Differenciálegyenletek

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, amiben az ismeretlenek függvények. Az egyenletben ezeknek a függvényeknek a különböző deriváltjai és hatványai szerepelnek.

Ha ez a bizonyos függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, ha a függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletnek.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A rend azt mondja meg, hogy a függvény maximum hányadik deriváltja szerepel az egyenletben.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első fokon szerepelnek a differenciálegyenletben, akkor az egyenlet lineáris.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A szeparábilis differenciálegyenlet így néz ki:

$$f(x)\ dx = g(y)\ dy$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Az y'-t lecseréljük arra, hogy $\frac{dy}{dx}$.

Aztán jön a szétválasztás: minden y-os dolgot a dy-os oldalra viszünk és minden x-eset a dx-es oldalra.

Ezt követően mindkét oldalt integráljuk és megkapjuk a megoldást.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy differenciálegyenlet homogén fokszámú, ha $y = ux$ helyettesítés után minden x-es tag kitevője megegyezik.

A homogén fokszámú differenciálegyenletek megoldásának menete a következő:

Először elvégezzük az $y(x) = xu(x)$ (röviden $y = xu$) helyettesítést, ekkor $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.

Így ez az egyenlet már szeparábilis, úgyhogy jöhet a szétválasztás.

Megoldjuk a szeparábilis egyenletet, ahol y helyett most u-ra hajtunk. És amikor u már megvan, visszacsináljuk y-ra.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ differenciálegyenlet akkor egzakt, ha $p_y'(x,y) = q_x'(x,y)$, röviden $\frac{\delta p}{\delta y} = \frac{\delta q}{\delta x}$.

Az egzakt egyenletek megoldása $F(x,y) = C$, ahol $F_x'(x,y) = p(x,y)$ és $F_y'(x,y) = q(x,y)$

A megoldást intgerálással kapjuk:

$$F(x,y) = \int p(x,y)\ dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha a differenciálegyenlet nem egzakt, akkor megpróbálhatjuk egzakttá tenni egy integráló tényező segítségével.

Az integráló tényező megtalálásához elsőként kiszámoljuk ezeket:

$\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{p}$ és $\frac{\frac{\delta p}{\delta y} - \frac{\delta q}{\delta x}}{q}$

Ha ezek közül az első csak y-t tartalmaz, vagy a második csak x-et tartalmaz, nos olyankor van remény az integráló tényező megtalálására.

Az integráló tényező:

$u = e^{-\int f(y)\ dy}$ vagy $u = e^{\int g(x)\ dx}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja úgy néz ki, hogy van benne egy y', és van benne egy elsőfokú y.

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Megoldásának menete pedig a következő:

Kiszámolunk egy $v(x)$ függvényt:

$$v = e^{\int P(x)\ dx}$$

Beszorozzuk az egyenletet $v(x)$-el, hogy a bal oldal egy szorzat deriváltja legyen.

$$y'v + yvP(x) = vQ(x)$$

Végül mindkét oldalt integráljuk.

$$\int (yv)'\ dx = \int vQ(x)\ dx$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet egy speciális esete a lineáris elsőrendű egyenleteknek. Azért hívják állandó együtthatósnak, mert a $P(x)$ függvény ilyenkor valamilyen konstans, mondjuk a.

$$y' + ay = Q(x)$$

Az általános megoldása úgy jön ki, hogy a homogén megoldáshoz hozzáadjuk a partikuláris megoldást.

A homogén egyenlet: $y' + ay = 0$

A homogén megoldás: $y_0 = Ce^{-ax}$

Az általános megoldás: homogén megoldás + partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keressük meg. Az, hogy mi is lesz a partikuláris megoldás, ez mindig a jobb oldali függvénytől függ:

$Q(x) =$ másodfokú polinom: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$Q(x) =$ harmadfokú polinom: $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$Q(x) =$ exponenciális kifejezés: $y_p = Ae^{\alpha x}$

$Q(x) =$ szinusz vagy koszinusz: $y_p = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Rezonanciáról beszélünk, ha az elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet partikuláris megoldásában szerepel $e^{\alpha x}$ és a kitevője éppen megegyezik a homogén megoldás kitevőjével.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax}\left(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx\right)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet általános alakja:

$$ay'' + by' + cy = Q(x)$$

A megoldás lépései:

Először megoldjuk a karakterisztikus egyenletet: $ar^2 + br + c = 0.$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van r_1 és r_2 akkor $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van akkor $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex megoldása van $r_1 = A + Bi$ és $r_2 = A - Bi$ akkor $y = e^{Ax}\left(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx\right)$

Ezzel megkapjuk a homogén megoldást.

A partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel végezzük:

$Q(x) =$ polinom: $y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$

$Q(x) =$ exponenciális kifejezés: $y_p = Ae^{\alpha x}$

$Q(x) =$ szinusz vagy koszinusz: $y_p = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$

Az általános megoldás a homogén megoldás és partikuláris megoldás összege.

Megnézem a kapcsolódó epizódot