Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok rangja és inverze

Egy egyenletrendszer együtthatómátrixa az x-ek együtthatóiból álló mátrix.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss-elimináció egy lineáris egyenletrendszerek megoldására használt algoritmus.

Az elimináció lényege, hogy egyenletrendszerünket visszavezetjük vagy valamely háromszög- vagy átlósmátrix alakra.

A Gauss-elimináció megengedett lépései:

- Két sort (egyenletet) felcserélhetünk
- Egy sort (egyenletet) nem nulla számmal szorozhatunk
- Egyik sorhoz (egyenlethez) hozzáadhatjuk egy másik sor (egyenlet) nem nulla számsorosát

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az elemi bázistranszformáció (Szuper-Gauss) a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy algoritmikus módja.

1. lépés: a generáló elem választása

Csak x-es oszlopból és e-s sorból választhatunk generáló elemet, nullát nem választhatunk és lehetőleg 1-et vagy mínusz 1-et érdemes.

2. lépés: a bázistranszformáció

A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel, oszlopát elhagyjuk.

A többi elemből kivonjuk a generáló elem neki megfelelő sorában és oszlopában lévő számok szorzatát, osztva a generálóelemmel.

3. lépés: megint generáló elem választás

Újra és újra végrehatjuk a bázistranszformációt, amíg az összes oszlop el nem tűnik

4. lépés: az utolsó transzformáció és a megoldás

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszernek több az ismeretlene, mint ahány egyenlete van, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Bázistranszformációval, ha maradnak $\underline{e}$-s sorok ahol már nem tudunk generáló elemet választani, olyankor mindig végtelen sok megoldás van, vagy nincs megoldás.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy egyenletrendszerben két olyan egyenlet szerepel, ahol az ismeretlenek együtthatói megegyeznek, de más az eredményük, akkor az ellentmondó egyenletrendszer, aminek nincs megoldása.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A bázistranszformáció során fent maradt x-ek úgynevezett szabadváltozók. A szabadságfok a szabadváltozók száma, tehát ahány x_i fönt marad.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Gauss-Jordan elimináció a Gauss-elimináció pro változata. A dolog lényege az, hogy nemcsak a vezéregyesek alatt nullázzuk ki, hanem felettük is. Előnye, hogy így a megoldások az elimináció végeztével egyből leolvashatók.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix oszloprangja az oszlopvektorai közül kiválasztható függetlenvektorok maximális száma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrix sorrangja a sorvektorai közül kiválasztható függetlenvektorok maximális száma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mátrix rangja a mátrix Gauss elimináció során keletkezett vezéregyeseinek száma, amely megegyezik a mátrix sorrangjával vagy oszlopvektorával

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrixot teljes oszloprangúnak nevezünk, hogyha az oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy mátrixot teljes sorrangúnak nevezünk, hogyha a sorvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Bármely mátrixot fel lehet bontani két olyan mátrix szorzatára, amelyek közül az egyik teljes oszloprangú, a másik pedig teljes sorrangú. Ezt bázisfelbontásnak hívják, és egy kiss Gauss-Jordan eliminációval tudjuk elkészíteni.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot. Az eliminációs lépéseket addig kell végezni, amíg az egységmátrixot nem kapjuk az A helyén, a b helyén keletkezett mátrix pedig az A mátrix inverze lesz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a bázistranszformáció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Négyzetes mátrixok inverzét a Gauss-Jordan elimináció segítségével úgy állíthatjuk elő, hogy megoldjuk az $Ax = b$ egyenletrendszert úgy, hogy a b helyére beírjuk az egységmátrixot.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az inverz kiszámolása rettentő egyszerű dolog. Mindössze annyit kell tennünk, hogy felírjuk a mátrixot a szokásos táblázatba, és mellé írjuk az egységmátrixot. Ezek után jön a bázistranszformáció. Ha nem tudjuk mindegyik x-et levinni, akkor nincs inverz. Ha mindet le tudjuk vinni, akkor van.

Megnézem a kapcsolódó epizódot
