok metszete: Azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jele: $A \cap B$

Az A és B halmazok különbsége: Azon elemek halmaza, amelyek az A halmazba benne vannak, de a B halmazba nem.

Jele: $A \setminus B$

Az A halmaz komplementere a H alaphalmazon nézve: Az alaphalmaz azon elemeinek halmza, amelyek nincsenek benne az A-ban.

Jele: $\overline{A}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logikai szita formula két halmazra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A logikai szita formula három halmazra:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az első De Morgan azonosság azt mondja, hogy a metszet komplementere pont megegyezik a komplementrek uniójával:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A második De Morgan azonosság pedig azt mondja, hogy az unió komplementere éppen megegyezik a komplementerek metszetével:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát hatványhalmaznak nevezzük.

Pl.: az $A = \{x, y, z\}$ halmaz hatványhalmaza:
$P(A) = \{\emptyset. \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Érdemes megjegyezni, hogy $A \triangle A = \emptyset$ és $A \triangle \emptyset = A$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\text{páros}\sqrt{\text{ez itt} \geq 0} \quad \text{páratlan}\sqrt{\text{ez itt bármi}} \quad \log(\text{ez itt} > 0) \quad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B halmazok Descartes-szorzata úgy működik, hogy elkészítjük az összes lehetséges rendezett párt, aminek az első elemét A-ból, a második elemét pedig B-ből vesszük, és ezeket a rendezett párokat betesszük egy halmazba, amit az A és B halmazok Descartes-szorzatának hívunk.

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f halmazt függvénynek nevezzük, ha minden eleme rendezett pár, és ha $\langle x_1, y_1 \rangle \in f$ és $\langle x_1, y_2 \rangle \in f$ akkor szükségképpen $y_1 = y_2$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Matematikai logika, ítéletkalkulus

Az univerzális kvantor egy jelölése a "minden" kifejezésnek.

Jele: $\forall$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egzisztenciális kvantor egy jelölése a "létezik" vagy "van olyan" kifejezésnek.

Jele: $\exists$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás negációja (vagy tagadása) egy egyváltozós művelet. Egy A kijelentés negációja az a kijelentés, amely akkor igaz, ha A hamis és akkor hamis, ha A igaz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthetjük, hogy az igaz vagy hamis.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \wedge B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \vee B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A "ha A, akkor B" kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet nevezzük implikációnak. Az implikáció akkor hamis, ha A igaz és B hamis, minden más esetben igaz.

Jele: $A \Rightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az ekvivalencia egy olyan logikai művelet, amikor $A \Rightarrow B$ és $A \Leftarrow B$. Az ekvivalencia akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, különben hamis.

Jele: $A \Leftrightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) = A \Leftrightarrow \neg B$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunktív normálforma, röviden DNF egy olyan alakja egy logikai formuláknak, ahol a művelet a változóinak vagy negáltjainak konjunkcióinak diszjunkciója.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfelméleti alapok

A gráf csúcsokból és azokat összekötő élekből áll.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf összefüggő, ha bármelyik csúcsából el lehet jutni bármelyik másik csúcsába élek mentén.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A gráf egy csúcsának fokszáma a gráf e csúcsában összefutó élek száma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráfban körnek nevezünk egy olyan utat, amely csupa különböző csúcsokon és éleken haladva visszavezet a kiinduló csúcsába.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy gráfban nincs kör, de maga a gráf összefüggő, akkor fának nevezzük.

Egy n csúcsú fának mindig $n-1$ darab éle van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a gráfokat, ahol minden csúcs mindegyikkel össze van kötve, teljes gráfnak hívjuk.

Az n csúcsú teljes gráf éleinek a száma:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf egyszerű, ha nincs benne sem többszörös él, sem hurokél.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf Euler-köre olyan zárt élsorozat, amely a gráf összes élét pontosan egyszer tartalmazza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfok izomorfiája és síkbarajzolhatósága

A G gráf csúcsainak halmazát $V(G)$-vel jelöljük. Itt a V az angol vertex = csúcs szóra utal.

A G gráf éleinek halmazát $E(G)$-vel jelöljük. Itt E az angol edge = él.

A G gráf egy $(V(G), E(G))$ rendezett pár, ahol $V(G)$ egy nem üres halmaz, $E(G)$ pedig a $V(G)$-ből képezhető párok egy halmaza.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a gráf egy csúcsából elindulunk, és teszünk egy sétát a gráfon, akkor egy élsorozatot kapunk.

Azokat az élsorozatokat, amelyek a gráf semelyik pontján nem haladnak át többször, útnak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy élsorozat ugyanabból a csúcsból indul, mint ahova érkezik, akkor körsétának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának a kétszerese:

$$\sum d(V_n) = 2e$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy gráfban nincs kör, de maga a gráf összefüggő, akkor fának nevezzük.

Egy n csúcsú fának mindig $n-1$ darab éle van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A nem összefüggő körmentes gráfok neve erdő.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf komplementere azt a gráfot jelenti, aminek csúcsai ugyanazok, mint az eredeti gráfnak, és két csúcs pontosan akkor szomszédos benne, ha az eredeti gráfban nem.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $G(V(G), E(G))$ gráf izomorf a $G'(V(G'), E(G'))$ gráffal, ha van egy bijekció a $V(G)$ és $V'(G)$ között, amire teljesül, hogy G-ben pontosan akkor szomszédos két pont, ha G'-ben a nekik megfelelő pontok szomszédosak, és szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráfban topologikusan ekvivalens átalakításnak nevezzük azt, ha egy élt egy másodfokú csúcs beiktatásával két élre bontunk, vagy ha egy 2 fokú csúcsra illeszkedő éleket egybeolvasztunk, és a csúcsot elhagyjuk.

Két gráf akkor topologikusan izomorf, ha topologikusan ekvivalens lépések egymás utáni alkalmazásával el tudjuk érni, hogy a két gráf izomorf legyen.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A titkos recept gráfok izomorfiájának vizsgálatához:

1) Fokszámok vizsgálata

2) Utak hossza

3) Van-e kör?

4) Milyen hosszúak a körök?

5) Élek vizsgálata

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf síkbarajzolható, ha lerajzolható úgy, hogy élei csak a csúcspontokban találkozzanak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Kuratowski-tétel szerint egy gráf pontosan akkor nem síkbarajzolható, ha tartalmaz $K_{3,3}$ -mal vagy K_5-tel topológiailag izomorf részgráfot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azt mondja az Euler-féle poliéder-tétel, hogy ha egy konvex poliéder csúcsainak száma V, lapjainak száma F és éleinek száma E, akkor

$$V + F = E + 2$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyszerű gráfban minden kör legalább k hosszú, akkor a síkbarajzolhatóság szükséges feltétele:

$$(k-2) \cdot E \leq k \cdot V - 2k$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyszerű gráf síkbarajzolható, akkor meg kell felelnie ennek a feltételnek:

$$E \leq 3V - 6$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfok bejárása és gráfalgoritmusok

Egy gráf feszítőfája a gráf minden csúcsát tartalmazó fa részgráf. Feszítőfából általában több is van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A minimális feszítőfa egy gráfban a legkisebb élsúlyú feszítőfa.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Kruskal algoritmus segítségével minimális feszítőfát lehet megtalálni.

Az első lépés, hogy keressük meg a gráfban a legkisebb súlyú élt. Ha több azonos súlyú él van, akkor válasszuk ki azt, amelyikhez kedvünk van.

Ezek után belépünk egy ciklusba, ahol minden lépésben az eddig még ki nem választott élekre alkalmazzuk az előző lépést úgy, hogy ne keletkezzen kör. Ha mégis kör keletkezne, akkor a legutolsó olyan élt, amelynek hozzávétele során a kört kapjuk, töröljük.

Ezt addig csináljuk, amíg kész nem vagyunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfok egy adott pontjából való feltérképezésére alkalmas módszer a szélességi keresés (BFS = Breadth-first search).

Működése:

Elindulunk egy adott pontból, és megkeressük az összes szomszédos pontot. Ezek az 1 egység távolságra lévő szomszédok és mindegyikre ragasztunk egy 1-es címkét.

Most ezeknek keressük meg az 1 egység távoli szomszédjait. De csak azokat, akiken még nincsen címke.

Ők a kiinduló ponttól 2 egység távolságra vannak és 2-es címkét kapnak.

Ha valamelyik 2-es szomszédba több él is vezet, akkor csak az egyiket hagyjuk meg. Mindegy melyiket.

Az algoritmus aztán így folytatódik, és szép lassan végez.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A DFS (Depth-first search) algoritmus a gráf mélységi bejárása.

A DFS algoritmus lényege, hogy elindulunk egy úton, és megyünk, amíg csak tudunk.

Amikor elakadunk, mert már nem tudunk úgy továbbmenni, hogy olyan pontba jussunk, ahol még nem jártunk, akkor visszamegyünk egészen addig, ahonnan még lehet földerítetlen pontok felé haladni.

Amikor újra elakadunk, megint visszamegyünk, és ezt ismételjük, amíg az egész gráfot be nem jártuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A BFS és DFS algoritmusok végrehajtása során a gráfnak egy-egy feszítőfáját kapjuk. Ezeket nevezzük BFS és DFS fának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf csúcsainak bejárására van egy nagyon speciális módszer, amit Hamilton körnek nevezünk, és az a lényege, hogy egy olyan körön haladunk végig a gráfban, amely a gráf összes pontját tartalmazza.

Hamilton kör létezésének szükséges feltétele:

Ha egy gráfból k darab csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a megmaradó gráfnak legfeljebb k darab komponense lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Hamilton út egy olyan út, amely a gráf minden csúcsát tartalmazza.

Hamilton út létezésének szükséges feltétele:

Ha egy gráfból k darab csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a megmaradó gráfnak legfeljebb $k+1$ darab komponense lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Dirac-tétel azt mondja ki, hogy ha egy G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú gráfban minden csúcs foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráfban van Hamilton kör.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az Ore-tétel azt mondja, hogy ha egy G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú gráfban bármely V_1 és V_j nem szomszédos csúcsra $d(V_i) + d(V_j) \geq n$ teljesül, akkor a gráfban van Hamilton kör.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kromatikus szám, klikk, perfekt gráfok

A legkevesebb színt, amivel egy gráf csúcsait kiszinezhetjük úgy, hogy a szomszédos csúcsok ne legyenek egyforma színűek, a gráf kromatikus számának nevezzük.

Jele: $\chi(G)$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G egyszerű gráfban klikknek nevezzük azokat a részgráfokat, amelyek teljes gráfok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf klikkszáma a gráfban található maximális klikk elemszáma.

A G gráf klikkszámát $\omega(G)$-vel jelöljük.

Minden gráfban a klikkszám alsó becslés a kromatikus számra:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A G gráfban a G' részgráf feszített részgráf, ha bármely két csúcs a G' gráfban pontosan akkor szomszédos, ha G-ben is szomszédos.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy G gráf minden G' feszített részgráfjára igaz, hogy

$$\omega(G') = \chi(G')$$

akkor a G gráfot perfekt gráfnak nevezzük.

Ha egy gráf perfekt, akkor a kromatikus száma egyenlő a klikkszámával. Az állítás fordítva nem igaz, abból, hogy $\omega(G') = \chi(G')$ még nem következik, hogy a gráf perfekt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

ahol $\omega(G)$ a gráf klikkszáma, $\chi(G)$ a kromatikus száma és $\Delta(G)$ a maximális fokszáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mohó színezés egy algoritmus a gráfok színezésére.

Lényege, hogy sorba rakjuk a gráf csúcsait, és elkezdjük színezni úgy, hogy minden csúcs színezéséhez a lehető legkisebb sorszámú színt használjuk. Ezt addig folytatjuk, amíg az összes csúcs ki nem lesz színezve, és így elhasználunk legfeljebb $\Delta(G)+1$ darab színt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha G nem teljes gráf, vagy páratlan csúcsú kör, akkor

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráfban azt a legkisebb számot, amire a gráfnak már van jó élszínezése, a G gráf élkromatikus számának nevezzük.

Jele: χ_e

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Vizing-tétel a gráfok élkromatikus számára ad alsó és felső becslést:

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$$

Vagyis a G egyszerű gráfok két osztályba sorolhatók:

Első osztály: $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Második osztály: $\chi_e(G) = \Delta(G)+1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az intervallumgráf egy olyan gráf, melynek csúcsai megfeleltethetőek a valós számok egy-egy intervallumának, és két csúcs között akkor vezet él, ha a nekik megfeleltethető két intervallum metszete nem üres.

Az intervallumgráfok mindig perfekt gráfok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsainak a $V(G)$ halmaza felbontható az A és B diszjunkt részhalmazokra, úgy hogy A-n és B-n belül nem vezetnek élek.

A páros gráfok kromatikus száma 2, élkromatikus számukra pedig König Dénesnek van egy remek tétele:

Ha G páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Jan Mycielski lengyel matematikust nyugtalanította az a kérdés, hogy léteznek-e olyan gráfok, amelyeknek a kromatikus száma nagyon nagy, de a klikkszáma csak 2.

Létrehozott egy konstrukciót, amivel olyan gráfokat lehet alkotni, amelyek klikkszáma 2, a kromatikus számuk pedig bármilyen nagy lehet. Ezeket a gráfokat Mycielski-gráfoknak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Gráfparaméterek, párosítások

A független ponthalmaz precíz definíciójára mindjárt kettő is van.

Íme az egyik:

Egy G gráfban független csúcshalmaznak nevezzük a csúcsoknak az $A \subset V(G)$ részhalmazát, ha nincs olyan él, amelynek mindkét végpontja A-ban van.

És itt jön a másik:

Egy G gráfban független csúcshalmaznak nevezzük a csúcsoknak az $A \subset V(G)$ részhalmazát, ha az A által feszített részgráf nem tartalmaz élt.

Egy G gráfban a független csúcsok maximális számát $\alpha(G)$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráfban a $T \subset V(G)$ ponthalmaz lefogó ponthalmaz, ha G minden élének legalább az egyik végpontja T-ben van.

Egy gráfban a minimális méretű lefogó ponthalmaz elemszámát $\tau(G)$-vel jelöljük.

A maximális lefogó ponthalmaz pedig a gráf összes csúcsa, és elemszáma éppen $|V(G)| = n$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha vesszük egy gráfban a maximális számú független pontokat és a minimális számú lefogó pontokat, akkor épp megkapjuk a gráf összes pontját.

Ezt hívjuk első Gallai tételnek:

$$\tau(G) + \alpha(G) = n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráf éleinek M részhalmaza független élhalmaz, ha M semelyik két elemének nincs közös végpontja.

Egy gráf független éleinek maximális számát $\nu(G)$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráf éleinek R részhalmaza lefogó élhalmaz, ha a gráf minden csúcsa valamelyik R-beli él végpontja.

Egy G gráfban a lefogó élek minimális számát $\rho(G)$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha vesszük egy gráfban a minimális számú lefogó éleket, és a maximális számú független éleket, akkor a gráf minden pontjához pontosan egy él fog tartozni.

Ez Gallai második tétele:

Ha egy n csúcsú gráf nem tartalmaz izolált pontot, akkor

$$\rho(G)+\nu(G)=n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\alpha(G)\leq\rho(G)\quad\nu(G)\leq\tau(G)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráf akkor és csak akkor páros, ha minden G-ben szereplő kör páros hosszúságú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráfban az $E(G)$ élhalmaznak egy M részhalmazát párosításnak nevezzük, ha M semelyik két elemének nincs közös végpontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráfban az $e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n$ élsorozat az M párosítás javító útja, ha

1) a megadott élsorozat egy páratlan hosszú út G-ben

2) az élek felváltva elemi M-nek:

$e_{2k}\in M$ és $e_{2k+1}\notin M$

3) az út kezdő és végpontja nem illeszkedik semelyik M-beli élre sem

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a párosításokat nevezzük teljes párosításoknak, ami a gráf összes csúcsát lefedi.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráfban akkor és csakis akkor létezik teljes párosítás, ha bárhogyan hagyunk el a gráfból néhány pontot, a megmaradt gráfban a páratlan komponensek száma nem több az elhagyott pontok számánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hálózatok, maximális folyam, minimális vágás

Legyen X a $V(G)$-nek egy olyan részhalmaza, ami S-t tartalmazza. Ekkor az X-ből a $V(G)-X$-be vezető éleket (S,T) vágásnak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy (S,T) vágás kapacitása, a vágásban szereplő élek kapacitásainak összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Ford-Fulkerson algoritmus egy olyan algoritmus, amit a maximális folyam megkeresésére használunk. Az algoritmus lényege pedig az a javító gráf, amit az eredeti hálózat alapján készítünk el. A javító gráf megmutatja nekünk, hogy milyen útvonalon tudjuk növelni a meglévő folyamot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen G egy irányított gráf és értelmezzünk a gráf élein egy $E \to R_0^+$ függvényt, ami minden élhez hozzárendeli a $c(e)$ nem negatív számot, amit az él kapacitásának nevezünk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen G egy irányított gráf és értelmezzünk a gráf élein egy $E \to R_0^+$ függvényt, ami minden élhez hozzárendeli a $c(e)$ nem negatív számot, amit az él kapacitásának nevezünk.

Van továbbá két kitüntetett pont a gráfban, S (source = forrás) és T (target = cél).

Ekkor a (G,S,T,c) egy hálózat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A hálózatban folyamnak nevezünk egy olyan $f(e)$ $E \to R_0^+$ függvényt, amire teljesül, hogy bármely e élre $0 \leq f(e) \leq c(e)$ és bármely T-től és S-től különböző V csúcsra:

$$\sum_{Vbe} f(e) - \sum_{Vki} f(e) = 0$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy folyam értékének az

$$m_f = \sum_{Ski} f(e) - \sum_{Sbe} f(e)$$

számot nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Ford-Fulkerson tétel azt mondja ki, hogy egy hálózatban a maximális folyam mindig megegyezik a minimális vágással.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mindig létezik egy olyan út, ami csak azokon a pontokon halad át, ahol a tartalékidő nulla, és az út hossza megegyezik a teljes folyamat hosszával. Ezt az utat kritikus útnak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Irányított gráfok, gráfalgoritmusok irányított gráfokban

A DFS algoritmusnak az a lényege, hogy kiindulunk egy csúcsból, és megyünk ameddig tudunk.

Az, hogy merre megyünk, teljesen a véletlen műve.

Egyszer aztán elérkezünk egy olyan pontba, ahonnan már nincs tovább.

Innen már csak olyan csúcsba tudnánk továbblépni, ahol korábban már jártunk.

Ekkor visszaugrunk egészen addig, ahonnan még vezet út bejáratlan csúcsba.

Ha már minden csúcshoz eljutottunk, akkor a DFS algoritmus véget ér.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A DFS algoritmus eredményeként kapjuk a DFS-fát.

Hogyha a DFS-fába berajzoljuk az eredeti gráf többi élét is, akkor ezek az élek három típusba sorolhatóak. Vannak olyan élek, amelyek képesek lerövidíteni egy utat a DFS fában. Ezeket az éleket úgy hívjuk, hogy "előre-él". Ha az eredeti gráfban van fordított irányú él, akkor ezt az élt "vissza-él"-nek nevezzük. Hogyha az eredeti gráfban van u-ból v-be vezető él, akkor ezt az élt "kereszt-él"-nek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A BFS-algoritmus lényege, hogy kiindulunk egy csúcsból, aztán megkeressük a közvetlen szomszédjait. Innen folytatódik az algoritmus, és az új csúcsoknak keressük meg a szomszédjait. Ha több él is vezet egy szomszéd felé, mindegy melyiket választjuk. Az algoritmust addig ismételjük, amíg minden csúcsot meg nem találtunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A BFS algoritmus eredményeként kapjuk a BFS-fát.

Hogyha a BFS-fába berajzoljuk az eredeti gráf többi élét is, akkor ezek az élek három típusba sorolhatóak.

Vannak "előre-él"ek, "vissza-él"ek és "kereszt-él"ek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Dijkstra algoritmus képes megtalálni a gráf egy adott csúcsából a többi csúcsba vezető legrövidebb utat.

Az algoritmus lényege, hogy kiválasztunk egy pontot, és ebből a pontból kiindulva csúcsról csúcsra haladva felderítjük az egész gráfot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legkisebb négyzetek módszere, legjobb lineáris közelítés

Gauss-féle normálegyenletek:

$$n \cdot b_0 + b_1 \cdot \sum x_i = \sum y_i$$

$$b_1 \cdot x^2 + b_0 \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i$$

Ahol n a megfigyelések száma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az

$$A^T \cdot A \cdot \underline{x} = A^T \cdot \underline{b}$$

egyenletrendszer megoldásaival.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor az optimális megoldás megadja a legjobb közelítést.

Az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az

$$A^T \cdot A\underline{x} = A^T \cdot \underline{b}$$

egyenletrendszer megoldásaival.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer Gauss-féle normálegyenlete:

$$A^T \cdot A\underline{x} = A^T \cdot \underline{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy $\underline{b}$ vektort nem csak merőlegesen vetíthetjük, hanem ferdén is. Viszont egyedül a merőleges vetítés rendelkezik a legjobb közelítés tulajdonságával.

A $\underline{b}$ vektor legjobb közelítése a W altérben egy olyan $\underline{b}'$ vektor, amire $|\underline{b} - \underline{b}'|$ minimális.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Páros gráfok, párosítások

Legyen $G(A,B,E)$ páros gráf és X pedig A-nak egy tetszőleges részhalmaza. Az X-ben lévő csúcsok B-beli szomszédjainak halmazát hívjuk $N(X)$-nek. A G gráfnak akkor és csak akkor van A-t fedő párosítása, ha bármely X halmazra

$|X|\leq|N(X)|$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $G(A,B,E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha

$|A|=|B|$ és

$|X|\leq|N(X)|$ minden $X\subseteq A$ ponthalmazra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Menger tételei, többszörös összefüggőség

Egy G gráf k-szorosan élösszefüggő, ha bárhogyan hagyunk el belőle k-nál kevesebb élt, a maradék gráf összefüggő marad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráf k-szorosan pontösszefüggő, ha legalább $k+1$ pontja van és bárhogyan hagyunk el belőle k-nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G irányított gráfban az u-ból v-be vezető élidegen utak maximális száma megegyezik az u-ból v-be vezető utakat lefogó élek minimális számával.

Egy G gráfban az u-ból v-be vezető élidegen utak maximális száma megegyezik az u-ból v-be vezető utakat lefogó élek minimális számával.

Egy G irányított gráfban u és v legyen két különböző nem szomszédos csúcs. Ekkor az u-ból v-be vezető pontidegen utak maximális száma megegyezik az u-ból v-be vezető utakat lefogó (u-tól és v-től különböző) pontok minimális számával.

Egy G gráfban u és v legyen két különböző nem szomszédos csúcs. Ekkor az u-ból v-be vezető pontidegen utak maximális száma megegyezik az u-ból v-be vezető utakat lefogó (u-tól és v-től különböző) pontok minimális számával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Mátrixok

Egy nXk-as mátrix tulajdonképpen nem más, mint egy táblázat, aminek n darab sora és k darab oszlopa van.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot egy számmal szorzunk, akkor amátrix összes elemét meg kell szorozni a számmal.

pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot osztunk egy számmal, akkor amátrix minden elemét osztani kell a számmal.

pl.: $\frac{\begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix összeadásakor összeadjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet összeadni, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

A mátrixok összeadása kommutatív, azaz

$$A + B = B + A$$

És asszociatív, azaz

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix kivonásakor kivonjuk az ugyanazon pozícióban lévő elemeket. Két mátrixot csak akkor lehet kivonni egymásból, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrix szorzata akkor létezik, ha a bal oldalimátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldalimátrix sorainak számával.

Ha az A mátrix m x n-es a B mátrix pedig n x k-s, akkor az eredménymátrix m x k-s lesz.

Az eredménymátrix i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldalimátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali mátrix j-edik oszlopával. (Tehát az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal stb. szorozzuk, majd összeadjuk)

pl.: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze, ha ugyanannyi soruk és oszlopuk van.

A mátrix összeadás kommutatív:

$$A+B=B+A$$

És asszociatív:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

De asszociatív, azaz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A kvadratikus mátrix négyzetes mátrix vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diagonális mátrix olyan kvadratikus mátrix, aminek a főátlóján kívüli elemek nullák.

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységmátrix olyan mátrix, ami azt tudja, hogy bármely A mátrixra $A \cdot I = A$.

Az egységmátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló-eleme egy.

pl.: $I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz mátrix jele A^{-1} és ez egy olyan mátrix, ami azt tudja, hogy

$A \cdot A^{-1} = I$ (jobb inverz)

$A^{-1} \cdot A = I$ (bal inverz)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A transzponált a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélése. Jele A^T vagy A^*

pl.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat, melyek transzponáltjuk önmaga, szimmetrikus mátrixnak nevezzük.

pl.: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy szorzunk, hogy a vektor minden koordinátáját megszorozzuk a számmal.

Pl.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektort egy számmal úgy osztunk, hogy a vektor minden koordinátáját leosztjuk a számmal.

Pl.: $\frac{\begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy adunk össze, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön össze adjuk.

Pl.: $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$

asszociatív: $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektort úgy vonunk ki egymásból, hogy minden egyes koordinátájukat külön-külön kivonjuk egymásból.

Pl.: $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-8\end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A skaláris szorzat két vektor közti művelet, ami csinál belőlük egy számot.

Pl.: $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\quad\underline{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

$\underline{a}^T\cdot\underline{b}=3\cdot4+2\cdot1+5\cdot2=24$

Tulajdonságok:

kommutatív: $\underline{a}^T\cdot\underline{b}=\underline{b}^T\cdot\underline{a}$

nem asszociatív: $\left(\underline{a}^T\cdot\underline{b}\right)^T\cdot\underline{c}\neq\underline{a}^T\cdot\left(\underline{b}^T\cdot\underline{c}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Két vektor diadikus szorzata egy mátrix. Lássuk milyen.

Pl.: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \\ 20 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

nem kommutatív

nem asszociatív

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk soraiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot beszorzunk az $\underline{I}^T = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$ vektorral, akkor az szépen összeadja a mátrixunk oszlopaiban lévő elemeket.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk jobbról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik oszlopát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy mátrixot megszorzunk balról egy $\underline{e}_i$ egységvektorral, akkor megkapjuk a mátrix i-edik sorát.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Vektortér, lineáris függetlenség, bázis

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a valós számok felett, ha aV halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, úgy, hogy minden V-beli $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorhoz hozzárendelünk egy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektort, ami szintén eleme V-nek.

1. Az összeadás kommutatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

2. Az összeadás asszociatív: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ V-beli vektorra

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

3. Létezik nullelem: van olyan $\underline{0}$ V-beli vektor, hogy bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra

$$\underline{v}_1 + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

4. Létezik ellentett: bármely $\underline{v}_1$ V beli vektorra létezik olyan $-\underline{v}_1$ V-beli vektor, hogy

$$\underline{v}_1 + (-\underline{v}_1) = -\underline{v}_1 + \underline{v}_1 = \underline{0}$$

Értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet is úgy, hogy minden$V$-beli $\underline{v}_1$ vektorhoz és bármely valós számhoz hozzárendelünk egy $\lambda \cdot \underline{v}_1$ vektort, ami szintén V-beli.

5. A skalárszoros asszociatív: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}_1)$$

6. A skalárszoros disztributív a vektorokra: bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ V-beli vektorra és λ skalárra

$$\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \cdot \underline{v}_2$$

7. A skalárszoros disztributív a skalárokra: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és λ, μ skalárra

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v}_1 = \lambda \cdot \underline{v}_1 + \mu \cdot \underline{v}_1$$

8. Egységszeres: bármely $\underline{v}_1$ V-beli vektorra és az 1 valós számra

$$1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

úgy is teljesül, hogy van olyan $\lambda_i \neq 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy V vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok generátor-rendszert alkotnak, ha minden $\underline{w}$ vektor a V vektortérben előáll $\underline{w} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$ alakban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok független rendszert alkotnak, ha

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázis független generátorrendszer.

A bázis minden vektort egyértelműen előállít, míg R^*-ben azok a generátor-rendszerek pedig, amelyek n-nél több vektorból állnak, minden vektort végtelensokféleképpen.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektorrendszer rangja a benne lévő függetlenvektorok maximális száma. R^3-ban a rang például maximum három lehet.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A V vektortérnek W altere, ha $W \subset V$ és W maga is vektortér a V-beli műveletekre.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A legfeljebb n-ed fokú polinomok vektorteret alkotnak az összeadás és a skalárral való szorzás műveletekre.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A v_1, v_2,...v_k vektorok által generált altér ezen vektorok lineáris kombinációja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy vektor akkor állítható egy vektorrendszerrel, ha előáll azon vektorok lineáris kombinációjaként.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris egyenletrendszerek

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x-ek együtthatóiból álló mátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlósmátrix alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett mátrix pedig az A mátrix inverze lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Determináns, adjungált, kvadratikus alakok

Ha az A egy n x n-es mátrix, akkor determinánsa

$det(A) = \sum_{\forall p}(-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy 2x2-es mátrix determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A 3x3-as mátrixok determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A egy nxn-es mátrix, akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsa.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük szinguláris nak, amelyek determinánsa nulla.

Az A mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG<n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz mátrix
- RANG=n
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A mátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ vektorral.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt egy 3x3-as mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Itt egy 2x2-es mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a22 \end{pmatrix}$$

Adjungáltja pedig ez lesz.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a11 \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az adjungált egyik legnagyobb haszna, hogy segítségével meg tudunk alkotni egy képletet a négyzetesmátrixok inverzére.

Itt is van:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyenletrendszerek megoldására is megalkothatunk egy új képletet az adjungált segítségével.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Legalábbis abban az esetben, hogyha az A nxn-es invertálható mátrix.

Az egyenletrendszer megoldását úgy kapjuk meg, hogy beszorzunk az A mátrix inverzével...

$$\underline{x} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) \cdot \underline{b}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemek által generált Vandermonde-determináns első sorában x_1 hatványai szerepelnek, aztán a második sorában x_2 hatványai jönnek, és így tovább.

A Vandermonde-determinánst ezzel az egyszerű képlettel ki tudjuk számolni:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j<i}(x_i - x_j)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix sarok főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarok mátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix főminor mátrixai a mátrix bal felső sarkától kezdődő sarok mátrixok determinánsai.

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + - +$ de mínusszal indul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A nxn-es szimmetrikus mátrix és $\underline{x}$ egy vektor R^n-ben, akkor a

$$Q(x) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sajátérték, sajátvektor, sajátfelbontás

Az A nxn-es mátrix sajátértéke egy olyan λ valós szám, amelyhez van valami $\underline{v}$ nem nullvektor, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátérték lényege, hogy vannak olyan mátrixok, és olyan vektorok, hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. Az egységmátrixpéldául ilyen: ha az egységmátrixszal megszorzunk egy tetszőleges vektort, akkor ugyanazt a vektort kapjuk. Ilyenkor minden vektor sajátvektor és a sajátérték 1, mert minden vektorból az 1-szerese lesz.

A sajátvektorok és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le. A síkbeli tükrözés az x tengelyre például egy geometriai transzformáció, aminek a mátrixa két sajátértékkel rendelkezik. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Az y tengelyen lévő vektorok viszont az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátértékei. Az 1 és a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix sajátvektora egy olyan $\underline{v}$ nem nullvektor, amelyhez van valami λ valós szám, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátvektor lényege, hogy vannak olyan mátrixok, és olyan vektorok, hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. A sajátvektorok és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le.

Vegyük például a síkbeli tükrözést az x tengelyre. Ez egy geometriai transzformáció. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Vagyis ezek a vektorok egytől egyig sajátvektorok, mert teljesítik azt amit egy sajátvektornak tudnia kell: ha megszorozzuk a mátrixokt a vektorral, akkor az eredeti vektor számszorosát kapjuk. Itt most éppen az eredeti vektor 1-szeresét kapjuk. Az y tengelyen lévő vektorok szintén sajátvektorok, mert az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. Vagyis ezek a vektorok saját maguk -1-szeresei lesznek. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátvektorai: az x tengely és az y tengely vektorai. Az x tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték az 1, míg az y tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A karakterisztikus egyenlet a sajátértékek kiszámolásához szükséges egyenlet:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet segít nekünk kiszámolni egy mátrix sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Az egyenletet karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy nxn-es mátrix karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5x5-ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A-\lambda\cdot I)$$

A karakterisztikus polinom segít nekünk kiszámolni egy mátrix sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Vagyis a sajátértékek mindig a karakterisztikus polinom gyökei. Előfordul, hogy egy sajátérték többszörös gyök, és az is megeshet, hogy komplex gyökei vannak a karakterisztikus polinomnak.

Azt az egyenletet, amikor a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy nxn-es mátrix karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5x5-ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A)=X^{-1}\cdot A\cdot X$$

itt $X=(\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A mátrix egy n x n-es diagonalizálható mátrix, akkor a sajátfelbontása:

$$A = X \cdot diag(A) \cdot X^{-1}$$

Itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$ vagyis egyszerűen úgy keletkezi, hogy a sajátvektorokat fogjuk, és leírjuk egymás mellé és

$$diag(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A spektrálfelbontás segítségével könnyebben hatványozhatunk:

$$A^n = X \cdot (diag(A))^n \cdot X^{-1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Lineáris leképezések

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezésnél V_2-nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1-beli vektorok képe is nullvektor lesz. Ezen vektorok halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a mátrixok pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1-ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

φ^{-1} mátrixa $(\varphi)_b^{-1}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\mathrm{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ lineáris leképezésnek a $\underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \dots\ \underline{b}_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1)\ \varphi(\underline{b}_2)\ \varphi(\underline{b}_3)\ \dots\ \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is V_1-ben, a leképezés mátrixa mindig egy nxn-esmátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak V_1-ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret $Hom(V_1, V_2)$-nek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A és B olyan mátrixok, hogy létezik egy C mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

Megnézem a kapcsolódó epizódot
