Lineáris leképezések

A φ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1$ vektorokra és $\lambda \in R$ számra teljesül, hogy

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$

$$\varphi(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \varphi(\underline{v})$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezésnél V_2-nek azt a részét, amely a leképezés során előáll, a leképezés képterének nevezzük és $Im\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A nullvektorból minden lineáris leképezés nullvektort csinál, vagyis $\underline{0}$ képe mindig $\underline{0}$, de előfordulhat, hogy más V_1-beli vektorok képe is nullvektor lesz. Ezen vektorok halmazát nevezzük a leképezés magterének és $Ker\varphi$-vel jelöljük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A képtér és a magtér dimenziója összesen éppen kiadja V_1 dimenzióját.

Ezt az összefüggést dimenziótételnek nevezzük:

$$\dim(Ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = \dim(V_1)$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Minden lineáris leképezést jellemezhetünk egy mátrixszal. Valójában mindegyiket végtelen sok mátrixszal jellemezhetjük, ezek a mátrixok pedig úgy keletkeznek, hogy veszünk egy tetszőleges bázist V_1-ben és a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ leképezésben minden vektor képét így kapjuk:

$$\varphi(\underline{v}) = (\varphi)_b \cdot \underline{v}$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Egy leképezésnek pontosan akkor létezik inverze, ha a $(\varphi)_b$ mátrixnak létezik inverze, és az inverz leképezés mátrixa:

φ^{-1} mátrixa $(\varphi)_b^{-1}$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $\varphi \circ \mu$ leképezés mátrixa:

$$(\varphi \circ \mu)_b = (\varphi)_b \cdot (\mu)_b$$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha egy nxn-es mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor létezik a mátrixnak egy úgynevezett diagonális alakja.

A diagonális alak így néz ki:

$$\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a főatlóban vannak a sajátértékek és az összes többi elem nulla.

A diagonális alakot a következő módon állítjuk elő:

$$\operatorname{diag}(A) = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

itt $X = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \underline{v}_n)$

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A φ lineáris leképezésnek a $\underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \dots\ \underline{b}_n$ bázisban felírt mátrixát úgy kapjuk meg, hogy a bázisvektorok képeit egymás mellé írjuk:

$$(\varphi)_b = (\varphi(\underline{b}_1)\ \varphi(\underline{b}_2)\ \varphi(\underline{b}_3)\ \dots\ \varphi(\underline{b}_n))$$

Bármilyen bázist is választunk is V_1-ben, a leképezés mátrixa mindig egy nxn-esmátrix lesz. Ha ennek a mátrixnak van n darab független sajátvektora, akkor ezek a sajátvektorok szintén egy bázist alkotnak V_1-ben, amit sajátbázisnak nevezünk.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

A $V_1 \to V_2$ lineáris leképezést másnéven homomorfizmusnak is nevezzük. Ezek a homomorfizmusok és azok mátrixai maguk is egy vektorteret alkotnak, ezt a vektorteret $Hom(V_1, V_2)$-nek nevezzük.

Megnézem a kapcsolódó epizódot

Ha A és B olyan mátrixok, hogy létezik egy C mátrix úgy, hogy

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

akkor a két mátrix egymáshoz hasonló.

Megnézem a kapcsolódó epizódot
