

Determináns, sajátérték, sajátvektor

Ha az A egy $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$\det(A) = \sum_{\forall p} (-1)^{I(p)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{ip(i)}$$

ahol p az oszlopindexek permutációi, $I(p)$ pedig ezen permutációk inverziószáma.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy 2x2-es [mátrix](#) determinánsa:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A 3x3-as [mátrixok](#) determinánsának kiszámolására van egy szabály, ami szarrusz szabály néven ismert. A szabály lényege, hogy fogjuk a mátrixot és leírjuk saját maga mögé még egyszer, majd vesszük a főátlókat és a mellékátlókat, így

$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az A egy $n \times n$ -es [mátrix](#), akkor determinánsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Itt $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó aldetermináns.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A mátrix determinánsa nulla, ha

- van csupa nulla sora
- van két azonos sora
- egyik sora a másik sor számszorosa
- egyik sora más sorok lineáris kombinációja
- mindez sor helyett oszlopra is elmondható

Determinánsok szorzási tétele:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük szingulárisnak, amelyek determinánsa nulla.

Az A mátrix szinguláris:

- $\det(A) = 0$
- Nem létezik A^{-1} inverz mátrix
- $\text{RANG} < n$
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Azokat a mátrixokat nevezzük regulárisnak, amelyek determinánsa nem nulla.

Az A mátrix reguláris:

- $\det(A) \neq 0$
- Létezik A^{-1} inverz mátrix
- $\text{RANG} = n$
- Az A mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek csak egy megoldása van
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak egy megoldása van (a triviális megoldás)

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A Cramer szabály szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásai a következőképp állnak elő:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

ahol $\det(A_k)$ annak a mátrixnak a determinánsát jelenti, hogy az A mátrix k -edik oszlopát kicseréljük a \underline{b} vektorral.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\text{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$\text{itt } X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha az A mátrix egy $n \times n$ -es diagonalizálható mátrix, akkor a sajátfelbontása:

$$A = X \cdot \text{diag}(A) \cdot X^{-1}$$

Itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$ vagyis egyszerűen úgy keletkezi, hogy a sajátvektorokat fogjuk, és leírjuk egymás mellé és

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A spektrálfelbontás segítségével könnyebben hatványozhatunk:

$$A^n = X \cdot (\text{diag}(A))^n \cdot X^{-1}$$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) sarak főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarak [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első sarokfőminora a 2-es

második sarokfőminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Egy [mátrix](#) főminor mátrixai a [mátrix](#) bal felső sarkától kezdődő sarak [mátrixok](#) determinánsai.

$$\text{Pl.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 & \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

első főminora a 2-es

második főminora a bal felső 2x2-es determináns

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2$$

és így tovább

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A nxn-es [mátrix](#) pozitív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda > 0$.

Vagy ha minden sarokfőminor pozitív.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A nxn-es [mátrix](#) negatív definit, ha minden λ sajátérték: $\lambda < 0$.

Vagy ha a sarokfőminorok váltakozva $- + - +$ de mínusszal indul.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) pozitív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \geq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor pozitív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) negatív szemidefinit, ha minden λ sajátérték: $\lambda \leq 0$.

2x2-es mátrixoknál, ha az első sarokfőminor negatív, a második nulla.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Az A $n \times n$ -es [mátrix](#) indefinit, ha van λ_1 és λ_2 sajátérték, hogy $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 < 0$.

Ha $\det(A) \neq 0$ és nem pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

Ha A $n \times n$ -es szimmetrikus [mátrix](#) és \underline{x} egy vektor R^n -ben, akkor a

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$$

kifejezést kvadratikus alaknak nevezzük.

Azért hívjuk kvadratikusnak vagyis négyzetesnek, mert ez mindig egy homogén másodfokú kifejezés.

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)

A $Q(\underline{x}) = \underline{x}^* \cdot A \cdot \underline{x}$ kvadratikus alak

pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) > 0$

negatív definit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) < 0$

pozitív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \geq 0$

negatív szemidefinit, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra $Q(\underline{x}) \leq 0$

indefinit, ha van olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{x}) < 0$ és $Q(\underline{y}) > 0$

[Megnézem a kapcsolódó epizódot](#)
