Kromatikus szám, klikk, perfekt gráfok

A legkevesebb színt, amivel egy gráf csúcsait kiszinezhetjük úgy, hogy a szomszédos csúcsok ne legyenek egyforma színűek, a gráf kromatikus számának nevezzük.

Jele: $\chi(G)$.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G egyszerű gráfban klikknek nevezzük azokat a részgráfokat, amelyek teljes gráfok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy gráf klikkszáma a gráfban található maximális klikk elemszáma.

A G gráf klikkszámát $\omega(G)$-vel jelöljük.

Minden gráfban a klikkszám alsó becslés a kromatikus számra:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A G gráfban a G' részgráf feszített részgráf, ha bármely két csúcs a G' gráfban pontosan akkor szomszédos, ha G-ben is szomszédos.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy G gráf minden G' feszített részgráfjára igaz, hogy

$$\omega(G') = \chi(G')$$

akkor a G gráfot perfekt gráfnak nevezzük.

Ha egy gráf perfekt, akkor a kromatikus száma egyenlő a klikkszámával. Az állítás fordítva nem igaz, abból, hogy $\omega(G') = \chi(G')$ még nem következik, hogy a gráf perfekt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

ahol $\omega(G)$ a gráf klikkszáma, $\chi(G)$ a kromatikus száma és $\Delta(G)$ a maximális fokszáma.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A mohó színezés egy algoritmus a gráfok színezésére.

Lényege, hogy sorba rakjuk a gráf csúcsait, és elkezdjük színezni úgy, hogy minden csúcs színezéséhez a lehető legkisebb sorszámú színt használjuk. Ezt addig folytatjuk, amíg az összes csúcs ki nem lesz színezve, és így elhasználunk legfeljebb $\Delta(G)+1$ darab színt.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha G nem teljes gráf, vagy páratlan csúcsú kör, akkor

$\chi(G) \leq \Delta(G)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráfban azt a legkisebb számot, amire a gráfnak már van jó élszínezése, a G gráf élkromatikus számának nevezzük.

Jele: χ_e

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A Vizing-tétel a gráfok élkromatikus számára ad alsó és felső becslést:

$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$

Vagyis a G egyszerű gráfok két osztályba sorolhatók:

Első osztály: $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Második osztály: $\chi_e(G) = \Delta(G)+1$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az intervallumgráf egy olyan gráf, melynek csúcsai megfeleltethetőek a valós számok egy-egy intervallumának, és két csúcs között akkor vezet él, ha a nekik megfeleltethető két intervallum metszete nem üres.

Az intervallumgráfok mindig perfekt gráfok.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsainak a $V(G)$ halmaza felbontható az A és B diszjunkt részhalmazokra, úgy hogy A-n és B-n belül nem vezetnek élek.

A páros gráfok kromatikus száma 2, élkromatikus számukra pedig König Dénesnek van egy remek tétele:

Ha G páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Jan Mycielski lengyel matematikust nyugtalanította az a kérdés, hogy léteznek-e olyan gráfok, amelyeknek a kromatikus száma nagyon nagy, de a klikkszáma csak 2.

Létrehozott egy konstrukciót, amivel olyan gráfokat lehet alkotni, amelyek klikkszáma 2, a kromatikus számuk pedig bármilyen nagy lehet. Ezeket a gráfokat Mycielski-gráfoknak nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot