

MATEKING.HU

Képletgyűjtemény

MATEMATIKA 1 KGK tantárgy

Kiadás dátuma: 2026. 11. 19.

Tartalomjegyzék

Százalékszámítás..... **2**

Halmazok, rendezett párok, leképezések, matematikai logika..... **4**

Hatványozás, logaritmus, exponenciális és logaritmusos egyenletek..... **7**

Trigonometria, trigonometrikus egyenletek..... **9**

Sorozatok határértéke..... **11**

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése..... **13**

Monotonitás és korlátosság..... **14**

Függvények..... **15**

Összetett függvény és inverz függvény..... **18**

Sorok összege és sorok konvergenciája..... **19**

Függvények határértéke és folytonossága..... **21**

A határérték precíz definíciója..... **22**

Deriválás..... **23**

Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete..... **26**

Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok..... **27**

Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok..... **28**

Taylor polinom és Taylor sor..... **29**

L’Hôpital szabály..... **30**

Határozatlan integrálás, primitív függvény..... **31**

Határozott integrálás..... **35**

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík..... **36**

Kétváltozós függvények..... **38**

Százalékszámítás

A százalékalap az a szám, amihez a százalékszámítás során viszonyítunk. Ez jelenti mindig a 100%-ot. Ha például egy osztályba 20 gyerek jár és közülük 8 lány, 12 fiú, akkor a 20 gyerek lesz a 100%, aminek valahány százaléka lány és valahány százaléka fiú.

A százalékszámítás lényege, hogy

Százalékalap • Százalékláb = Százalékérték

A példánkban a 20 fős ösztály 40%-a lány, vagyis:

20 • 40% = 8

A százaléklábat, vagyis a 16%-ot pedig a számolás közben úgy kell kezelni, mint századrész, tehát 40%=0,4.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékláb a százalékszámításos feladatban a százalék. Ennyi százalékát kell kiszámítani a százalékalapnak.

A százalékszámítás lényege, hogy

Százalékalap • Százalékláb = Százalékérték

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékérték a százalékalap és a százalékláb szorzata, tehát a végeredmény.

A százalékszámítás lényege, hogy

Százalékalap • Százalékláb = Százalékérték

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékszámítás lényeg nagyon röviden annyi, hogy a százalék valójában azt jelenti, hogy századrész. Például valaminek a 16%-a:

$\frac{16}{100} = 16\%$

Hogyha mondjuk egy osztályba 25-en járnak és közülük 16% lány, akkor az mindössze ezt jelenti, hogy

$25 \cdot \frac{16}{100} =$ Lányok száma

Ezt már nagyon egyszerű kiszámolni, és az jön ki, hogy 4, vagyis a 25-nek a 16%-a 4.

Itt a 25 a százalékalap, a 16% pedig a százaléklába és az eredményül kapott 4 pedig a százalékérték. De igazából nem is az a lényeg, hogy melyiket hogyan hívjuk, hanem az, hogy ilyen egyszerűen tudunk a százalékokkal számolni.

A százalékszmítás feladatok rendszerint úgy működnek, hogy a három szereplőből, vagyis a százalékalapból, a százaléklábból és a százalékértékből kettőt ismerünk és a harmadikat ki kell számolni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékalap a százalérték és a százalékláb hányadosa.

$$\text{Százalékalap} = \frac{\text{Százalékérték}}{\text{Százalékláb}}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A százalékláb a százalékérték és a százalékalap hányadosa.

$$\text{Százalékláb} = \frac{\text{Százalékérték}}{\text{Százalékalap}}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a százalékalap, amivel osztani kell mindig nak/nek birtokos jelzővel van ellátva a feladatokban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha valaminek az értékét 20%-kal csökkentjük, akkor $100\% - 20\% = 80\% = \frac{80}{100} = 0,8$-cal kell szorozni.

Ha valaminek az értékét 20%-kal növeljük, akkor $100\% + 20\% = 120\% = \frac{120}{100} = 1,2$-vel kell szorozni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Halmazok, rendezett párok, leképezések, matematikai logika

Vannak az A és B halmazok.

Az A és B halmazok uniója: Azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.

Jele: $A \cup B$

Az A és B halmazok metszete: Azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jele: $A \cap B$

Az A és B halmazok különbsége: Azon elemek halmaza, amelyek az A halmazba benne vannak, de a B halmazba nem.

Jele: $A \setminus B$

Az A halmaz komplementere a H alaphalmazon nézve: Az alaphalmaz azon elemeinek halmza, amelyek nincsenek benne az A-ban.

Jele: $\overline{A}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logikai szita formula két halmazra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A logikai szita formula három halmazra:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az első De Morgan azonosság azt mondja, hogy a metszet komplementere pont megegyezik a komplementrek uniójával:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A második De Morgan azonosság pedig azt mondja, hogy az unió komplementere éppen megegyezik a komplementerek metszetével:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát hatványhalmaznak nevezzük.

Pl.: az $A = \{x, y, z\}$ halmaz hatványhalmaza:
$P(A) = \{\emptyset. \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Érdemes megjegyezni, hogy $A \triangle A = \emptyset$ és $A \triangle \emptyset = A$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\text{páros}\sqrt{\text{ez itt} \geq 0} \quad \text{páratlan}\sqrt{\text{ez itt bármi}} \quad \log(\text{ez itt} > 0) \quad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az univerzális kvantor egy jelölése a "minden" kifejezésnek.

Jele: $\forall$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egzisztenciális kvantor egy jelölése a "létezik" vagy "van olyan" kifejezésnek.

Jele: $\exists$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás negációja (vagy tagadása) egy egyváltozós művelet. Egy A kijelentés negációja az a kijelentés, amely akkor igaz, ha A hamis és akkor hamis, ha A igaz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthetjük, hogy az igaz vagy hamis.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \wedge B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \vee B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A "ha A, akkor B" kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet nevezzük implikációnak. Az implikáció akkor hamis, ha A igaz és B hamis, minden más esetben igaz.

Jele: $A \Rightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az ekvivalencia egy olyan logikai művelet, amikor $A \Rightarrow B$ és $A \Leftarrow B$. Az ekvivalencia akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, különben hamis.

Jele: $A \Leftrightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) = A \Leftrightarrow \neg B$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunktív normálforma, röviden DNF egy olyan alakja egy logikai formuláknak, ahol a művelet a változóinak vagy negáltjainak konjunkcióinak diszjunkciója.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Hatványozás, logaritmus, exponenciális és logaritmusos egyenletek

Hatványozás azonosságai:

$a^n a^k = a^{n+k}$

$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(a^n)^k = a^{nk} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális függvénynek nevezzük az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket, ahol $a > 0$ valós szám.

Az exponenciális függvények meglehetősen fontosak a matematikában, sőt nem csak a matematikában.

Ilyen függvények írják le a baktériumok szaporodását, a radioaktív elemek bomlását, a számítógépek teljesítményének növekedését és még rengeteg más dolgot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$log_a x$ azt mondja meg, hogy a-t hányadik hatványra kell emelni ahhoz, hogy x-et kapjunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a \sqrt[n]{x^k} = \frac{k}{n} \log_a x$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az exponenciális egyenletek megoldásának kulcsa, hogy a két oldalt azonos hatványalapra hozzuk, mert ekkor

$$a^x = a^b \Rightarrow x = b$$

Így hát az egyenlet két oldalát addig alakítgatjuk a hatványozás azonosságainak segítségével, amíg erre az alakra nem jutunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Exponenciális egyenlőtlenséget ugyanúgy kell mint az egyenletet, amire figyelni kell csupán az az, hogy amikor elhagyjuk a hatványalapot, nem mindegy, hogy az 1-nél nagyobb, vagy kisebb szám-e.

Ha az alap 1-nél nagyobb szám, akkor nem történik semmi, az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megmarad.

Ha viszont az alap 1-nél kisebb szám, akkor az alap elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megfordul.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logaritmikus egyenletek megoldásának lényege, hogy ilyen alakra jussunk:

$$log_a x = b$$

Mert innen a logaritmus definíciója miatt az következik, hogy

$$x = a^b$$

Ahhoz, hogy a bonyolúltabb egyenleteket is ilyen alakra hozzuk, a logaritmus azonosságait használjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometria, trigonometrikus egyenletek

Azt a kört a koordinátarendszerben, aminek középpontja az origo és a sugara 1, egységkörnek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin\alpha = \sin\left(\pi - \alpha\right)$

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad -\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\cos\alpha = \cos\left(\pi - \alpha\right)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának x koordinátáját nevezzük az α szög koszinuszának, és így jelöljük: $\cos\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egységkörben az x tengely irányát kezdő iránynak nevezzük, az egységvektor végpontjába mutató irányt pedig záró iránynak. A két irány által bezárt szög α. Az egységvektor végpontjának y koordinátáját nevezzük az α szög szinuszának, és így jelöljük: $\sin\alpha$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy α szög tangense az α szög szinuszának és koszinuszának hányadosával egyenlő:

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad k \in Z$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények periodikusak, ez azt jelenti, hogy bizonyos időközönként megismétlik önmagukat. Ezt az időközt periódusnak nevezzük és az ő esetükben a periódus 2π.

Ha van egy ilyen egyenlet, hogy

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

akkor ennek a periodikussága miatt végtelen sok megoldása van, ezért írjuk oda a megoldások mögé, hogy $+2k\pi$.

További nehézség, hogy két megoldás is van, az egyiket a számológépünk adja, a másikat pedig...

Szinusz esetén úgy, hogy a két megoldás összegének π-nek kell lennie.

Koszinusz esetén pedig úgy, hogy a két megoldás mindig egymás minuszegyszerese.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Trigonometrikus függvényeknek vagy szögfüggvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek tartalmaznak trigonometrikus kifejezéseket, mint például szinusz, koszinusz vagy tangens. Ezek eredetileg egy derékszögű háromszög egy szöge és két oldala hányadosa közti összefüggéseket írja le.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorozatok határértéke

$\frac{1}{n} \to 0 \quad \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \frac{1}{n^3} \to 0 \quad \frac{1}{n^k} \to 0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$n \to \infty \quad n^2 \to \infty \quad n^3 \to \infty \quad n^k \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt{n} \to \infty \quad \sqrt[3]{n} \to \infty \quad \sqrt[4]{n} \to \infty \quad \sqrt[k]{n} \to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$q^n \to \begin{cases} \infty \text{ ha } q > 1 \\ 0 \text{ ha } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ ha } q = 1 \\ \text{div ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha$

$\left(1 + \frac{\alpha}{\text{IZÉ}}\right)^{\text{IZÉ}} \to e^\alpha$

Ha IZÉ $\to \infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha van egy olyan valós szám, ami a sorozat határértéke.

Ha ilyen szám nem létezik, akkor a sorozat divergens.

Egy sorozat lehet azért is divergens, mert végtelenbe tart, és lehet azért is, mert az égvilágon nem tart sehova. A sehova nem tartó sorozatok mindig oszcilláló sorozatok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to A$ és $c_n \to A$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$ akkor $b_n \to A$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \sqrt[n]{n} \to 1 \quad \sqrt[n]{n^k} \to 1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A végtelenbe tartó sorozatok nagyságrendi sorrendje azt mondja meg, hogy melyik sorozat milyen ütemben tart a végtelenbe. Minél nagyobb nagyságrendű egy sorozat, annál gyorsabban tart a végtelenbe. A nagysagrendi rangsor:

$$\log_n << \sqrt[k]{n} << n^k << q^n << n! << n^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egyoldali rendőr-elv arról szól, hogyha egy sorozat végtelenbe tart, akkor elég alulról becsülni egy másik végtelenhez tartó sorozattal, és az egyoldali rendőr-elv szerint az eredeti sorozat is végtelenbe fog tartani. Amikor pedig az eredeti sorozat mínusz végtelenbe tart, akkor az egyoldali rendőr-elvet használva felülről becslünk egy másik mínusz végtelenbe tartó sorozattal:

Ha $a_n \to \infty$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n$ akkor $b_n \to \infty$.

Ha $a_n \to -\infty$ és van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n \geq b_n$ akkor $b_n \to -\infty$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha bármilyen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

Ennél precizebben az a_n sorozatnak torlódási pontja az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén végtelen sok tagja van, hogy $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza legyen $\{A_i\}$

Ekkor a sorozat limesz inferiorja:

$$\liminf a_n = \inf \{A_i\}$$

És a limesz szuperior:

$$\limsup a_n = \sup \{A_i\}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konvergencia és divergencia definíciója, küszöbindex keresése

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy

$|a_n - A| < \epsilon$ minden $n > n_0$-ra

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az a_n sorozat divergens, és határértéke plusz végtelen, ha bármely $M > 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M < a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat divergens, és határértéke minusz végtelen, ha bármely $M < 0$ szám esetén van olyan n_0 küszöbindex, hogy $M > a_n$ minden $n > n_0$-ra.

Az a_n sorozat oszcillálva divergens, ha nincs semmilyen határértéke, vagysi sem egy valós számhoz, sem plusz vagy minusz végtelenbe nem tart.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Monotonitás és korlátosság

Az a_n sorozat szigorúan monoton nő, ha $0 < a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat szigorúan monoton csökken, ha $0 > a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton nő, ha $0 \leq a_{n+1} - a_n$.

Az a_n sorozat monoton csökken, ha $0 \geq a_{n+1} - a_n$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények

Adott az $f: A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\text{páros} \sqrt{\text{ez itt} \geq 0} \quad \text{páratlan} \sqrt{\text{ez itt bármi}} \quad \log(\text{ez itt} > 0) \quad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton növekedőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$

Szigorúan monoton növekedő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$

Az $f(x)$ függvényt egy $]a,b[$ intervallumon monoton csökkenőnek mondunk, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvény szélsőértékén a maximumát illetve minimumát értjük.

Precízebben:

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában (globális) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális maximuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a maximum.

Az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontjában lokális minimuma van, ha létezik olyan nem nulla környezete, hogy ott ő a minimum.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Belső függvénytranszformáció: $f(x+a)$, ez úgy működik, hogy az x tengely mentén tolja el a függvény grafikonját.

Külső függvénytranszformáció: $f(x)+a$, ez pedig az y tengelyen tolja el a függvényt.

Függvény szorzása számmal: $a \cdot f(x)$, ilyenkor megnyújtjuk a függvényt az y tengely szerint.

Függvény változójának szorzása egy számmal: $f(a \cdot x)$, ilyenkor az x tengely szerint nyújtjuk a függvényt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden olyan függvényt, ami az y tengelyre szimmetrikus, páros függvénynek hívunk. Ezek a függvények azt tudják, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = f(x)$$

Azokat a függvényeket, amelyek az origóra szimmetrikusak, páratlan függvénynek nevezzük. A páratlan függvények úgy működnek, hogy bármely x-re amelyre értelmezve vannak:

$$f(-x) = -f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az x különböző pozitív egész kitevős hatványait összeadjuk vagy kivonjuk, akkor polinomokat kapunk.

A polinomfüggvény általános alakja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

A legmagasabb fokú tag együtthatóját hívjuk főegyütthatónak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összetett függvény és inverz függvény

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket egymásba ágyazzuk, azaz az f függvény x változójának helyére behelyettesítjük a $g(x)$ függvényt, összetett függvényt kapunk.

$$f \circ g = f(g(x))$$

Ebben az összetett függvényben f függvényt hívjuk külső függvénynek, a g függvényt pedig belső függvénynek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden függvény egy $x \mapsto y$ hozzárendelés, aminek az inverze, ha az egyáltalán létezik, az $y \mapsto x$ fordított hozzárendelés.

Inverze csak azoknak a függvényeknek van, amik két különböző x-hez különböző y-okat rendelnek, ezt úgy mondjuk, hogy kölcsönesen egyértelműek, vagy kicsit rövidebben injektívek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Sorok összege és sorok konvergenciája

Azokat a sorokat nevezzük mértani sornak, amelyek így néznek ki, mint ez:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$

Ha $|q| < 1$ akkor a mértani sor konvergens és összege

$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $|q| \geq 1$ akkor a sor divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy végtelen sor akkor konvergens, ha részletösszegsorozata konvergens és ekkor a sor összege:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$ monoton csökkenő sorozat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a gyök kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sum a_n$ sor konvergenciája a hányados kritérium alapján így dönthető el:

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ akkor nem tudunk semmit.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $a_n \to 0$ pozitív tagú monoton csökkenő sorozat, akkor a

$$\sum(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

végtelen sort Leibniz sornak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok, és egy bizonyos tagtól$a_n \leq b_n$ akkor

$\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow$ $\sum a_n$ is konvergens

$\sum a_n$ divergens $\Rightarrow$ $\sum b_n$ is divergens

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A teleszkopikus sorok olyan végtelennek tűnő összegek, amik megfelelő átalakítások után már csak véges sok tagból állnak.

Például:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük, ahol r a konvergenciasugár.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha x_0 a hatványsor középpontja, akkor az x_0 pont r sugarú környezetét konvergencia tartománynak nevezzük.

A konvergencia tartomány belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a végpontokat pedig külön kell vizsgálni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Függvények határértéke és folytonossága

Az $f(x)$ függvény folytonos az a-ban, ha értelmezve van az a-ban, létezik és véges a határértéke az a-ban, és ami a lényeg:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Az $f(x)$ függvény folytonossá tehető az a-ban, ha létezik véges határértéke az a-ban.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Megszüntethető szakadás:

Ha létezik véges határérték az a-ban, de ez nem egyezik meg a függvényértékkel, akkor megszüntethető szakadása van.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

Nem megszüntethető szakadás, ugrás:

Ha a bal és jobb oldalihatárérték két különböző szám az a-ban, akkor a szakadás nem megszüntethető és ugrásnak hívjuk.

$$\lim_{x \to a\text{-}} f(x) = \text{szám} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \text{másik szám} \quad \lim_{x \to a\text{-}} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Nem megszüntethető, nem véges szakadás:

Ha a bal és jobb oldalihatárérték nem is véges az a-ban, akkor pláne nem tehető folytonossá a függvény.

$$\lim_{x \to a\text{-}} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nem megszüntethető oszcilláló szakadás:

Végül meglehetősen patologikus esetek is vannak, amikor még csak jobb vagy bal oldalihatárérték sem létezik.

$$\nexists \lim_{x \to a\text{-}} f(x) \quad \nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{\text{IZÉ} \to 0} \frac{\sin \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{\text{IZÉ} \to 0} \frac{1-\cos \text{IZÉ}}{\text{IZÉ}^2} = \frac{1}{2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A határérték precíz definíciója

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen B, ha minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - B| < \epsilon$

Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen $+\infty$, ha minden $M > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ de $x \neq x_0$ akkor $f(x) > M$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Deriválás

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$(c)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

---

f és g deriválható függvények, és c valós szám esetén a deriválási szabályok:

$$(cf)' = cf' \quad \left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{c}{f}\right)' = \frac{-cf'}{f^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

A deriválási szabályok megmutatják, hogyan kell egy függvény konstans-szorosát deriválni, hogyan kell két függvény összegét vagy épp különbségét deriválni, mi lesz két függvény szorzatának a deriváltja, mi lesz két függvény hányadosának a deriváltja. Van két extra deriválási szabály is, amit érdemes tudni, az egyik amikor egy függvényt osztunk egy számmal, a másik pedig amikor egy számot osztunk el egy függvénnyel. Mindkét esetben törtet deriválunk, de nem kell a trötek deriválására használt eléggé komplikált képletet használni, hanem ezekre az esetekre vannak egyszerűbb képletek. Végül pedig jön az összetett függvények deriválási szabályavagyis a lánc-szabály.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A lánc-szabály az összetett függvények deriválási szabálya. Ha f és g deriválható függvények, akkor az f és g függvények összetételéből kapott függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

Ezt a képletet nevezzük lánc-szabálynak, és érdemes alaposan begyakorlni, ugyanis ez szokta a legtöbb gondot okozni a deriválással kapcsolatos feladatok megoldása közben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvények közt fennálló azonosságok:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\cosh x$ függvény inverze:

$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

A $\sinh x$ függvény inverze:

$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

A $\tanh x$ függvény inverze:

$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Differenciálhatóság vizsgálata és az érintő egyenlete

A deriválás lényege, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig úgy, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Az érintő meredekségét pedig úgy kapjuk meg, hogy veszünk rengeteg szelőt, amelyek egyre jobban "rásimulnak" az érintőre, és így a szelők meredekségének a határértéke lesz az érintő meredeksége. A szelők meredekségét írja le a differenciahányados:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A deriválás úgy működik, hogy függvények grafikonjának meredekségét vizsgálja, mégpedig azzal, hogy megnézi, milyen meredek érintő húzható a függvény grafikonjához. Ha az érintő "fölfele megy" akkor a függvény grafikonja is "fölfele megy" vagyis a függvény növekszik. Hogyha pedig az érintő "lefele megy" akkor a függvény grafikonja is "lefele megy" tehát a függvény csökken. Egy függvény érintő egyenesének meredeksége a differenciálhányados:

$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ezt nevezzük a függvény x_0 pontban vett deriváltjának. Hogyha a derivált ebben a pontban pozitív, az azt jelenti, hogy pozitív meredekségű érintő húzható a függvényhez. Vagyis a függvény ebben a pontban növekszik. Ha pedig a derivált ebben a pontban negatív, akkor negatív meredekségű érintő húzható a függvényhez, és így a függvény csökken. A derivált tehát a függvény növekedési és csökkenési szakaszait képes nekünk megmutatni, és hatalmas szerepe van a függvények viselkedésének vizsgálatánál.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A derivált geometriai jelentése a függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége.

Az érintő egyenlete:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Könnyű függvényvizsgálat és szélsőértékfeladatok

Az elaszticitás képlete:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Egy függvény elaszticitása azt mondja meg, hogyha 1%-kal növeljük az x-et, akkor hány százalékkal változik a függvény értéke.

$E = 0$ Teljesen rugalmatlan

$|E| < 1$ Rugalmatlan

$|E| = 1$ Egységnyi rugalmasságú

$|E| > 1$ Rugalmas

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Teljes függvényvizsgálat, gazdasági feladatok

Ha a függvény deriváltja pozitív, akkor a függvény nő,

Ha a függvény deriváltja negatív, akkor a függvény csökken.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Konkávnak nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "szomorú hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes felett halad.

Konvexnek nevezzük a függvényt azon a szakaszon, ahol "vidám hangulatban" van, vagy precizebben ha a szakaszon a függvény bármely két pontját összekötve a függvény a két pontot összekötő egyenes alatt halad.

A függvény hangulatáról a második derivált szolgáltat információt.

Ha a második derivált negatív, akkor a függvény konkáv, ha pozitív, akkor konvex

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvény stacionárius pontja x_0, ha f differenciálható az x_0 környezetében és $f'(x_0)=0$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$\text{páros}\sqrt{\text{ez itt} \geq 0} \quad \text{páratlan}\sqrt{\text{ez itt bármi}} \quad \log(\text{ez itt} > 0) \quad \text{tört nevező} \neq 0$

pl.: $f(x)=\frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Taylor polinom és Taylor sor

Legyen $f(x)$ k-szor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt k-adfokú Taylor polinomja:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Legyen $f(x)$ akárhányszor differenciálható egy I intervallumon, ami tartalmazza az a számot. Ekkor az $f(x)$ függvény a pontban felírt Taylor sora:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az e^x, $\ln x$, $\sin x$ és $\cos x$ függvények Taylor sorai:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \qquad \ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $f(x)$ egymás után k-szor folytonosan differenciálható az $[a,b]$ zárt intervallumon, és $k+1$-edszer differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon, akkor létezik olyan $c\in(a,b)$ amire

$$f(b)=T(b)+R(b)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

L’Hôpital szabály

Legyen f és g deriválható az a szám környezetében (kivéve esetleg a-ban) és tegyük fel, hogy itt $g'(x) \neq 0$.

Ekkor, ha $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, ekkor a L’Hôpital-szabály (vagy L'Hospital-szabály) szerint:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$e^{-\infty} = 0 \quad e^{\infty} = \infty$

$\ln 0 = -\infty \quad \ln \infty = \infty$

$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{+0} = +\infty \quad \frac{1}{-0} = -\infty$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozatlan integrálás, primitív függvény

Az $f(x)$ függvény primitív függvényének jele $F(x)$ és azt tudja, hogy ha deriváljuk, akkor visszakapjuk $f(x)$-et, azaz

$$F'(x) = f(x)$$

Egy függvény primitív függvényeinek halmazát nevezzük a függvény határozatlan integráljának.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \ln|ax+b| \frac{1}{a} + c$$

$$\int e^{ax+b} \, dx = e^{ax+b} \frac{1}{a} + c$$

$$\int A^{ax+b} \, dx = \frac{A^{ax+b}}{\ln A} \frac{1}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) \, dx = \sin(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \sin(ax+b) \, dx = -\cos(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \, dx = \tan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \, dx = -\cot(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2} \, dx = \arctan(ax+b) \frac{1}{a} + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Integráláskor a konstans szorzó kivihető:

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Összeget külön-külön is integrálhatunk:

$$\int f + g = \int f + \int g$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a szorzás elvégezhető, akkor végezzük el, és utána integráljunk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A parciális integrálást szorzatok integrálására fejlesztették ki. Az elnevezés onnan ered, hogy a szorzatot részenként fogjuk integrálni:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + c$$

Ez a tétel az összetett függvények integrálásáról szól. Csak sajnos az a gond az összetett függvényekkel, hogy az integrálásuk általában elég reménytelen vállalkozás.

Érdemes még néhány speciális esetet megjegyeznünk:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c \qquad \int a^g \cdot g' = \frac{a^g}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{g'}{1+g^2} = \arctan g + c \qquad \int \frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \arcsin g + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Próbálkozzunk a tört földarabolásával és utána integráljunk.

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}\,dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{E}{cx+d}\,dx =$$

$$= \int \frac{a}{c} + \frac{E}{cx+d}\,dx = \frac{a}{c}x + E\ln|cx+d|\frac{1}{c}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás lényege, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk majd megoldani a feladatot.

Hasznos helyettesítések:

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}\,dx \qquad \sqrt{cx+d} = u$$

$$\int f(g(x))\,dx \qquad g(x) = u$$

$$\sqrt{1-f} \qquad f = sin^2 u$$

$$\sqrt{1+f} \qquad f = \sinh^2 u$$

$$\sqrt{f-1} \qquad f = \cosh^2 u$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármilyen racionális törtfüggvényt nagyon egyszerűen tudunk integrálni. Mindössze annyit kell tennünk, hogy fölbontjuk elemi törtekre és az elemi törteket az előbbi módszereinkkel integráljuk.

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = A\int \frac{1}{ax+b}\,dx = A\ln|ax+b|\cdot\frac{1}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{ax^2+bx+c}\,dx\right) =$$

$$= \frac{A}{2a}\left(\ln|ax^2+bx+c| + \frac{E}{aD}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{D}}x+\frac{b}{2a\sqrt{D}}\right)\cdot\sqrt{D}\right)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A helyettesítéses integrálás úgy működik, hogy egy kifejezést u-val helyettesítünk annak reményében, hogy hátha így képesek leszünk megoldani a feladatot.

A helyettesítéses integrálás egyik legfurcsább esete az $u = \tan\frac{x}{2}$. Olyankor használjuk, ha a törtben $\sin x$ és $\cos x$ is csak első fokon szerepel.

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Határozott integrálás

Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor aNewton Leibniz formula szerint a határozott integrálját a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az f $[a,b]$ intervallumon korlátos függvény Riemann integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha egyetlen olyan I szám létezik, hogy bármely felosztásra:

$$s \leq I \leq S$$

ahol s az alsó közelítő összeg: $s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad m_i = \inf\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ahol S a felső közelítő összeg: $S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \sup\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha integráljuk a pozitív számegyenesen az

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

függvényt, akkor 0-tól 1-ig is improprius integrált kapunk és 1-től végtelenig is.

Ha 0-tól 1-ig integrálunk:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} \text{ ha } \alpha < 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ha 1 és végtelen között integrálunk:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ ha } \alpha > 1 \\ \infty \text{ ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Parciális deriválás, iránymenti derivált, érintősík

Az $f(x,y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort gradiensnek nevezzük.

A gradienst szokás deriváltvektornak is nevezni, és az $f(x,y)$ kétváltozós függvény gradiensvektorát úgy jelöljük, hogy $\text{grad}\,(f(x,y))$.

A gradiensvektor elnevezés onnan ered, hogy éppen a gradiens vektor irányában emelkedik mindig a legjobban a kétváltozós függvény grafikonja, ami egy felület.

Az $f(x,y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az (x_0,y_0) pontban:

$$\text{grad}\,(f(x_0,y_0)) = \nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

A gradiens segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x és y szerinti deriváltjaiból álló vektort deriváltvektornak nevezzük.

A deriváltvektort szokás gradiensnek is nevezni, és az $f(x,y)$ kétváltozós függvény deriváltvektorát úgy jelöljük, hogy $\nabla f(x,y)$.

Az $f(x,y)$ függvény deriváltvektora vagy másként gradiense az (x_0,y_0) pontban:

$$\text{grad}\,(f(x_0,y_0)) = \nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

A deriváltvektor segítségével tudjuk kiszámítani az iránymenti deriváltat.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0,y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta \underline{e}} = \text{grad}\,(f(x_0,y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogyha a kétváltozós függvény grafikonjának egy pontjában áll egy hagymászó, és elindul egy $\underline{v}$ irányban, akkor ebben az irányban milyen meredeken emelkedik a felület.

Ahogy a $\underline{v}$ irányt változtatjuk, az iránymenti derivált értéke is változik.

És van egy olyan $\underline{v}$ irány, ahol az iránymenti derivált maximális. Ezt az irányt nevezzük gradiens iránynak és ez mindig megegyezik a deriváltvektor irányával.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A függvényeket két nagy típusba sorolhatjuk, az explicit és az implicit függvények csoportjába. Az explicit függvények azok, amelyek egy konkrét képlettel vannak megadva, míg az implicit függvények valamilyen egyenlet formájában adhatók meg.

Egy függvény akkor implicit, ha y nincs kifejezve, vagyis nem $y = \dots$ alakú.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha $F(x, y) = 0$ egy implicit függvény, akkor deriváltja:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}$$

Ha $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ egy n változós implicit függvény, akkor az x_i, mint implicit függvény deriváltja az x_j változó szerint:

$$\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Kétváltozós függvények

A kétváltozós függvények úgy működnek, hogy két valós számhoz rendelnek hozzá egy harmadik valós számot. Másként fogalmazva számpárokhoz rendelnek hozzá egy harmadik számot.

Ezeket a számpárokat tekinthetjük úgy, mint a sík pontjainak koordinátáit.

A kétváltozós függvények ennek a síknak a pontjaihoz rendelnek hozzá egy harmadik koordinátát, egy magasságot.

Az értelmezési tartomány minden pontjához hozzárendelve ezt a harmadik, magasság koordinátát, kirajzolódik az x, y sík felett a függvény, ami egy felület.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Young-tétel szerint vegyes másodrendű deriváltak egyenlők (egészen pontosan akkor egyenlők, ha a függvény kétszer totálisan deriválható):

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy x szerint deriválunk, y most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami x-essel, akkor marad

Az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x,y)$$

Ez azt jelenti, hogy y szerint deriválunk, x most csak konstansnak számít, ha önállóan áll, akkor deriváltja nulla, ha szorozva van valami y-ossel, akkor marad

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Első lépés:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f'_x(x,y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f'_y(x,y)$$

Második lépés:

$$f'_x(x,y) = 0$$

$$f'_y(x,y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai a stacionárius pontok

Harmadik lépés:

$$\underline{f''} = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ pozitív, és $f''_{xx} < 0$, akkor lokális maximum van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ negatív, akkor nyeregpont van.

Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ nulla, akkor további vizsgálat szükséges, de ilyen nem nagyon szokott lenni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkétparciális derivált nulla, az $f(x,y)$ függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az f többváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban léteznek f első parciális deriváltjai és

$$\delta_1 f(x_0) = \delta_2 f(x_0) = \cdots = \delta_k f(x_0) = 0$$

akkor x_0 az f többváltozós függvény stacionárius pontja.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű deriváltakból képzett mátrix, amely segít eldönteni, hogy a függvénynek a stacionárius pontokban minimuma, maximuma, vagy éppen nyeregpontja van-e.

$$\underline{f}'' = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A sík azon pontjainak összességét, amelyekben az f függvény ugyanazt a konstans értéket veszi fel, azaz $f(x,y) = c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az $f(x)$ függvényhez a $P(x_0, y_0, z_0)$ pontban húzott érintősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az iránymenti derivált azt jelenti, hogy egy általunk megadott tetszőleges $\underline{v}$ irány mentén milyen meredeken emelkedik a függvény felülete.

Az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ iránymenti deriváltja a $P(x_0, y_0)$ pontban:

$$\frac{\delta f(x_0,y_0)}{\delta \underline{e}} = \operatorname{grad}(f(x_0,y_0)) \cdot \underline{e} \quad \text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot
