Halmazok, logikai műveletek, bizonyítási módszerek

Vannak az A és B halmazok.

Az A és B halmazok uniója: Azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.

Jele: $A \cup B$

Az A és B halmazok metszete: Azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jele: $A \cap B$

Az A és B halmazok különbsége: Azon elemek halmaza, amelyek az A halmazba benne vannak, de a B halmazba nem.

Jele: $A \setminus B$

Az A halmaz komplementere a H alaphalmazon nézve: Az alaphalmaz azon elemeinek halmza, amelyek nincsenek benne az A-ban.

Jele: $\overline{A}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A logikai szita formula két halmazra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A logikai szita formula három halmazra:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az első De Morgan azonosság azt mondja, hogy a metszet komplementere pont megegyezik a komplementrek uniójával:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A második De Morgan azonosság pedig azt mondja, hogy az unió komplementere éppen megegyezik a komplementerek metszetével:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát hatványhalmaznak nevezzük.

Pl.: az $A = \{x, y, z\}$ halmaz hatványhalmaza:
$P(A) = \{\emptyset. \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Érdemes megjegyezni, hogy $A \triangle A = \emptyset$ és $A \triangle \emptyset = A$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Adott az $f : A \mapsto B$ függvény. A függvény értékkészlete azoknak az elemeknek a halmaza a B halmazban, amelyek hozzá vannak rendelve valamely A halmazbeli elemekhez.

Az értékkészlet jele az angol range szó alapján, ami azt jelenti, hogy kiterjedés: R_f vagy az akadálymentesített jelölése: É.K.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy kifejezés értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol értelmezve van.

Függvény esetén azokat a szerencsés x-eket, amelyekhez a függvény hozzárendel egy y számot, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

A következőket érdemes megjegyezni:

$$\sqrt[\text{páros}]{\text{ez itt} \geq 0} \qquad \sqrt[\text{páratlan}]{\text{ez itt bármi}} \qquad \log(\text{ez itt} > 0) \qquad \text{tört nevező} \neq 0$$

pl.: $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^4}$ értelmezési tartománya $\forall x \in R \setminus \{-3\}$, mert nincs gyök és nincs logaritmus, de tört van, tehát a nevező nem lehet nulla ($x \neq 3$)

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az univerzális kvantor egy jelölése a "minden" kifejezésnek.

Jele: $\forall$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az egzisztenciális kvantor egy jelölése a "létezik" vagy "van olyan" kifejezésnek.

Jele: $\exists$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás negációja (vagy tagadása) egy egyváltozós művelet. Egy A kijelentés negációja az a kijelentés, amely akkor igaz, ha A hamis és akkor hamis, ha A igaz.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az állítás (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthetjük, hogy az igaz vagy hamis.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A konjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \wedge B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunkció két állítás közti logikai művelet. Két kijelentés diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.

Jele: $A \vee B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A "ha A, akkor B" kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet nevezzük implikációnak. Az implikáció akkor hamis, ha A igaz és B hamis, minden más esetben igaz.

Jele: $A \Rightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Az ekvivalencia egy olyan logikai művelet, amikor $A \Rightarrow B$ és $A \Leftarrow B$. Az ekvivalencia akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, különben hamis.

Jele: $A \Leftrightarrow B$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) = A \Leftrightarrow \neg B$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A diszjunktív normálforma, röviden DNF egy olyan alakja egy logikai formuláknak, ahol a művelet a változóinak vagy negáltjainak konjunkcióinak diszjunkciója.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A teljes indukció olyan állítások bizonyítására alkalmas, melyek n pozitív egész számtól függenek.

A teljes indukciós bizonyítás lépései:

1. lépés: Igazoljuk, hogy az állítás $n = 1$ esetén vagy az első néhány n-re igaz.

2. lépés: Igazoljuk, hogy ha az állítás n-re igaz, akkor $n + 1$ esetén is igaz.

Ezzel az állítást minden n pozitív egész számra belátjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot