Euklideszi algoritmus & Diofantoszi egyenletek

Az euklideszi algoritmus egy formányos módszer két szám legnagyobb közös osztójának kiszámolására.

a és b számokra így néz ki az algoritmus:

$$a = q_1 \cdot b + r_1$$

$$b = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

$$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0$$

A legnagyobb közös osztó az utolsó nem 0 maradék (r_n).

Az euklideszi algoritmussal továbbá a két szám legnagyobb közös osztója kifejezhető a két szám segítségével:

$$D = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$

Itt D a legnagyobb közös osztó.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Diofantoszi egyenletek így néznek ki:

$$ax + by = c$$

ahol $a, b, c \in Z$ és $x, y \in Z$

Megoldásukat azzal kezdjük, hogy kiszámoljuk a és b legnagyobb közös osztóját: D, és ezzel végig osztjuk az egyenletet, így kapjuk az

$$Ax + By = C$$

egyenletet, ahol $(A, B) = 1$.

A második lépés, hogy az euklideszi algoritmus segítségével kifejezzük A és B legnagyobb közös osztóját, ami az 1, így

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot B = 1$$

egyenletet kapunk.

Ezt az egyenletet beszorozva C-vel megkapunk egy megoldást:

$$(\alpha \cdot C) \cdot A + (\beta \cdot C) \cdot B = C$$

Az általános megoldásokat a következő alakban kapjuk meg:

$$x = \alpha \cdot C + k \cdot B$$

$$y = \beta \cdot C - k \cdot A$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot