Sajátérték, sajátvektor, diagonalizálás

Az A nxn-es mátrix sajátértéke egy olyan λ valós szám, amelyhez van valami $\underline{v}$ nem nullvektor, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátérték lényege, hogy vannak olyan mátrixok, és olyan vektorok, hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. Az egységmátrixpéldául ilyen: ha az egységmátrixszal megszorzunk egy tetszőleges vektort, akkor ugyanazt a vektort kapjuk. Ilyenkor minden vektor sajátvektor és a sajátérték 1, mert minden vektorból az 1-szerese lesz.

A sajátvektorok és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le. A síkbeli tükrözés az x tengelyre például egy geometriai transzformáció, aminek a mátrixa két sajátértékkel rendelkezik. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Az y tengelyen lévő vektorok viszont az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátértékei. Az 1 és a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A nxn-es mátrix sajátvektora egy olyan $\underline{v}$ nem nullvektor, amelyhez van valami λ valós szám, hogy $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

A sajátvektor lényege, hogy vannak olyan mátrixok, és olyan vektorok, hogyha a mátrixot megszorozzuk a vektorral, akkor az eredeti vektornak egy számszorosát kapjuk. A sajátvektorok és sajátértékek egyik legfontosabb alkalmazása a geometriai transzformációk, amelyek szintén mátrixokkal írhatók le.

Vegyük például a síkbeli tükrözést az x tengelyre. Ez egy geometriai transzformáció. Az x tengelyen lévő vektorokkal a tükrözés hatására nem történik semmi. Ezek tehát saját maguk 1-szeresei lesznek. Vagyis ezek a vektorok egytől egyig sajátvektorok, mert teljesítik azt amit egy sajátvektornak tudnia kell: ha megszorozzuk a mátrixokt a vektorral, akkor az eredeti vektor számszorosát kapjuk. Itt most éppen az eredeti vektor 1-szeresét kapjuk. Az y tengelyen lévő vektorok szintén sajátvektorok, mert az x tengelyre történő tükrözéskor "megfordulnak" vagyis beszorzódnak -1-gyel. Vagyis ezek a vektorok saját maguk -1-szeresei lesznek. A tükrözés mátrixának tehát ezek lesznek a sajátvektorai: az x tengely és az y tengely vektorai. Az x tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték az 1, míg az y tengelyen lévő sajátvektorokhoz tartozó sajátérték a -1. Mindez sokkal érthetőbb lesz, ha megnézed a kapcsolódó epizódot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A karakterisztikus egyenlet a sajátértékek kiszámolásához szükséges egyenlet:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet segít nekünk kiszámolni egy mátrix sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Az egyenletet karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy nxn-es mátrix karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5x5-ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda \cdot I)$$

A karakterisztikus polinom segít nekünk kiszámolni egy mátrix sajátértékeit. A sajátértékeket úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával. Így egy egyenletet kapunk, és ennek az egyenletnek a megoldásai a sajátértékek. Vagyis a sajátértékek mindig a karakterisztikus polinom gyökei. Előfordul, hogy egy sajátérték többszörös gyök, és az is megeshet, hogy komplex gyökei vannak a karakterisztikus polinomnak.

Azt az egyenletet, amikor a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával karakterisztikus egyenletnek is szokás nevezni, és egyetlen bökkenő vele, hogy egy nxn-es mátrix karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Vagyis 2-nél és 3-nál még valahogyan meg tudjuk oldani az egyenletet, de mondjuk egy 5x5-ös mátrixnál már ötödfokú egyenletet kapunk, amivel adódhatnak gondok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots \underline{v}_n \end{pmatrix}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha az A mátrix egy n x n-es diagonalizálható mátrix, akkor a sajátfelbontása:

$$A = X \cdot diag(A) \cdot X^{-1}$$

Itt $X = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_n \end{pmatrix}$ vagyis egyszerűen úgy keletkezi, hogy a sajátvektorokat fogjuk, és leírjuk egymás mellé és

$$diag(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A spektrálfelbontás segítségével könnyebben hatványozhatunk:

$$A^n = X \cdot (diag(A))^n \cdot X^{-1}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot
